الألف كتاب (١٠٣)

الرياضة للمليون

الجزء الثاني

بإشراف إدارة الثقافة العامة
بوزارة التربية والتعليم

الرياضة للمليون

الجزء الثانى

تأليف

لانسلوت هوجبن

ترجمة

الدكتور
حسن محمد حسين

الأستاذ
عبد الحميد لطفى

الدكتور
عطية عبد السلام عاشور

الدكتور
راجى حليم مقار

الدكتور
محمد طلب السيد عويضة

راجعه

الدكتور
محمد مرسى أحمد

الدكتور
عبد المنعم ناصر الشافعى

نشرته
مكتبة الشرق
ت ٥٧٦١٩ — الفجالة — مصر
١٩٥٩

هذه ترجمة كتاب :—

MATHEMATICS

For The

MILLION

تأليف

Lancelot Hogben

الباب الثامن

تخطيط الكرة الأرضية

أو

المثلثات الكروية

منذ العهد الذي شيدت فيه الأهرام الكبرى ، بل ربما قبل ذلك ، كان كهنة مصر السامريون ملمّين بحقيقتين عن النجوم ، أولاهما أن نفس الفترة من الزمن تنقضي دائماً بين اللحظتين اللتين يعبر فيهما نجمان مستوى الزوال ، أي يصلان أقصى ارتفاع في السماء على الدائرة العظمى التخيلية المارة بالنقطة الشمالية من الأفق والنجم القطبي وسمت الرأس[1] ونقطة الجنوب .

والحقيقة الثانية أنه عند أي مكان تكون الزاوية التي يصنعها النجم مع الأفق (أي ارتفاع النجم) والبعد السمتي للنجم دائماً ثابتين في اللحظة التي يعبر فيها النجم مستوى الزوال . وقد كان قدماء الكهنة يعتمدون في توقيتهم على ساعات زجاجية — أشبه بتلك التي كانت تباع عادة لتقدير زمن غلي بيضة في الماء — مسجلين بها أوقات عبور النجوم ، ولم يكونوا قد أدركوا جيداً فائدة ما عرفوه نظراً لقلة ترحالهم .

ثم أصبح الكهنة رجالا غير عمليين ونشأت طبقة جديدة من الرجال العمليين ألا وهي طبقة البحارة الفينيقيين الذين أخذوا يجمعون المعلومات الجديدة عن السماوات ، وقد كانت تلك خطوة هامة جداً . ثم جاء البحارة الإغريق وقد عرفوا من قبل أن الفرق بين البعدين السمتيين عند العبور لأي

---

(١) يراجع [illegible] الارتفاع والبعد السمتي والزاوية [illegible]

مطبعة كوستاتسوماس وشركاه
٥ شارع [illegible] - القاهرة تليفون ٤٤١١٨

نجمين مقيسا عند مكانين مختلفين مقدار ثابت لا يتوقف على المكانين . فمثلا عند ممفيس (على خط عرض ٣٠° شمالا) يكون عبور الشعرى اليمانية عند ٤٦½° جنوبا وعبور الدبران عند حوالى ١٤° جنوبا ، وعند لندن (على خط عرض ٥١½° شمالا) يكون عبور الشعرى اليمانية عند ٦٨° جنوبا ، والدبران عند ٣٥½° جنوبا . ففى كلتا الحالتين يكون الفرق المحلى ٢١½° . وقد أدركت الشعوب البحرية القديمة أن هذا مرده إلى أن النجوم ثابتة بالنسبة إلى بعضها وأن الأرض كروية . وقد كان من الأسباب التى جعلتهم يعتقدون بكروية الأرض رؤيتهم ظلا مستديراً للأرض عند ما تأخذ موضعاً بين الشمس والقمر عند الخسوف القمرى وكذلك رؤيتهم اليومية للسفن وهى تختفى وراء الأفق ، وكذلك ما أدركوه فى أسفارهم من أن بروج جديدة تظهر وبروج مألوفة تختفى وراء الأفق عند إبحارهم شمالا أو جنوبا .

ولم يكن القدماء يعرفون سوى القليل جداً عن الأبعاد والقياسات إلى حوالى سنة ٢٥٠ ق . م . عندما عمل اراتوستينس أول قياسات لحجم الأرض وتلا ذلك اختراع الخرائط وقد كانت أولاها خرائط تصور السماوات ، وقد كان انشاء الخرائط الأرضية رهنا بتقدم مصورات السماوات . وقد رسم هيباركس الذى ذكرناه فى الباب السادس مصوراً يبين مواضع ألف وثمانين من النجوم .

وقد كان رسم خرائط النجوم الأساس الفنى اللازم للسفرات البحرية الكبرى ، وسنرى فيما بعد كيف كان رسم هذه الخرائط حافزاً لابتكار أسلحة رياضية جديدة فى الفترة التى تلت . وفى عام ١٤٢٠ ميلادية بنى هنرى أمير تاج البرتغال مرصداً فى الجبال الواقعة عند أرض ساجرس الداخلة فى البحر والمنتهية عند رأس سنت فينست ، وهى أقصى نقطة فى جنوب غرب أوربا . وهنالك أيضا أنشأ مدرسة الملاحة كان أستاذها جاكوم الماجور كوسى ، وكرس أربعين سنة من حياته للدراسات الكونية كما نظم رحلات استكشافية مما جعله يلقب « هنرى الملاح » . وقد جند عدداً من مصورى العرب وفلكى اليهود ليعلموا قبطاناته وليساعدوهم فى قيادة السفن ، وليحضروا الخرائط والجداول والآلات اللازمة . ويقرر « بيتر نونس » أن كبار بحارة الأمير كانوا

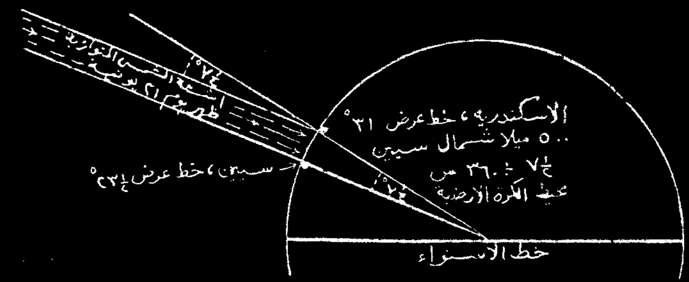
مجهزين بآلات ، وعلى دراية بقواعد الفلك والهندسة ، تلك القواعد التى يجب أن يلم بها كل من يريد أن يرسم مصورا . وعاد بذلك علم الفلك جزءا من الحياة اليومية يدفعه إلى التقدم نمو التجارة البحرية معززا باختراع الساعة والتلسكوب .

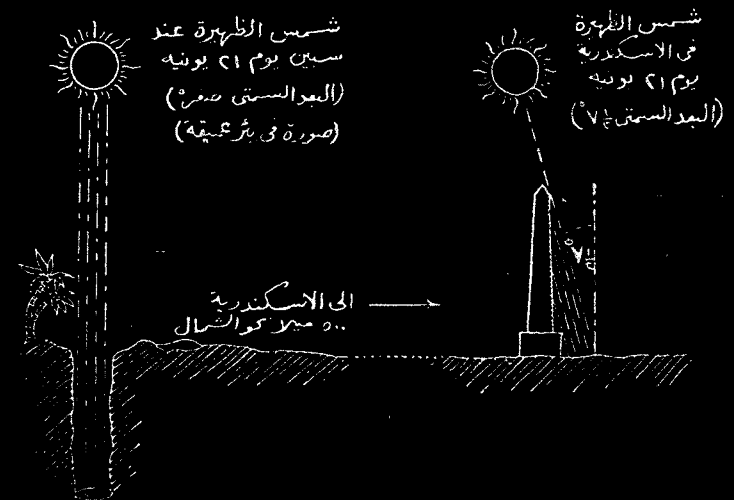
وقد تقدم علم « حساب الخرائط » وهو ما نسميه أحيانا « حساب المثلثات الكروية » تقدما كبيرا على يد العرب ، فى الفترة بين سقوط الحضارة الاسكندرية ونشوء البحرية الأوربية ولو أن جميع القواعد الأساسية لهذا العلم كانت موضوعة من قبل . ويحتمل أن يجد القارىء بعض الصعوبة فى هذا الباب إذا لم يكن أجرى تمرين ١٠ بالباب السادس .

والأبواب القادمة لا تعتمد على هذا الباب وقد أدخلناه هنا لكى يدرك القارىء كيف تقدمت الرياضة لتفى بحاجات الانسان العملية . وإذا كان للقارىء هواية النجارة لأمكنه أن يدرك كيف يطبق النظريات الرياضية فى حل المسائل الفلكية التى يجمع هو بنفسه المعلومات اللازمة لها بآلات يصنعها بنفسه وفى منزله .

رسم خرائط النجوم

عند الخروج فى نزهة خلوية نتعرف على الطريق بواسطة علامات مميزة تحيط به . هكذا يتعرف البحار على طريقه بواسطة النجوم . فإذا جنحت به السفينة إلى جزيرة مهجورة بعد مرض دام عدة أسابيع فإنه يستطيع أن يحدد ما اذا كان جنوب خط الاستواء أو شماله ، وذلك من مظهر السماء . فإذا كان شمال خط الاستواء فانه يستطيع أن يرى النجم القطبى وفى بعض أوقات السنة الدب الأكبر . أما إذا كان جنوبه فهو لا يرى النجم القطبى وإنما يرى صليب الجنوب وبروج أخرى لا يمكن رؤيتها عند خط عرض لندن أو نيويورك . فإذا كنا نقيم بمكان ما فى جنوب خط الاستواء فاننا لا نستطيع معرفة خط عرض ذلك المكان من ارتفاع النجم القطبى كما هو موضح فى الباب الرابع ، وذلك لأنه لا يوجد نجم لامع يضىء قريبا جداً فوق القطب الجنوبى . وخرائط النجوم التى بدأ برسمها الاسكندريون هى التى ترينا كيف نعين خط عرض أى مكان نقيم به بمعرفة احداثيات أى نجم ظاهر





تقع الشمس عند الظهر ... فوق خط طول الرصد مباشرة . وتقع الاسكندرية وسيين تقريبا على نفس خط الطول . وبذا تقع الشمس والمدينتان ومركز الكرة الأرضية فى مستو واحد .

لاتحجبه السحب التى كثيرا ماتحجب النجم القطبى . وباستخدام هذه الخرائط ومعرفة الزمن بدقة بتوقيت جرينتش يمكن للبحار أيضا أن يحدد خط طول المكان الذى وصلت اليه السفينة فى أى ساعة من الليل بمعرفة موضع أى نجم . فهو إذن ليس فى حاجة إلى أن ينتظر إلى ظهر كل يوم ليحدد موضع سفينته .

وتمثل الأمكنة المختلفة على سطح الكرة الأرضية بنقط تقاطع مجموعتين من الدوائر ، احداهما دوائر عظمى — أى دوائر انصاف اقطارها نصف قطر

الكرة الأرضية — تتقابل جميعها عند القطبين ، وهى خطوط الطول التى تعد على حسب الزوايا التى تصنعها مع بعضها عند القطبين عند ما ينظر إلى الكرة من أعلا أو من أسفل ، أو بما يكافىء ذلك ، على حسب نسب الاجزاء المقطوعة بها من محيط دائرة الاستواء (أو محيط أى دائرة يوازى مستواها مستوى دائرة الاستواء) . فمثلا الزاوية عند القطب المحصورة بين خطى طول ١٥° غربا ، ٤٥° غربا هى نفسها الزاوية التى يقبلها قوس ، من دائرة توازى دائرة الاستواء ، يساوى $\frac{٤٥ - ١٥}{٣٦٠} = \frac{١}{١٢}$ من محيط هذه الدائرة . عند مركزها . أما المجموعة الثانية فهى دوائر صغرى[1] هى خطوط العرض التى تعد على حسب الزاوية التى بين أى نقطة على محيط دائرة خط العرض ومركز الكرة الأرضية ، والنقطة التى تقع على دائرة الاستواء على نفس خط طول النقطة التى على محيط دائرة خط العرض ، فمثلا الزاوية بين خطى عرض ١٥° شمالا ، ٤٥° شمالا هى نفسها الزاوية التى يقبلها عند مركز الكرة الأرضية قوس يساوى $\frac{١}{١٢}$ من محيط دائرة خط طول (أو دائرة الاستواء نفسها) ودوائر العرض هى تقاطع الكرة الأرضية مع مستويات عمودية على المحور الذى تدور حوله أى المحور الذى تبدو الشمس والنجوم كأنها تدور حوله . ودوائر الطول هى تقاطع الكرة الأرضية مع مستويات تمر بالقطبين .

وقد نشأت هذه الطريقة لتخطيط الكرة الأرضية عند ما اكتشف أن النجوم الثابتة تبدو جميعها كأنها تدور بسرعة واحدة فى أقواس دائرية تقع فى مستويات متوازية متعامدة مع الخط الواصل من عين الراصد إلى القطب فى السماء (أى على وجه التقريب النجم القطبى فى نصف الكرة الشمالى) . ويختلف ارتفاع هذا الخط فوق الأفق (وهو كما رأينا بالباب الرابع ، خط عرض الراصد) باختلاف المكان . فهو يزيد كلما نبحر شمالا أى نحو النجم القطبى وينقص كلما نبحر جنوبا أى بعيداً عن النجم القطبى . وعند أى مكان يكون نفس النجم دائماً على ارتفـــاع ثابت فوق القطب . وإذن يصنع نفس

---

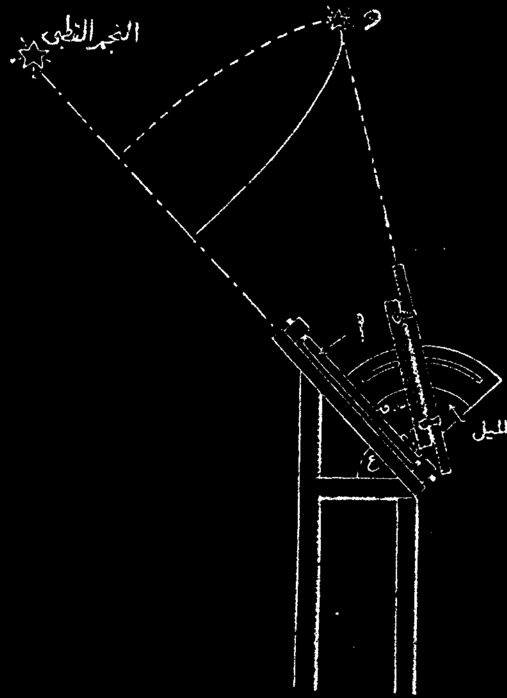
(١) بمعنى دوائر خطوط العرض (صفر° أى خط الاستواء) دائرة عظمى [illegible] قطرها مر بنصف قطر الكرة الأرضية .

الزاوية مع سمت الرأس كلما يعبر مستوى الزوال . وتتضح الحقيقة أن النجوم تبدو كأنها تتحرك فى أقواس دائرية تقع فى مستويات متوازية متعامدة مع المحور القطبي من حقيقة أخرى هى أن الفرق بين البعدين السمتيين الزواليين ، لأى نجم ، عند مكانين معينين يساوى الفرق بين ارتفاعى القطب عند هذين المكانين . ويمكن التأكد من ذلك بتثبيت سهم متجه نحو القطب السماوى وتثبيت تلسكوب (أو أنبوبة قصيرة من الصلب) بحيث يمكن تحريكه أى زاوية حول السهم كمحور (شكل ١٠٨) . فإذا جعلنا التلسكوب يميل بزاوية معينة بحيث يشير إلى نجم معين فإنه يمكننا أن نتتبع حركة النجم أثناء الليل بتحريك التلسكوب حول محوره بدون خفضه أو رفعه . وإذا كان التلسكوب مجهزاً بجهاز دقيق لتعيين الزمن بحيث انه يتحرك ٣٦٠° فى اليوم النجمى (أى الزمن الذى يمضى بين عبور أى نجم مستوى الزوال مرتين متتاليتين) فإنه يشير دائماً إلى نفس النجم .

والحقيقة أن أى نجم معين يعبر مستوى الزوال قبل أو بعد أى نجم معين آخر بعدد ثابت من الدقائق ؛ قد أوحت إلى قدماء الفلكيين بأن النجوم منتشرة على دوائر عظمى ثابتة تتقاطع جميعها عند القطبين السماويين .

يمكننا إذن تحديد موضع معين لكل نجم على الكرة السماوية ، بنقطة تقاطع دائرتين (شكل ١٠٩) ، إحداهما دائرة عظمى هى دائرة مطلع المستقيم للنجم (وتناظر دائرة الطول) تقطع جميع الدوائر المماثلة عند القطبين السماويين ، والأخرى دائرة صغرى هى دائرة الميل (وتناظر دائرة العرض) تقع فى مستوٍ عمودى على المحور القطبي . وتعد دوائر الميل بطريقة مماثلة لتلك التى تعد بها دوائر العرض أى بالزاوية التى يقبلها عند مركز الكرة الأرضية قوس خط الزوال المحصور بين نقطتى تقاطعه مع دائرة الميل ودائرة المعدل (heavenly equator) ، (شكل ١١٠) . وما نسميه المحور القطبي للكرة الأرضية ماهو إلا المحور الذى تبدو النجوم كأنها تدور حوله ، وإذن ما نسميه مستوى دائرة الاستواء ماهو إلا مقطع الكرة الأرضية بمستوى دائرة المعدل .

والخط الذى يصل الراصد بمركز الكرة الأرضية (أنظر الباب الرابع) يمر



شكل (١٠٨)

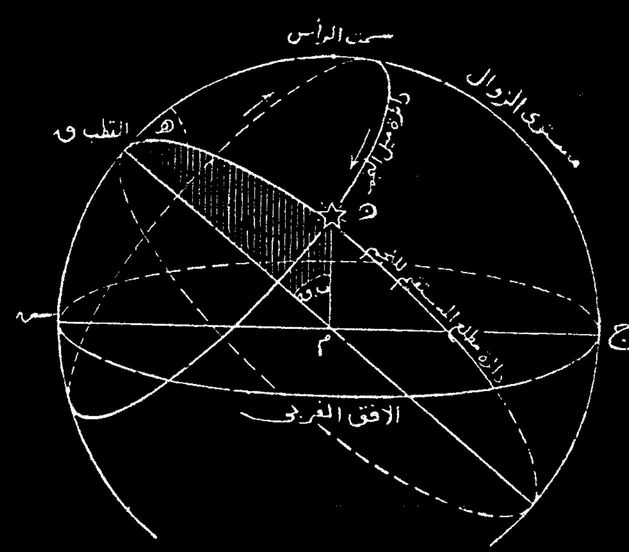
تلسكوب اعتدالى بسيط يتركب من قطعة من الخشب وقطعة أنبوبية من الحديد . وتتحرك الانبوبة الحديدية حول محور ا مثبت بحيث يميل بزاوية ع (خط عرض المكان) نحو الشمال . ويمكننا تحويل التلسكوب وهو يميل بزاوية ب.ق ، البعد القطبي للنجم ، أى ٩٠° — الميل ، حول ا كلما يتحرك النجم بحيث نرى النجم دائماً .

بسمت رأس الراصد قاطعا دائرة العرض ودائرة ميل مناظرة فى السماء . وأى نجم على دائرة الميل هذه ، يمر فوق الراصد عند أى نقطة على دائرة العرض المناظرة ، مرة كل ٢٤ ساعة . وعلى ذلك عند ما رسمت خرائط النجوم بهذه الكيفية لتكون دليلا لنا فى الملاحة أصبح من السهل رسم الخرائط الجغرافية بكيفية مماثلة .

ويهمنا أن ندرك أن رسم خرائط النجوم بهذه الكيفية يجعلنا نعلم الاتجاه الذى نصوب فيه التلسكوب لنرى هذه النجوم . وموضع النجم كما هو موضح على خريطة النجم ليس له علاقة ما ببعد النجم عنا . وإذا لحرنا فى الأرض ق

الاتجاه الذى يعينه الشاقول فإننا نصل حتماً إلى مركز الكرة الأرضية . ويبدو قاع بئر عميق للناظر من مركز الكرة الأرضية — إذا أمكن ذلك — أنه على استقامة القمة — فالقاع له نفس خط العرض ونفس خط الطول مثل القمة مع أنه ليس هكذا بعيداً عن مركز الكرة الأرضية . وخط عرض وخط طول منجم ما هما نفسهما خط عرض وخط طول الموضع الذى يقابل عنده الخط الواصل من قاع المنجم إلى مركز الكرة الأرضية ويمتد إلى أعلى ، سطح الكرة الأرضية . بالمثل يعين ميل النجم ومطلع مستقيمه الموضع الذى يقابل عنده الخط الواصل من مركز الكرة الأرضية إلى النجم ، سطح كرة تخيلية يمتد نصف قطرها إلى أبعد النجوم . وفى الكسوف الكلى يكون للشمس والقمر نفس الميل ونفس مطلع المستقيم — تماماً كما يكون لقمة وقاع المنجم نفس خط العرض ونفس خط الطول — أى أن الشمس والقمر يكونان على استقامة واحدة مع مركز الكرة الأرضية ، تماماً كما تكون قمة وقاع المنجم .

وعند الظهر ينطبق ظل الشمس على الخط الواصل بين نقطتى شمال وجنوب الأفق . وهـــذا الخط هو نفسه خط زوال الراصد الذى يصل بين القطبين الشمالى والجنوبى — أى خط طول الراصد — وتقع الشمس عند الظهر على قوس تخيلى هو خـــط الزوال السماوى الذى يمر بالقطب السماوى وسمت الرأس . ويقع القطب السماوى على استقامة قطب الكرة الأرضية ومركزها . كما يقع سمت الرأس (الباب الرابع) على استقامة الراصد ومركز الكرة الأرضية . وإذن خط الزوال السماوى ومركز الكرة الأرضية ، وخط طول الراصد يقعون جميعاً فى مستوٍ واحد بالفراغ (شكل ١١١) . وعند اللحظة التى تعبر عندها الشمس — أو النجم — مستوى الزوال تكون الشمس — أو النجم — فى أعلى موضع لها فى السماء ، وإذن يمكننا تطبيق قواعد الهندسة المستوية التى يتضح منها (شكلى ٦١ ، ٦٢) أن خط عرض الراصد يرتبط بعلاقة بسيطة للغاية بميل أى جسم سماوى وبعده السمتى . فبمشاهدة البعد السمتى لنجم عند عبوره مستوى الزوال يمكننا فى الحال إيجاد ميله إذا نحن علمنا خط عرض المكان الذى نحن به ، وبالعكس إذا علمنا ميل النجم فانه

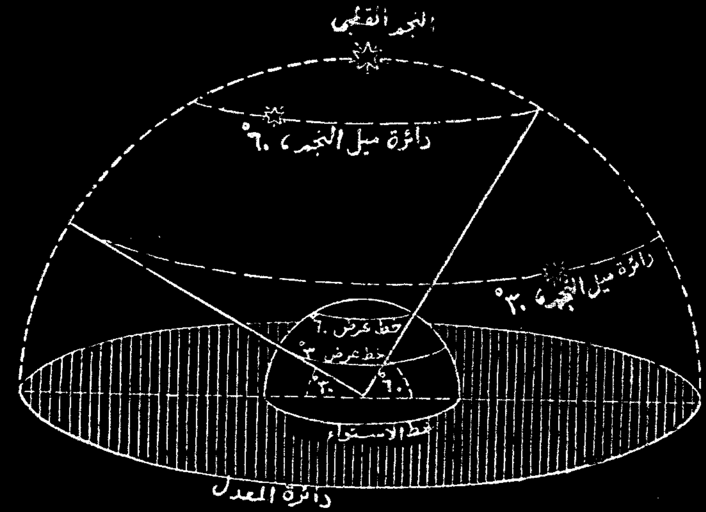


شكل (١٠٩) الحركة الظاهرية للكرة السماوية

يمثل موضع نجم ن على الكرة السماوية بنقطة تقاطع دائرة صغرى هى دائرة [illegible] التى تقيس ارتفاع نجم فوق دائرة المعدل ، مع دائرة عظمى هى دائرة مطلع المستقيم للنجم . وجميع النجوم التى تقع على نفس دائرة [illegible] تعبر مستوى الزوال على نفس البعد الزاوى من سمت الرأس . وتكون فوق أفق الراصد [illegible] ساعة . والقوس ق ن أى الزاوية [illegible] ق م ن تقيس بعد [illegible] عن محور القطب (بعد القطبى) وهو [illegible] ٩٠° — الميل . وجميع النجوم التى تقع على نفس دائرة مطلع المستقيم تعبر مستوى الزوال فى نفس اللحظة . والزاوية بين دائرتى مطلعى المستقيم [illegible] . والزاوية هـ بين مستوى الزوال ودائرة مطلع المستقيم للنجم هى الزاوية التى يتحركها النجم منذ عبوره مستوى الزوال . فاذا كانت هـ = ١٥° مثلا فان النجم يكون قد عبر مستوى الزوال منذ ساعة واحدة . تسمى هـ الزاوية الساعية للنجم . وإذا كانت الزاوية الساعية هـ° فان النجم يكون قد عبر مستوى الزوال منذ $\frac{هـ}{١٥}$ من الساعات .

يمكننا دائماً تعيين خط عرض المكان . وحيث أنه يوجد دائماً نجم ما بالقرب من مستوى الزوال فان ذلك يعنى أن البحّار يمكنه أن يوجد خط العرض عند أى لحظة أثناء الليل ، بالاستعانة بخريطة النجم أو بجداول تعطى ميل النجوم .

إذا كان النجم يعبر شمال سمت الرأس (شكلى ١١٢ ، ١١٣) عند مكان فى نصف الكرة الشمالى فان العبارة هى :



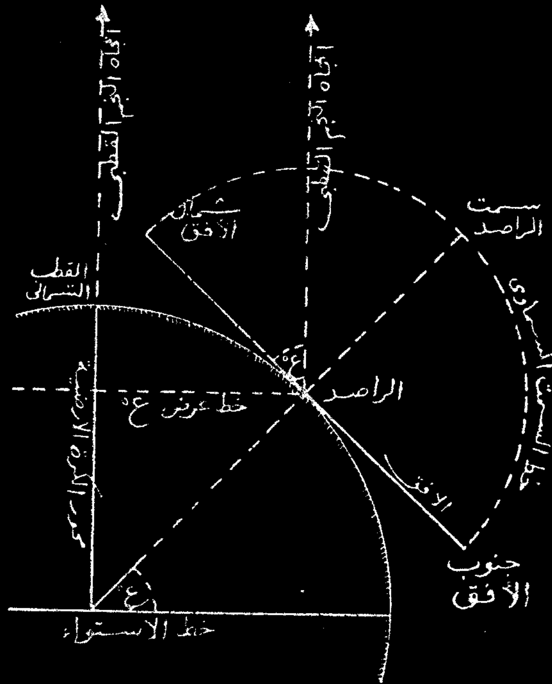
شكل (١١٠) دوائر العرض على سطح الكرة الأرضية ودوائر الميـــل على سطح الكرة السماوية (دوائر صغـــرى)

الميل = خط عرض الراصد + البعد السمتى عند عبور مستوى الزوال.

وإذا كان النجم يعبر جنوب سمت الرأس فإن العبارة هى :

الميل = خط عرض الراصد — البعد السمتى الزوالى .

والعبارة الأولى تكون صحيحة إذا عبر النجم شمال أو جنوب سمت الرأس، إذا نحن اعتبرنا الأبعاد السمتية مقاسة جنوب سمت الرأس سالبة واعتبرنا خط العرض مقيسا جنوب خط الاستواء أو الميل مقيسا جنوب دائرة المعدل سالبا . وخط عرض المكان هو نفسه ارتفاع القطب فوق الأفق (الباب الرابع) . وعندما لم يكن هناك نجم قطبي لامع كما فى عهد الإسكدريين كان يؤخذ متوسط ارتفاع أى نجم قريب من القطب عندما يكون فى أقصى ارتفاع له فوق مستوى الزوال وفى أسفل موضع تحته . الخط المستقيم الذى لا يقع فى مستو معين بالفراغ يقطع هذا المستوى على الأكثر فى نقطة واحدة . فالخط المستقيم الذى يمر بأكثر من نقطة واحدة فى نفس المستوى يقع بأكمله فى هذا المستوى كما تقع تلك النقطة التى يمر بها . والمستوى الذى يعينه خط طول

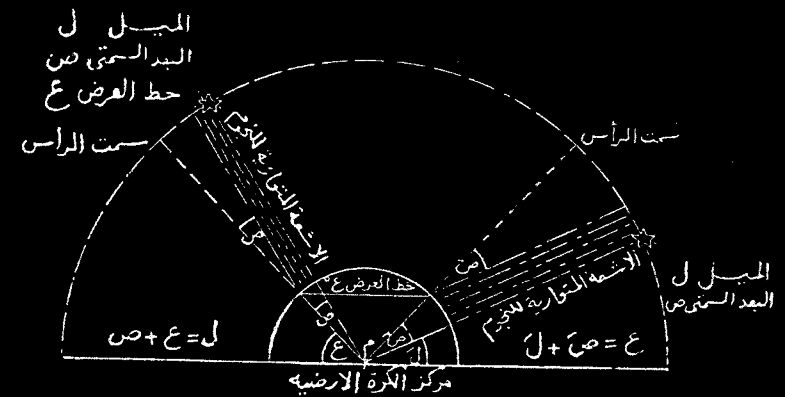


شكل (١١١) عند عبور النجم مستوى الزوال يقع النجم فى نفس المستوى مع الراصد وقطبى الكرة الأرضية وسمت الرأس ونقطتى شمال وجنوب الأفق ومركز الكرة الأرضية .

الراصد ومحور الكرة الأرضية يشمل مركز الكرة الأرضية والراصد وقطبى الكرة الأرضية . والخط الواصل بين سمت الرأس والراصد يمر أيضا بمركز الكرة الأرضية أى يمر بأكثر من نقطة واحدة فى هذا المستوى وإذن يقع بأكمله فى هذا المستوى . وشمال وجنوب الأفق هما تقاطع مستقيمات واصلة من خط الطول الى مركز الكرة الأرضية مع المستوى الأفقى ، فهما يقعان فى نفس المستوى مع هذه المستقيمات . وإذن شمال وجنوب الأفق وسمت الرأس والراصد يقع جميعها فى نفس المستوى مع مركز الكرة الأرضية وقطبيها .

والدائرة التى تقطع مستوى ولا تقع فيه تقطعه فى نقطتين . والدائرة التى تمر بشمال وجنوب الأفق وسمت الرأس تمـــر بأكثر من نقطتين فى نفس

المستوى وإذن تقع بأكملها فيه . وإذن أية نقطة على هذه الدائرة التخيلية (خط الزوال السماوى) تقع أيضا فى هذا المستوى .



شكل (١١٢)

نجمان فى النصف الشمالى من الكرة السماوية . يعبر أحدهما مستوى الزوال شمال سمت الرأس ويعبره الآخر جنوبه . إذا عبر النجم شمال سمت الرأس فإن الميل = خط عرض الراصد + البعد السمتى الزوالى . وإذا عبر النجم جنوب سمت الرأس فإن خط عرض الراصد = الميل + البعد السمتى الزوالى . أى أن الميل = خط عرض الراصد − البعد السمتى الزوالى .

كما سبق أن درسنا فى الباب الرابع خط عرض الراصد (م) هو الزاوية (ا) بين الأفق والقطب السماوى (ن) ، أى الزاوية م ن س . وإذن إذا كان النجم (ا) يعبر شمال سمت الرأس فإن :

ر م ن = ا م ن + البعد السمتى

وبما أن ميل النجم هو الزاوية التى يصنعها النجم مع دائرة المعدل التى تتعامد مع المحور القطبي فإن :

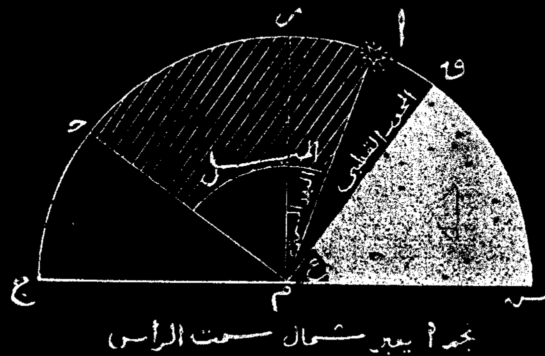
الميل = ٩٠° − ا م ن

= ٩٠° − (ر م ن − البعد السمتى)

= ٩٠° − (٩٠° − خط العرض) + البعد السمتى

∴ الميل = خط العرض + البعد السمتى .

وإذا كان النجم (ب) يعبر جنوب سمت الرأس فإن :

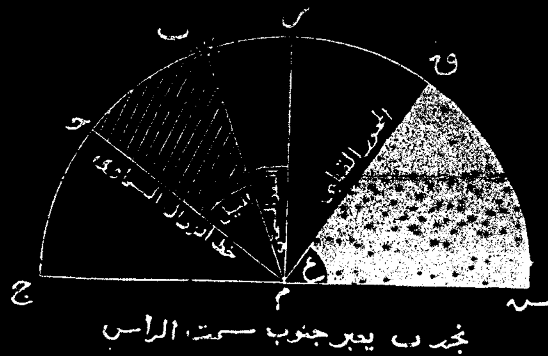


نجم ا يعبر شمال سمت الرأس

شكل جزئى من (١١٣)

الميل + البعد السمتى = ٩٠° − ر م ن = ٩٠° − (٩٠° − خط العرض)

∴ الميل = خط العرض − البعد السمتى



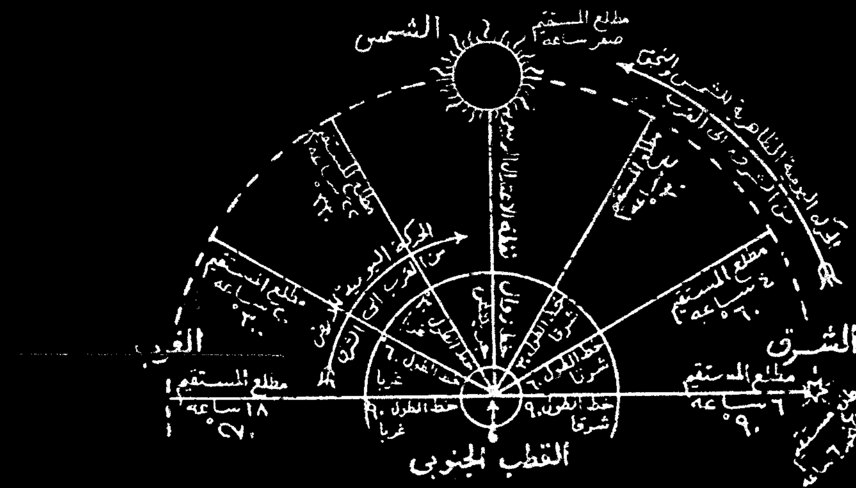
نجم ب يعبر جنوب سمت الرأس

شكل جزئى من (١١٣)

شكل (١١٣) خط عرض والميل والبعد السمتى عند عبور مستوى الزوال .

وكما يمكننا ايجاد خط عرض مكان ما بمشاهدة البعد السمتى لأى نجم عند عبوره مستوى الزوال ، إذا علمنا ميل النجم من خريطة النجوم ، يمكننا أيضا ايجاد خط طول المكان بمشاهدة أوقات عبور أى نجم مستوى الزوال ، إذا

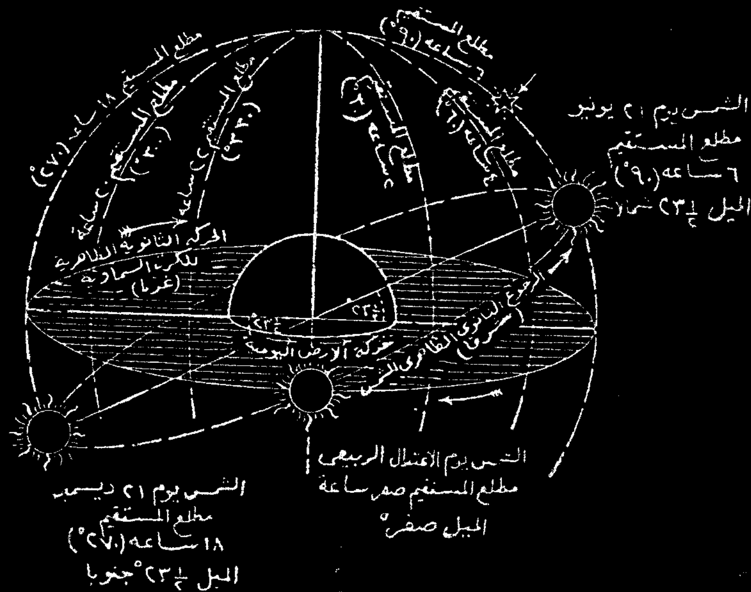
علمنا مطلع المستقيم للنجم (أشكال ١١٤ ، ١١٥ ، ١١٦) ، من خريطة النجم ؛ وكان لدينا كرونومتر يعطينا الوقت الرئيسى . وتعد دوائر خطوط الطول بالدرجات من صفر إلى ١٨٠° شرق وغرب خط زوال جرينتش الرئيسى (صفر°) . ويقاس مطلع المستقيم دائماً شرق خط الزوال السماوى الذى تقع عليه نقطة الاعتدال الربيعى التى هى جرينتش السماوية ويرمز لها بالرمز الفلكى ♈ ، وهى الموضع الذى تشغله الشمس عند الاعتدال الربيعى (٢١ مارس) . وتبدو الكرة السماوية أنهـــا تدور ٣٦٠° كل ٢٤ ساعة ، ولذلك نفضل أن نعد دوائر مطلع المستقيم بالساعات والدقائق من صفر إلى ٢٤ ساعة ، وحيث أنها تبدو أنها تدور من الشرق إلى الغرب فإن النجم الذى يكون مطلع المستقيم له ٢١ : ١٣ (دقيقة ساعة) (مثل السماك الأعزل أحد كوكبات السنبلة) يعبر مستوى الزوال بعد ٢١ : ١٣ (دقيقة ساعة) من وقت عبور الشمس عند نفس المكان ، يوم الاعتدال الربيعى . أى أن النجم يعبر مستوى الزوال الساعة ٢١ : ١ صباحاً . بالتوقيت



شكل (١١٤)

الظهر عند جرينتش يوم ٢١ مارس — توضيح العلاقة بين مطلع المستقيم وخط الطول والزمن .

المحلى . وإذا كان الزمن بتوقيت جرينتش ، عند العبور هو ٢١ : ١٠ مساءاً فأننا نفهم من ذلك أن الزمن عند الراصد يسبق الزمن عند جرينتش بثلاث ساعات وأن عند ظهر جرينتش يكون الزمن بالتوقيت المحلى عند الراصد ٣ مساءاً . وإذن فخط طول الراصد (انظر شكل ٦٣) هو ٣ × ١٥° = ٤٥° شرق جرينتش .

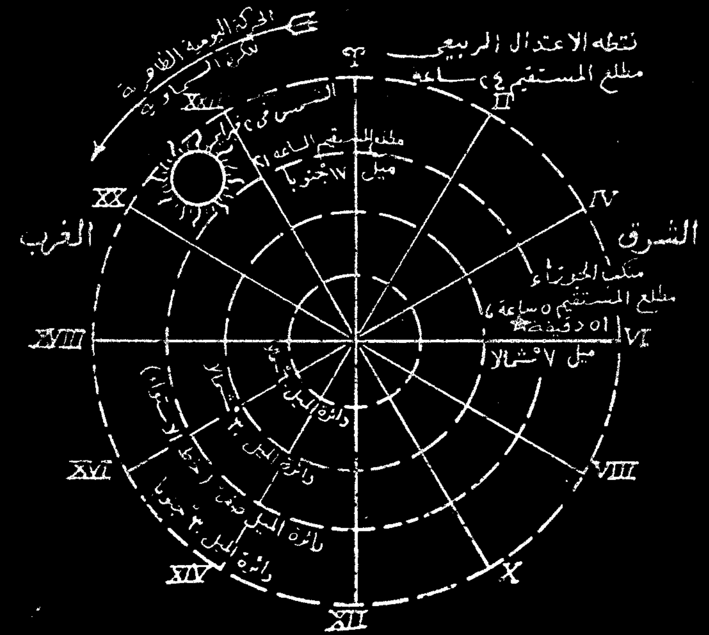


شكل (١١٥)

يعبر النجم الموضح (حيث مطلع المستقيم ٦ ساعات) مستوى الزوال عند الظهر تماماً يوم ٢١ يونيو ، ويعبر في منتصف الليل يوم ٢١ ديسمبر . أى أنه نجم شتوى مثل منكب الجوزاء .

وعند الظهر يكون مطلع مستقيم الشمس ، عند العبور ، فى الكرة السماوية فى نفس مستوى خط طول الراصد . فإذا كان الراصد ٣٠° غرب جرينتش فإن الكرة الأرضية يجب أن تدور ٣٠° أى $\frac{1}{12}$ من الدورة الكاملة ، لمدة ساعتين قبل أن يصبح زوال الراصد فى مستوى زوال الشمس ، أو أن الشمس يجب أن تبدو أنها تدور ٣٠° قبل أن يصبح زوالها فى مستوى زوال الراصد . وإذن فظهر الراصد يكون بعد ظهر جرينتش بمدة ساعتين .

والساعة المضبوطة بتوقيت جرينتش تسجل الساعة الثانية مساءا عندما تعبر الشمس مستوى زوال الراصد أى عند الظهر المحلى للراصد. وإذا كان مطلع المستقيم للشمس يساوى صفراً يوم ٢١ مارس فإن النجم الذى يكون مطلع المستقيم له ٦ ساعات يعبر مستوى الزوال الساعة السادسة مساءاً بالتوقيت المحلى. وإذا عبر النجم الساعة الثامنة مساءاً بتوقيت جرينتش فإن ساعة الراصد تكون متأخرة ساعتين بالنسبة إلى ساعة جرينتش وإذن فخط طول الراصد هو ٣٠° غربا. ويوضح الشكل حركة النجوم ضد عقرب الساعة عند النظر نحو الشمال بالقرب من القطب الجنوبى.



شكل (١١٦)

خريطة نجم (أى خريطة تمثل شكلا فراغياً على قطعة مسطحة من الورق). تبين العلاقة بين مطلع المستقيم والزمن المحلى للعبور.

إذا كان مطلع المستقيم للشمس هو س فإن الشمس تعبر بعد س من الساعات بعد نقطة الاعتدال الربيعى γ (مطلع المستقيم صفر). وإذا كان

مطلع المستقيم للنجم ص فإنه يعبر بعد ص من الساعات بعد γ. وإذن يعبر النجم بعد الشمس بمقدار ص — س من الساعات وإذن فالزمن المحلى للعبور هو (ص — س). أى أن

مطلع المستقيم للنجم — مطلع المستقيم للشمس = الزمن المحلى للعبور.

وقد يكون الفرق سالبا كما فى المثال الموضح فى الشكل حيث الزمن المحلى للعبور = — ٩ : ١٥ أى ١٥ ساعة، ٩ دقائق قبل الظهر، أى ٨ ساعات، ٥١ دقيقة بعد الظهر (٨ : ٥١ مساءاً). ويوضح الشكل أن الشمس تعبر قبل γ بثلاث ساعات، وان النجم يعبر بعد γ بخمس ساعات، ٥١ دقيقة، ومنها

الزمن المحلى للعبور هو ٥١ ٨ (دقيقة ساعة) والاتجاه هو كما فى شكل ١١٤.

وفى الأوقات الأخرى من السنة علينا أن نأخذ فى الاعتبار أن موضع الشمس بالنسبة إلى الأرض والنجوم الثابتة يتغير بمقدار ٣٦٠° أى بمقدار ٢٤ ساعة من ساعات مطلع المستقيم، كل ٣٦٥¼ يوما، والقيمة المضبوطة لمطلع المستقيم للشمس فى كل يوم من أيام السنة معطاة فى التقاويم الفلكية التى تقيم الحكومات الحديثة من أجلها مراصداً عامة. وبدون استخدام الجداول يستطيع الراصد أن يحسب الزمن بالتقريب مقيسا من الظهر المحلى كما يأتى (أنظر شكل ١١٦). بما أن النجوم تعبر مستوى الزوال مبكرة قليلا كل مساء: تبدو الشمس كأنها تتقهقر نحو الشرق ويزيد مطلع مستقيمها بمعدل $\frac{٣٦٠}{٣٦٥}$ = ١° أى $\frac{١}{١٥}$ من الساعة (٤ دقائق) بوحدات الزمن، فى كل يوم. ولنفرض أن منكب الجوزاء يعبر عند لحظة ما يوم أول مارس. وإذن فالشمس عليها أن تتقهقر ٢٠ يوما نحو الشرق قبل أن تصل نقطة الاعتدال الربيعى أى أنها تعبر مستوى الزوال قبل نقطة الاعتدال الربيعى بمدة ٨٠ دقيقة (٢٠ ١ دقيقة ساعة). فإذا كان مطلع المستقيم لمنكب الجوزاء هو ٥١ ٥ (دقيقة ساعة) فهو يعبر مستوى الزوال بعد γ بمدة ٥ ساعات، ٥١ دقيقة، وإذن يعبر بعد الظهر بمدة ٢٠ ١ + ٥١ ٥ = ١١ ٧ (دقيقة ساعة) وإذن فالزمن المحلى هو ٧ : ١١

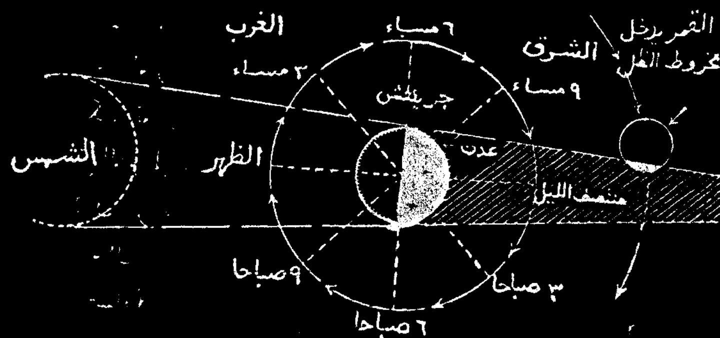
مساءاً [١]. ويتغير ميل الشمس من + ٢٣½° عنـد الانقلاب الصيفى إلى — ٢٣½° عند الانقلاب الشتوى. ومن التقويم الفلكى البريطانى (أى تقويم ويتكر) الذى يعطى الميل يستطيع الراصد أن يوجد خط العرض بمعرفة البعد السمتى للشمس عند ظهر أى يوم من أيام السنة أو بمعرفة البعد السمتى لأى نجم عند عبوره مستوى الزوال.

وعندما نطل من نافذة قطار متحرك على قطار ثابت فاننا لانستطيع التأكد بعد المرور بالقطار الثابت ما إذا كان قطارنا وحـده هو المتحرك أم القطار الثانى وحده المتحرك أم القطاران متحركان بالنسبة إلى ماعلى جانبيهما. بالمثل لايوجد لأول وهلة ما يدلنا على أن الكرة السماوية تدور يوميا والشمس تتقهقر سنويا حول الكرة الأرضية، أم أن الأرض تدور يوميا حول محورها وتتحرك سنويا فى مدارها حول الشمس. وحيث أن النجوم تبعد عنا بمراحل شاسعة فان عملياتنا الحسابية تكون صحيحـة فى الحالتين. ووجهة النظر التى أخذ بها هيباركس والعرب تكون أبسط من غيرها لأغلب الأغراض العملية، إلا أنها ليست الأسهل عندما ندرس نوعا آخراً من الأجسام السماوية. إذا عبر نجم مستوى الزوال بعد الظهر بعدد معين من الساعات والدقائق فانه يعبره فى نفس اللحظة بعد مضى سنة كاملة عندما تعود الشمس إلى نفس الموضع بالنسبة إلى النجم والأرض. ليس هذا صحيحا فى حالة الكواكب التى تغير مواضعها بالنسبة الى النجوم فيكون مطلع مستقيم الكواكب وميله غير ثابتين. وقد لفتت الكيفية التى تتغير بها مواضع الكواكب أنظار الفلكيين منذ عهد قديم لأسباب عديدة، أحدها هو أن الكواكب جميعها تسير بالقرب من الحلقة الدائرية التى تدور فيها الشمس والقمر. وفى أوقات معينة من السنة يكون لها نفس مطلع المستقيم للقمر. فاذا كان ميلها عندئذ لايختلف عن ميل القمر بأكثر من ½° فإنها تكسف أو

(١) للتبسيط لا نذكر شيئاً عن إجراء التصحيح المسمى «معادلة الزمن» المشروح بالتفصيل فى التقويم الفلكى. وتوقيت الإذاعة (بلندن) هو توقيت جرينتش المتوسط، مضافاً إليه ساعة فى الصيف. الذى يختلف عن توقيت جرينتش المحلى بدقائق قلائل يختلف عددها باختلاف أيام السنة. ويستخدم التوقيت المتوسط لأن اليوم الشمسى (من الظهر إلى الظهر) يختلف طوله باختلاف أيام السنة ولا يمكن صنع ساعة تساير هذا اليوم الشمسى. فاليوم الشمسى المتوسط هو أساس قياس الزمن ويؤجل أو يقدم موعد الظهر دقائق معدودة باختلاف الفصول، وقد دونت هذه الفروق فى جداول خاصة بها.

تختفى وراء القمر. وقد شوهدت هذه الظواهر منذ عهد بعيد، ولما لم تكن توجد وقتئذ ساعات يمكن حملها، كانت السماء — وفيها القمر أو أى كوكب كساعة يد — الساعة الوحيدة التى يمكن بواسطتها تمييز نفس اللحظات فى أماكن متباعدة على سطح الكرة الأرضية، وقد استخدم أولا الكسوف والاختفاء وخاصة الخاص منه بالقمر. وبهذه الطريقة أمكن معرفة أن الظهر لم يكن واحداً فى جميع الأمكنة. ولما عملت جداول بمواضع القمر أمكن استخدام بعد القمر الزاوى عن أى نجم لامع.

وقبل اختراع الكرونومتر لم تكن توجد طريقة عملية يعين بها البحار خط الطول إلا باستخدام موضع القمر. وأغلب الطرق معقدة للغاية إلا تلك التى تعتمد على خسوف القمر والتى قد انتهينا من شرحها. وتلك هى الطريقة التى تمكن بها ريان كولمبس، اميريجو فيسبوكى وميلان، الذين درسوا فلكيات العرب، من تحديد موضع أمريكا على خريطة الدنيا (شكل ١١٦ (أ)) فالمعرفة الدقيقة



شكل (١١٦) (أ) إيجاد خط الطول باستخدام خسوف القمر.
قبل اختراع معرفة الزمن المحلى بواسطة الكرونومتر اعتمد تقدير خط الطول على مشاهدة الفترة الزمنية بين الظهر وعلامة سماوية مثل خسوف القمر أو اختفاء كوكب أو نجم خلف قرص القمر. وقد كانت تلك الفترة تقاس بواسطة ساعات زجاجية أو ساعات غير دقيقة لا يمكن أن تحافظ على الزمن المضبوط أثناء رحلة طويلة. والفكرة الأساسية فى هذه الطريقة موضحة فى هذا الشكل [illegible] المرسوم بنفس الكيفية مثل شكل ١١٤ حيث يقع القطب الجنوبى بالقرب من الراصد. ونرى فى الشكل خطى زوال عدن وجرينتش عند اللحظة التى يبدأ عندها حدوث خسوف القمر. فإذا كنا نطالع فى التقويم الفلكى أن الخسوف يبدأ الساعة ٦ مساء بتوقيت جرينتش وقد شاهدنا الخسوف [illegible] عدن بعد تسع ساعات من الظهر المحلى (أى الساعة ٩ مساءاً بتوقيت عدن) فإننا ندرك أن توقيت عدن يسبق توقيت جرينتش بثلاث ساعات وأن عدن إذن تقع ٤٥° شرق زوال جرينتش.

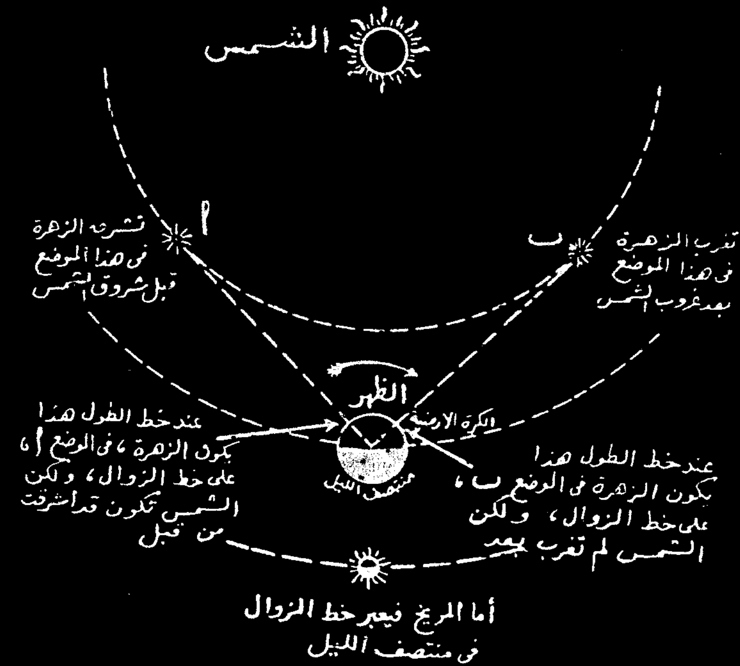
لمواضع الكواكب كانت مسألة ذات قيمة عملية هامة فى عهد تقدمت فيه الملاحة عندما أوضح كوبرنيك وكبلر أنه يمكن حساب مواضعها بدقة وبساطة أكثر إذا نحن تجاهلنا وجهة نظر الكهنة الفلكيين .

وعند دراسة حركة الكواكب لا نجد نفعاً من الهندسة المستوية التى سبق دراستها لسبب بسيط للغاية يمكن إدراكه إذا نحن اعتبرنا حركة كوكب الزهرة . فى إحدى ليالى السنة نجد أن الفرق بين مطلع المستقيم للشمس ومطلع المستقيم لنجم ثابت معين هو ١٢ ساعة ، وإذن فالنجم يعبر مستوى الزوال فى منتصف الليل . فى مثل هذه اللحظة تكون الكرة الأرضية والقطبان السماويان فى نفس مستوى الشمس والنجم . أما الزهرة فهو لا يعبر مستوى الزوال بعد الظلام فهو يرى دائماً وهو يغرب بعد غروب الشمس مباشرة ويشرق قبل شروق الشمس مباشرة (شكل ١١٧) . ومن وجهة النظر الحديثة أى وجهة نظر كوبرنيك يرجع ذلك إلى أن الزهرة يدور بين الشمس والأرض ، فعندما تصبح الأرض بعيدة عن الشمس لا يصبح الزهرة منظوراً إلا بعد أن يعبره مستوى زوالنا . وعندما تقترب الأرض من الشمس فان الزهرة يصبح غير منظور بالعين العارية لأن الشمس تشرق قبل أن يصل اليه مستوى زوالنا . وإذن لا يمكننا تعيين مطلع مستقيم وميل الزهرة ومعرفة كيفية تغيرهما بإيجاد بعده السمتى الزوالى والزمن عندئذ . ولكن يمكننا حسابهما بإيجاد بعده السمتى عند ما يكون موضعه فى الكرة السماوية قد تحرك ظاهرياً زاوية معينة من مستوى الزوال ، إذا نحن استخدمنا نوعاً آخر من الهندسة فى إجراء العمليات الحسابية .

لقد رأينا كيف تمثل مواضع النجوم على الكرة السماوية بواسطة دوائر صغرى ، هى دوائر الميل ، توازى دائرة المعدل ، ودوائر عظمى ، هى دوائر مطلع المستقيم ، تتقاطع عند القطبين السماويين . ومثل هذه الخرائط تكون صحيحة عند جميع الأمكنة وتوافق كل وقت من السنة[1]. بالمثل يمكننا عند أى

(١) هذه العبارة الأخيرة صحيحة على وجه التقريب فقط . إذ تحتاج إلى عدة تعديلات ، أكثرها أهمية ما يتعلق بظاهرة تقهقر الاعتدالين التى اكتشفها علماء الفلك البابليون . فمحور دوران الكرة الأرضية يغير اتجاهه ببطء بمرور القرون بحيث أن النجم القطبى الحالى ، أى النجم الذى يقع مباشرة فوق القطب الشمالى لم يكن النجم القطبى أيام الفراعنة الذين شيدوا الأهرامات .

لحظة معينة وفى أى مكان خاص ، تمثيل مواضع النجوم بدوائر صغرى ، هى دوائر الارتفاع ، توازى دائرة الأفق ، ودوائر عظمى هى الدوائر السمتية ، تتقاطع عند سمت الرأس (شكل ١١٨) .



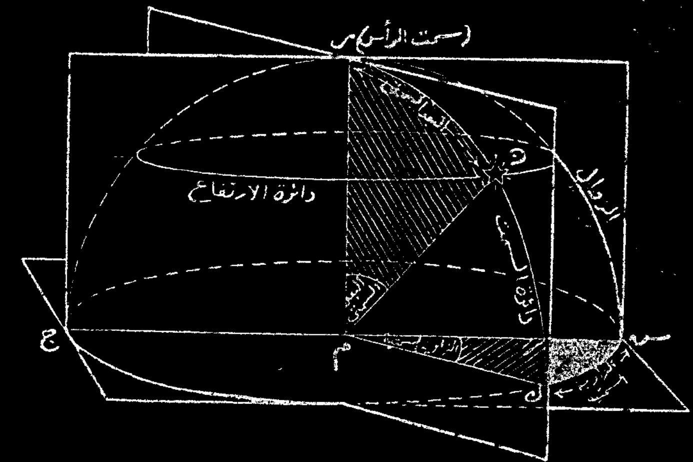
شكل (١١٧)

الكوكبان عطارد والزهرة يعبران دائماً مستوى الزوال قبل أن يصبحا ظاهرين ، أو لا يصلان إلى مستوى الزوال قبل أن يكونا قد اختفيا . وفى هذا الشكل يقع القطب الجنوبى للكرة الأرضية نحو القارىء .

وتعد دوائر الارتفاع حسب ارتفاعها الزاوى فوق المستوى الأفقى تماما كما تعد دوائر الميل أو دوائر العرض بارتفاعها فوق مستوى خط الاستواء . وتعد الدائرة السمتية بالدرجات ابتداء من خط الزوال بتوصيل طرفى القوس المقطوع على دائرة الأفق بين خط الزوال والدائرة السمتية إلى الراصد ، أى بنفس الكيفية التى تعد بها دائرة الطول بالزاوية التى يقبلها قوس خط الاستواء المقطوع بين خط الطول وخط زوال جرينتش ، عند مركز الكرة

الأرضية . وإذن تقاس الزاوية السمتية للنجم شرقا أو غربا ابتداءاً من خط الزوال .

وإذا ركّبنا الاسترولاب المنزلى أو الثيودوليت الموضح فى شكل ١١٩ بحيث يدور رأسيا فوق قاعدة مدرجة بحيث يشير الصفر إلى الجنوب أو الشمال ، فان الزاوية السمتيه للنجم هى الزاوية التى يتحركها المنظار (أى التلسكوب) فوق القاعدة . ونحصل على الارتفاع بطرح البعد السمتى من ٩٠° ، فاذا كانت المنقلة مدرجة من صفر إلى ٩٠° ومن ٩٠° الى صفر فانه يمكننا قراءة الارتفاع مباشرة .

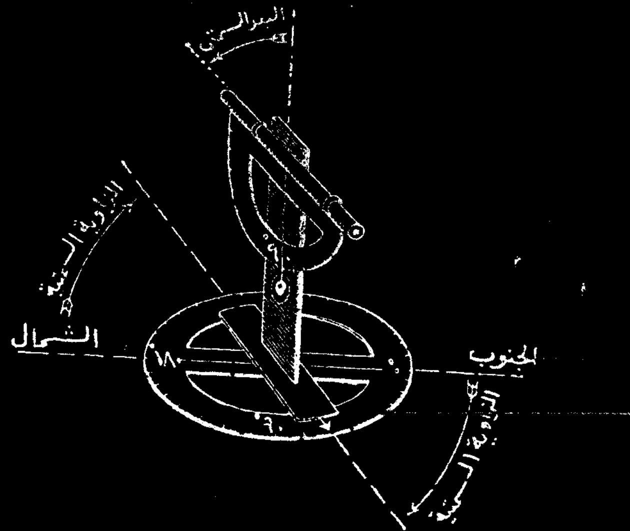


شكل (١١٨) الإحداثيان المحليان للنجم

الإحداثى الأفقى هو الارتفاع أى ٩٠° – البعد السمتى . ويقاس البعد السمتى بالقوس ص ... أو الزاوية المستوية ... ص فى مستوى الدائرة السمتية . والإحداثى الزوالى هو الزاوية السمتية وتقاس بالقوس ش ل أو الزاوية المستوية ش م ل ، أى الزاوية بين مستوى الزوال ش ... ج ومستوى الدائرة السمتية ... ل .

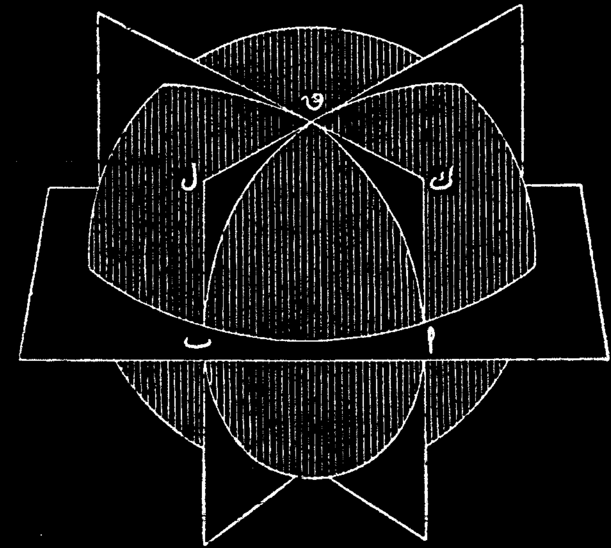
وإذا ثبتنا التلسكوب نحو نجم وأدرناه بعد قليل إلى حيث نرى النجم ثانيا فإننا نرسم قوسا على سطح الكرة السماوية يشبه مسار سفينة على سطح البحر . وإذا فكرنا مليا فى الطريقة التى تبحر بها سفينة فإننا ندرك أن السفينة لا تبحر على خطوط إقليدس المستقيمة ، بل تبحر على أقواس دائرية على سطح الكرة

الأرضية ، وأقصر قوس يمكن رسمه بين نقطتين هو أقلها تحدبا ، فهو إذن القوس الذى يكون أكبرها قطراً . أى قطره يساوى قطر الكرة الأرضية نفسها . وإذن ، فى الملاحة ، أقصر بعد بين نقطتين ليس هو خط إقليدس المستقيم بل الدائرة العظمى التى تمر بهما . وإذا أبحرت سفينتان من ا إلى ب إحداهما فى الطريق المباشر من ا إلى ب والثانية بدون تغيير خط عرضها حتى تصل خط طول ب ثم بدون تغيير خط طولها حتى تصل ب فإن الطريقين يكونان شكلا له ثلاثة أضلاع هى ثلاثة أقواس دائرية . بالمثل عندما يبدو نجم أنه يتحرك فى السماء على دائرة ميله علينا أن نحرك العين أفقيا فى قوس زاوية الارتفاع ورأسيا فى قوس الزاوية السمتية حتى تتتبع حركته . والحركة الظاهرية للنجم وحركة العين أو حركة التلسكوب ترسمان مثلثا فى قبة السماء أضلاعه مقوسه . وللوصول إلى أى نقطة فى السماء يجب أن يدور النجم حول المحور القطبى زاوية خاصة بعيداً عن خط الزوال بينما يكون التلسكوب قد دار زاوية معينة حول المحور السمتى . ويكون النجم قد دار زاوية خاصة



شكل (١١٩) استرولاب منزلى لقياس الزاوية السمتية والبعد السمتى أو ارتفاع النجم .
يتركب الجهاز من ثلاث مناقل خشبية وأنبوبة حديدية رشاقة .

على دائرة الميل عندما يكون التلسكوب قد أميل زاوية معينة على المستوى الأفقى . وحيث أن المحور القطبي ثابت ويميل بزاوية ثابتة على المستوى الأفقى فإننا نتوقع أن جميع هذه الكميات ترتبط ببعضها كما يرتبط أقصر طريق لإبحار السفينة بخطى عرض وخطى طول ميناء الرحيل وميناء الوصول . وفى كلتا المسألتين نحتاج إلى معرفة نوع العلاقات التى تربط أجزاء الأشكال المقوسة الأضلاع .



شكل (١٢٠) تقاطع ثلاث مستويات تقع عليها ثلاث دوائر عظمى .

المثلثات الكروية

فى شكل ١٢٠ قسمت الكرة الأرضية بواسطة ثلاث مستويات ، أحدها المستوى المار بخط الزوال ن ا ، والثانى ، المستوى المار بخط الزوال ن ب ، والثالث مستوى خط الاستواء ا ب . وكل من هذه المستويات يقطع سطح الكرة الأرضية فى دائرة كاملة مركزها مركز الكرة . وأينما تتقاطع هذه الدوائر على سطح الكرة تكون رؤوساً لشكل مكون من ثلاثة أضلاع هى أقواس من دوائر عظمى ، أى من دوائر مركزها مركز الكرة وأنصاف أقطارها نصف قطر الكرة أيضاً . يسمى مثل هذا الشكل مثلثا كرويا . وهذا المثلث الكروى له أضلاع ثلاثة ن ا ، ن ب ، ا ب تسمى بَ (المقابل للرأس ب) ، اَ (المقابل للرأس ا) ، نَ ، وله ثلاثة زوايا ب ، ا ، ن (ن ب ا ، ن ا ب ، ا ن ب) . وما سبق دراسته عن الخرائط يفيدنا فى معرفة كيفية قياس هذه الزوايا . فالزاوية ا ن ب هى الفرق بين خطى طول ا ، ب الواقعتين على خط الاستواء وتقاس بالزاوية التى بين المستويين اللذين يتقاطعان فى محور الكرة الأرضية من القطب إلى القطب . وحيث أن محور الكرة الأرضية عمودى على مستوى خط الاستواء نلاحظ إذن أن مستوى ا ب يقطع كلا من مستوى ن ا ومستوى ن ب على التعامد . وحيث أننا نقيس الزاوية التى تتقاطع عندها دائرتان عظماويتان على سطح الكرة بالزاوية التى بين المستويين اللذين يقع عليهما هاتان الدائرتان العظماويتان ، إذن فالزاوية الكروية ن ا ب زاوية قائمة . وبالمثل أيضاً الزاوية ن ب ا . وإذن فمجموع الزوايا الثلاث فى المثلث الكروى أكبر من قائمتين ، وهذا فرق هام بين المثلثات الكروية والمثلثات المستوية . وعمياً يصعب جداً رسم شكل مثل شكل ١٢٠ يبين مستويات الدوائر المرسومة على سطح الكرة ويبين الزاوية بين دائرتين عظماويتين متقاطعتين (أى دوائر مثل خط الاستواء ودوائر الطول ، مركزها مركز الكرة) . ولهذا السبب نقيس الزوايا باحدى ثلاث طرق أخرى لا نتعرض فيها إلا إلى الهندسة المستوية التى سبق أن درسناها ، وهذه الطرق هى :

(ا) الطريقة الهندسية : الزاوية ب ں ا بين الجزأين الكرويين ں ب ، ں ا هى الزاوية المستوية ل ں ك بين المماسين ل ں ، ك ں اللذين يمسان ں ب ، ں ا عند نقطة تقابلهما أى ں قطب دائرة الاستواء .

(ب) الطريقة الجغرافية : إذا تذكرنا أن ب ں ا هى عدد درجات الطول بين ا ، ب فإننا نرى بسهولة أنها عدد الدرجات فى القوس المقطوع ، بواسطة الدائرتين العظماويتين اللتين يقع عليهما القوسان ں ب ، ں ا ، على أى دائرة عرض ، أى أى دائرة يتعامد مستواها مع الخط الواصل بين القطبين ، حيث تتقاطع الدائرتان العظماويتان فوقها وتحتها .

(ح) الطريقة الفلكية : تتضح هذه الطريقة من شكل ١٢١ . ويوضح ذلك الشكل تقاطع مستوى دائرة المعدل و ه ك م مع مستوى الأفق ش ه ج م ، على الكرة السماوية ، التى يقع على سطحها قطب دائرة المعدل عند ں وقطب دائرة الأفق أى سمت الرأس عند ر . الزاوية ك ه ج بين القوسين ك ه ، ج ه هى الزاوية ك م ج بين مستويهما المتقاطعين .

شكل (١٢١)

الزاوية بين (ك ه ، ج ه) قوسين من دائرتين عظماويتين على سطح كرة هى الزاوية (ر م ں) بين (ر ، ں) قطبى الدائرتين العظماويتين .

ك م ح = ٩٠° — ك م ر ،

ں م ر = ٩٠° — ك م ر ،

وإذن فالزاوية بين قوسين كرويين هى الزاوية بين قطبى الدائرتين العظماويتين اللتين يقع عليهما القوسان .

والخطوة التالية فى دراسة المثلثات الكروية هى أن ندرس كيفية قياس أضلاعها . المثلث الكروى ليس فى الأصل شكلا يمثل الأبعاد بين ثلاثة أشياء عند رؤوسه ، بل هو يمثل الاختلاف بين اتجاه ثلاثة أشياء ، كما تشاهد من مركز واحد . فضلع المثلث الكروى هو الزاوية التى تتحركها العين (أو التلسكوب) حتى تنتقل مباشرة من أحد الرأسين إلى الآخر . وتقاس أضلاع المثلث الكروى كما تقاس زواياه ، بالدرجات أو بالتقدير الدائرى . فمثلا فى شكل ١٢٠ ، الضلع اَ (ں ب) والضلع بَ (ں ا) يساويان خط عرض القطب الشمالى (أى ٩٠° أو $\frac{\pi}{2}$ بالتقدير الدائرى) والضلع ںَ (ا ب) هو الفرق بين خطى طول ا ، ب ويساوى فى هذه الحالة الخاصة الزاوية ں .

وفى شكل ١٢١ تكون النقط ك ، ه ، ج رؤوس مثلث كروى على سطح الكرة السماوية فيه الضلعان جَ (ك ه) ، كَ (ج ه) قائمان والضلع الثالث هَ (ج ك) يساوى الزاوية ه التى تساوى الزاوية المستوية ں م ر . والزاويتان الكرويتان ك ، ح قائمتان ، ويرى القارىء مرة أخرى أن مجموع زوايا المثلث الكروى أكبر من قائمتين .

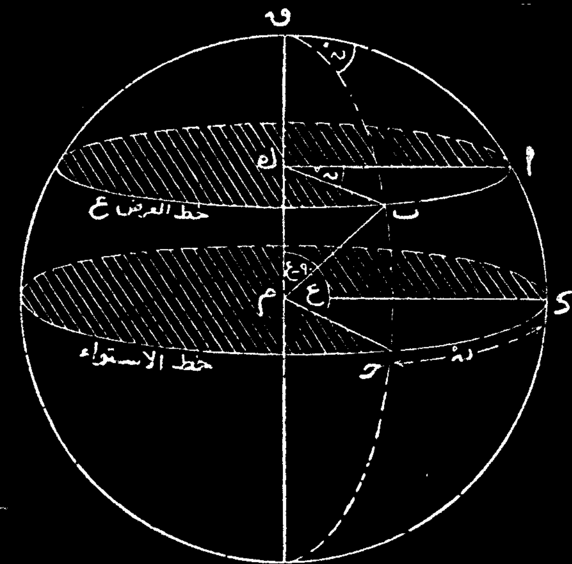
وقد رأينا ... برهة وجيزة أن خطى العرض بالمثل وخطى الطول عند قمة منجم وقاعه متساويان ، وذلك لأن كلا من خطى العرض والطول يقيس اتجاه الشىء كما يبدو للناظر من مركز الكرة الأرضية ، ويبدو قاع المنجم وقمته للناظر من مركز الكرة الأرضية أنهما يقعان فى نفس الاتجاه . وإذن يمكننا اعتبار أى ثلاث نقط فى الفراغ رؤوساً لمثلث كروى مرسوم على سطح كرة تقع عليها هذه النقط الثلاث . وإذا كانت هذه النقط الثلاث على أبعاد متساوية من مركز الرصد فإننا نستطيع التعبير عن أضلاع هذا المثلث بأطوالها الحقيقية بدلا من الدرجات أو التقدير الدائرى . ويمكن توضيح الطريقة التى نجرى بها

ذلك بواسطة عملية حسابية بسيطة لا نتعرض فيها للمثلث الكروى ، إذ أن الدوائر التى توازى خطوط العرض (ما عدا خط الاستواء نفسه) ليست دوائر عظمى . إذا علمنا الزاوية ، بالدرجات أو التقدير الدائرى ، التى تصل بين طرفى قوس إلى مركز الدائرة التى هو جزء منها فإننا نعلم أيضاً طول هذا القوس . فالفرق ، درجة واحدة فى خط الطول فى أى موضع على خط الاستواء يساوى $\frac{١}{٣٦٠}$ من محيط الكرة الأرضية . وإذن إذا اعتبرنا نصف قطر الكرة الأرضية = ٣٩٦٠ ميلا فإن هذا الفرق

$= ٢ \text{ط} \times ٣٩٦٠ \div ٣٦٠$

$= \frac{٤٤}{٧} \times ١١ = ٦٩$ ميلا (تقريبا)

وبإهمال استواء الكرة الأرضية عند القطبين ، هذا المقدار يساوى درجة واحدة من درجات العرض مقيسة على خط طول ، أو درجة واحدة مقيسة على أى دائرة عظمى على سطح الكرة الأرضية .



شكل (١٢٢) طريقة إيجاد طول ن من درجات الطول مقيسة على أى دائرة عرض . ح ، ء نقطتان على خط الاستواء . ا ، ب نقطتان على دائرة عرض ، ك م نصف محور الكرة الأرضية . ح م ء مستوى خط الاستواء . ا ب مستوى خط عرض . م ح نصف قطر الكرة الأرضية (ر)

وفرق مقداره درجة واحدة فى خط الطول مقيسا على أى خط عرض آخر يمكن الحصول عليه بسهولة كما هو موضح فى شكل ١٢٢ حيث ... يساوى ن من درجات الطول مقيسة على خط العرض ع ، ء ح يساوى ... من درجات الطول مقيسة على خط الاستواء . محيط دائرة الاستواء التى ... أقواسها ء ح يساوى ٢ ط × م ح ، وإذن فالدرجة الواحدة ...

$\frac{٢ \text{ط} \times \text{م ح}}{٣٦٠}$ ، ن من الدرجات تناظر $\frac{٢ \text{ن ط} \times \text{م ح}}{٣٦٠}$.

وإذن ء ح $= \frac{٢ \text{ن ط} \times \text{م ح}}{٣٦٠}$ ، م ح $= \frac{٣٦٠ \times \text{ء ح}}{٢ \text{ن ط}}$.

بالمثل ا ب $= \frac{٢ \text{ن ط} \times \text{ك ب}}{٣٦٠}$ ، ك ب $= \frac{٣٦٠ \times \text{ب ا}}{٢ \text{ن ط}}$.

والزاوية ك م ب = ٩٠° — ع ، وبما أن المستوى ك ا ب يتعامد مع المحور القطبى ، اذن ك م ب مثلث كروى قائم الزاوية فيه م ب = ر = م ح ،

$\text{حا ك م ب} = \frac{\text{ك ب}}{\text{م ب}}$

$\therefore \text{حا} (٩٠° - \text{ع}) = \frac{\text{ك ب}}{\text{م ح}}$

$\therefore \text{جتا ع} = \frac{\text{ك ب}}{\text{م ح}}$

$\therefore \text{ك ب} = \text{م ح جتا ع}$.

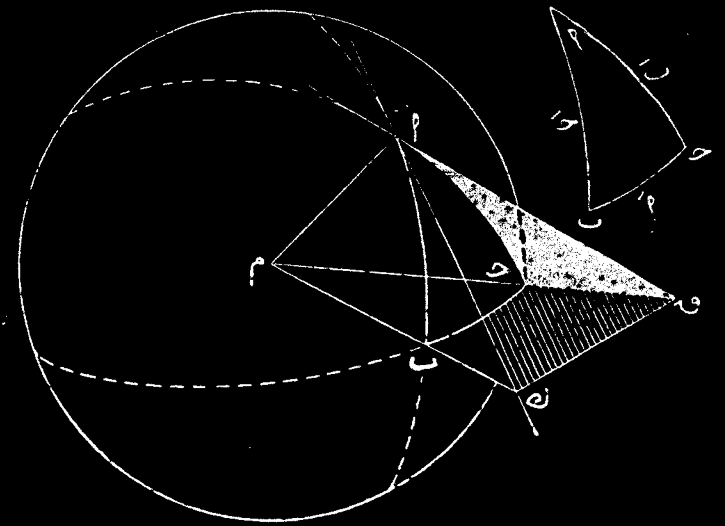
$\therefore \frac{٣٦٠ \times \text{ب ا}}{٢ \text{ن ط}} = \frac{٣٦٠ \times \text{ء ح جتا ع}}{٢ \text{ن ط}}$

وإذن القوس ب ا = القوس ء ح × جتا ع

= ن × ٦٩ × جتا ع ميلا (تقريبا) .

حل المثلثات الكروية

يمكن إيجاد قوانين عامة لحل المثلثات الكروية مشابهة لتلك التى أوجدناها فى الباب السادس لحل المثلثات المستوية . وتستخدم هذه القوانين فى الفلكيات وفى رياضيات الجغرافيا ، إذ كما سبق أن رأينا ، المثلثات التى تنتج لنا فى هذه الدراسات مثلثات كروية . وتعتمد هذه القوانين على تلك الخاصة بالمثلثات المستوية ، والصعوبة الوحيدة فى تفهمها ترجع إلى صعوبة توضيح الأشكال الفراغية على قطعة مسطحة من الورق . وإذا بذلنا قليلا ، مما نبذله فى وقتنا الحاضر فى بناء البوارج الحربية وحاملات الطائرات ، فى إمداد المدارس بجهاز السينماتوغراف وعمل أفلام متحركة تبين الأجسام الفراغية وما هى عليه من تغير أو حركة ، فإن جميع الأشياء التى لا يمكن تفهمها بواسطة أنبغ الأشخاص إلا بعد بذل مجهود ووقت كبيرين ، يمكن تفهمها بواسطة الأشخاص العاديين مثلنا الذين لا يدعون الذكاء . وسنستخدم فى شرحنا نموذجا بسيطا للغاية يمكن أن يعمله القارىء من الورق الشفاف ، فى دقيقتين .

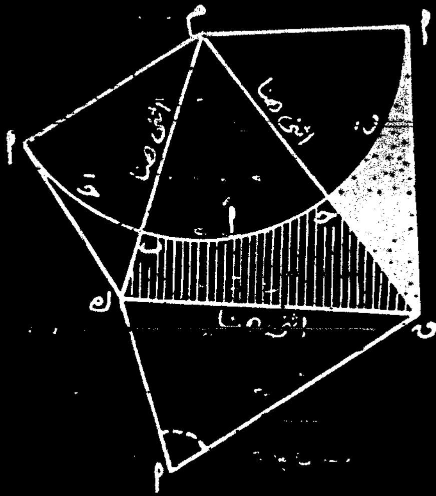


شكل (١٢٣)

القانون الهام الأول فى حل المثلث الكروى هو ذلك الذى نحصل بواسطته على الضلع الثالث اَ عندما نعلم الضلعين الآخرين بَ ، حَ والزاوية المحصورة بينهما ا . والقانون المناظر فى حساب المثلثات المستوية

اَ^{2} = بَ^{2} + حَ^{2} − ٢ بَ حَ جتا ا .

فى شكل ١٢٣ ، نرى المثلث الكروى ا ب ح الناتج من تقاطع ثلاث دوائر متحدة المركز الذى هو مركز الكرة . وتتقاطع المستويات التى تقع فيها الأضلاع اَ ، بَ ، حَ فى الخطوط المستقيمة م ا ، م ب ك ، م ح ن .
ويمس الخط المستقيم ا ك الدائرة العظمى التى قوسها حَ عند ا كما يمس الخط المستقيم ا ن الدائرة العظمى التى قوسها بَ عند ا أيضا ، فالزاويتان و ا ك ، و ا ن كل منهما زاوية قائمة إلا أنه ليس ممكنا رسمهما هكذا على قطعة مستوية من الورق . وخطوط تقاطع المستويات التى تقع فيها الأقواس اَ ، بَ ، حَ تكون مثلثا مستويا ن ا ك فيه زاوية الرأس ن ا ك تساوى الزاوية ا فى المثلث الكروى ا ب ح وذلك من التعريف الذى تقاس به زوايا المثلث الكروى .



شكل (١٢٤)

ولكى ندرك جيداً الارتباط بين أجزاء المثلث الكروى وأجزاء المثلثات الأربعة المستوية التى تكون أوجه هرم صغير، نقص قطعة من الورق تطابق شكل ١٢٤، مرسوما عليها المستقيمات والأقواس الموضحة فى نفس الشكل، ونطبق هذه الورقة عند الأحرف م ن، م ك، ن ك عندما نحتاج إلى ذلك. وجميع القوانين التى سنحتاج إليها موضحة على الأشكال المرسومة. وعند ما نفرغ من عمل هذا الأنموذج نقصه إلى أجزاء كما فى شكل ١٢٤ (ا)، حتى نشاهد كل مثلث فى الوضع المعتاد. من ذلك نرى، كما هو موضح فى شكل ١٢٤ (ا) وباستخدام القاعدة الخاصة بالمثلثات المستوية، أن

$$\overline{ن ك}^{٢} = \overline{ن م}^{٢} + \overline{ك م}^{٢} - ٢ ن م . ك م جتا اَ$$

$$، \overline{ن ك}^{٢} = \overline{ن ا}^{٢} + \overline{ك ا}^{٢} - ٢ ن ا . ك ا جتا ا$$

وإذن

$$(\overline{ن م}^{٢} - \overline{ن ا}^{٢}) + (\overline{ك م}^{٢} - \overline{ك ا}^{٢}) - ٢ ن م . ك م جتا اَ + ٢ ن ا .$$

ك ا جتا ا = صفراً

$$\therefore ٢ ن م . ك م جتا اَ = ٢ \overline{ا م}^{٢} + ٢ ن ا . ك ا جتا ا$$

وبالقسمة على ٢ ن م . ك م نحصل على

$$جتا اَ = \frac{ا م}{ن م} . \frac{ا م}{ك م} + \frac{ا ن}{م ن} . \frac{ا ك}{م ك} جتا ا$$

= جتا ن م ا جتا ك م ا + حا ن م ا حا ك م ا جتا ا

= جتا بَ جتا حَ + حا بَ حا حَ جتا ا.

وإذن فالقانون الذى يعطينا الضلع الثالث اَ عند ما نعلم الضلعين الآخرين بَ، حَ والزاوية المحصورة بينهما ا هو:

جتا اَ = جتا بَ جتا حَ + حا بَ حا حَ جتا ا.

وواضح أن من السهل استذكار هذا القانون بسبب كيفية تركيبه، ويصح أن نرجع إلى الكتاب عند ما نريد استخدامه.

شكل (١٢٤) «ا»

تعيين اتجاه حركة سفينة:

إن الشخص العاقل لا يحاول الاستمرار فى دراسة من هذا النوع قبل أن يتأكد من وجود نواح عملية تطبق فيها. والمثال الأول هو من نوع يمكننا أن نتسلى به ساعات طوال متى كان لدينا خريطة تعطينا أطوال الطرق البحرية المبينة اتجاهاتها بواسطة خطوط منقطة. فإذا كنا نملك مثل هذه الخريطة، علينا أن نتذكر أن هذه الأطوال تعطى عادة بالأميال البحرية (٦٠ ميلا بحرياً = ١° من محيط دائرة عظمى) ويجب ألا يفوتنا أن السفينة تغير اتجاه حركتها بضعة مرات قبل أن تبعد عن أو عندما تقترب من، اليابسة. فالخريطة تعطينا مثلا الطريق بين برستول بانجلتره وكنجستن بجميكا على أنه ٤٠٠٣ ميلا بحرياً أى مايزيد نحو ٢٥ ميلا عن القيمة التى سنحسبها فيما يلى، وذلك لأننا عند إيجاد هذه القيمة الأخيرة لن نعمل حساباً للخروج من قنال برستول أو لدخول ميناء كنجستن (أنظر شكل ١٢٥).

خط عرض برستول هو ٢٦َ ٥١° شمال خط الاستواء وإذن ٣٤َ ٣٨° من القطب ، وخط طولها ٣٥َ ٢° غربا . وخط عرض كنجستن هو ٥َ ١٨° أى ٥٥َ ٧١° من القطب ، وخط طولها ٥٨َ ٧٦° غربا . والأقواس الثلاثة ، القوس اَ الواصل من القطب إلى برستول ، والقوس بَ الواصل من القطب إلى كنجستن ، والقوس حـ قوس الدائرة العظمى التى يقع عليها الطريق من برستول إلى كنجستن ، تكون مثلثا كرويا معلوما منه الضلعان بَ ، حـَ والزاوية المحصورة بينهما ا التى هى الفرق بين خطى الطول ٥٨َ ٧٦° ، ٣٢َ ٢° أى ٢٣َ ٧٤° .

شكل (١٢٥) دائرة عظمى تبحر عليها سفينة .

وإذن يمكننا إيجاد قيمة اَ بأن نكتب

جتا اَ = جتا ٥٥َ ٧١° جتا ٣٤َ ٣٨° + حا ٥٥َ ٧١° حا ٣٤َ ٣٨° جتا ٢٣َ ٧٤° . وباستخدام الجداول

جتا اَ = ٣١٠٤و × ٧٤١٩و + ٦٢٣٤و × ٩٥٠٦و × ٢٦٩٢و = ٤٠٢٢و

أى أن اَ تساوى ٦٦⅓° (تقريبا) من محيط دائرة عظمى ، أى محيط الكرة

الأرضية . وحيث أن الدرجة الواحدة من محيط الكرة الأرضية تساوى ٦٩ ميلا تقريبا ، إذن فالمسافة بين برستول وكنجستن تساوى

٦٦⅓ × ٦٩ = ٤٥٧٧ ميلا عاديا = ٣٩٨٠ ميلا بحريا (تقريبا) .

وقبل أن نبدأ فى المثال الثانى ، الذى سوف لا نجد فيه أى صعوبة ، بعد أن نكون قد أجرينا حل عدة مسائل من النوع السابق ، بالاستعانة بقائمة خطوط الطول وخطوط العرض للموانى المختلفة المعطاة فى نهاية أغلب المصورات ، يجب أن نلاحظ أنه لاداع من إجراء عمليتى الطرح كى نحصل على الضلعين بَ ، حـَ اللذان يمثلان البعدين القطبيين (٩٠° — خط العرض) للمكانين . وذلك لأن حا (٩٠° — س) = جتا س ، جتا (٩٠° — س) = حا س ، فيمكننا إذن كتابة العبارة السابقة على الصورة

جتا (المسافة) = حا خط العرض الأول × حا خط العرض الثانى + جتا خط العرض الأول × جتا خط العرض الثانى × جتا (خط الطول الأول — خط الطول الثانى)

بفرض أن خطى الطول مقيسان معا شرق أو غرب خط زوال جرينتش أما إذا كان أحدهما مقيسا شرقا والآخر مقيسا غربا فان الزاوية ا تساوى مجموع خطى الطول ونكتب جتا (خط الطول الأول + خط الطول الثانى) بدلا من جتا (خط الطول الأول — خط الطول الثانى) .

ميل الكوكب

لقد سبق أن رأينا أن ميل (أو مطلع مستقيم) كوكب مثل الزهرة أو عطارد لا يمكن الحصول عليه بمشاهدته وهو فى مستوى الزوال ، وأن ميل (أو مطلع مستقيم) كوكب بعيد مثل المريخ أو المشترى لا يمكن تعيينه بمشاهدته وهو فى مستوى الزوال إلا عند عبوره أثناء الظلام . وإذن فليس ممكنا أن نحدد مواضع كوكب ما بالنسبة إلى النجوم الثابتة أثناء حركته بأكملها ، إلا إذا أمكننا تعيين ميلها ومطالع مستقيماتها بطريقة أخرى . والواقع أنه يمكننا إيجاد الميل بنفس الطريقة التى أوجدنا بها المسافة التى تبحرها سفينة ما على دائرة عظمى .

شكل (١٢٦) المثلث النجمى
قارن مع شكلى ١٠٩ ، ١١٨

نعتبر الموضع المحلى للنجم عند لحظة ما ، رأسا من رؤوس مثلث كروى (شكل ١٢٦) مثل المثلث الذى فى المثال السابق الخاص بالبعد بين برستول وكنجستن . نعتبر الضلع بَ الذى يناظر البعد القطبى لكنجستن ، البعد بين القطب السماوى وسمت الرأس مقيسا على خط الزوال الرئيسى ، وحيث أن ارتفاع النجم هو نفسه خط عرض المكان ، إذن ب = ٩٠ — خط العرض . أخيراً نعتبر الضلع حَ ، القوس بين النجم وسمت الرأس مقيسا على الدائرة العظمى التى تحدد الزاوية السمتية للنجم — أى الدائرة السمتية للنجم — وهذا القوس هو البعد السمتى للنجم (أى حَ = البعد السمتى) . والزاوية ا المحصورة بين الدائرة السمتية وخط الزوال الرئيسى الذى يقطع الدائرة السمتية عند سمت الرأس هى الزاوية السمتية للنجم . ويمر بطرفى القوسين دَ ، حَ الدائرة العظمى التى تصل النجم بالقطب السماوى ، أى مطلع المستقيم للنجم . وطول القوس بين النجم والقطب السماوى مقيسا على مطلع مستقيم النجم هو البعد

القطبى للنجم . وحيث أن القطب السماوى على بعد ٩٠° من دائرة المعدل ، إذن فالبعد القطبى للنجم ، أى الضلع الثالث فى المثلث الكروى هو الفرق بين ٩٠° وميل النجم (ا = ٩٠° — الميل) . وإذن بتطبيق القانون نحصل على :

جتا (٩٠° — الميل) = جتا (٩٠° — خط العرض) . جتا البعد السمتى + حا (٩٠° — خط العرض) × حا البعد السمتى . جتا الزاوية السمتية

ويمكن كتابة هذا القانون على الصورة

حا الميل = حا خط العرض . جتا البعد السمتى + جتا خط العرض × حا البعد السمتى . جتا الزاوية السمتية .

وعند تطبيق هذا القانون الأخير يجب ألا يفوتنا أننا نقيس الزاوية السمتية من النقطة الشمالية . فإذا كان النجم يعبر جنوبا فإن الزاوية السمتية يصح أن تكون أكبر من ٩٠° وفى هذه الحالة نقيسها من النقطة الجنوبية .
وبما أن القانون :

$$\bar{ح}^{٢} = \bar{ا}^{٢} + \bar{ب}^{٢} - ٢\,\bar{ا}\,\bar{ب}\ \text{جتا}\ ح$$

يصبح

$$\bar{ح}^{٢} = \bar{ا}^{٢} + \bar{ب}^{٢} + ٢\,\bar{ا}\,\bar{ب}\ \text{جتا}\ (١٨٠ - ح)$$

عندما تكون ح أكبر من ٩٠° (تمرين ١٠ بالباب السادس) فإن قانون حل المثلث الكروى يصبح

حا الميل = حا خط العرض . جتا البعد السمتى — جتا خط العرض . حا البعد السمتى . جتا الزاوية السمتية . ومن هذا القانون نرى أنه إذا علمنا الزاوية السمتية والبعد السمتى لأى جسم سماوى ، عند لحظة ما فإنه يمكننا إيجاد ميل هذا الجسم دون انتظاره إلى أن يصل مستوى الزوال . ولا يمكننا بنفس السهولة استخدام هذا القانون فى إيجاد خط عرض المكان بمشاهدة نجم معلوم ميله . إلا أننا إذا علمنا البعد السمتى والزاوية السمتية لكل من نجمين ، عند نفس المكان فإنه يمكننا إيجاد خط عرض هذا المكان بفرض أنه لدينا تقويم فلكى أو مصور يعطينا ميل النجوم . وبوجه عام ، إن إجراء هذه العمليات

الحسابية يستغرق وقتا أقل من الوقت الذى نستغرقه فى انتظار وصول نجم لامع معروف إلى مستوى الزوال .

ويمكننا أيضا تطبيق القانون السابق فى إيجاد اتجاه جسم سماوى عند شروقه أو غروبه عند خط عرض معلوم ، أو العكس ، فى إيجاد خط عرض المكان إذا علم اتجاه النجم عند الشروق أو الغروب . ففى لحظة شروق أو غروب الجسم السماوى يكون البعد السمتى للجسم ٩٠° وحيث أن جتا ٩٠° = صفراً ، حا ٩٠° = ١ ، فإن القانون السابق يختزل إلى الصورة

حا الميل = جتا خط عرض . جتا الزاوية السمتية .

فمثلا عند الاعتدالين عند ما يكون ميل الشمس صفراً

جتا خط العرض = صفراً

وإذن جتا الزاوية السمتية = صفراً

وإذن فالزاوية السمتية = ٩٠° .

أى أن الشمس تشرق نحو الشرق وتغرب نحو الغرب فى جميع أجزاء المعمورة ، ذلك اليوم .

ولايجاد اتجاه شروق أو غروب الشمس عند خط عرض ٥١½° شمالا (لندن) فى الواحد والعشرين من شهر يونيو عند ما يكون ميل الشمس ٢٣½° شمالا ، نضع

حا ٢٣½° = جتا ٥١½° . جتا الزاوية السمتية .

وباستخدام الجداول نجد أن

٣٩٨٧, = ٦٢٢٥, . جتا الزاوية السمتية

∴ جتا الزاوية السمتية = ٦٤٠٥,

∴ الزاوية السمتية = ٥٠ ⅙°

أى أن الشمس تشرق وتغرب فى اتجاه يصنع ٥٠ ⅙° مع مستوى الزوال ، نحو الشمال ، أى ٩٠° — ٥٠ ⅙° = ٣٩ ⅚° شمال الشرق أو الغرب . وبالعكس يمكن استخدام اتجاه الشروق والغروب المشاهد فى ايجاد خط عرض المكان

عبارة أخرى خاصة بالمثلثات الكروية :

أن التغير فى ميل الكوكب لا يهمنا مثل ما يهمنا التغير فى مطلع المستقيم ، وذلك لأن الطريقة التى يتغير بها مطلع المستقيم يمكن شرحها بسهولة إذا نحن فرضنا أن الأرض والكواكب تدور حول الشمس كما اعتقد ارستارخس وعلم كوبرنيك . وهذا الكتاب ليس كتابا فى الفلكيات . وإذن لن نصرف وقتنا فى محاولة معرفة كيف فوصل كوبرنيك إلى اعتقاده هذا . ويمكن القارىء أن يضطلع على ذلك إذا أراد فى أى كتاب فى الفلكيات إذا كان يُلم بطريقة تعيين مواضع الكواكب .

بالعودة إلى المثلث النجمى فى شكل ١٢٦ ، نرى أن الزاوية ح ، بين القوس الذى يمثل البعد القطبى للنجم والقوس بَ الذى هو الزاوية بين الراصد وقطب الكرة الأرضية (٩٠° — خط العرض) ، هى الزاوية التى قد دارها النجم منذ اللحظة التى كان عندها على مستوى الزوال .

وحيث أن الكرة السماوية تبدو أنها تدور ٣٦٠° كل ٢٤ ساعة أى ١٥° كل ساعه فإن الزاوية ح تسمى أحيانا بالزاوية الساعية للنجم ، وذلك لأنه يمكننا إيجاد الزمن (بالساعات) الذى قد مضى منذ عبور النجم . بقسمة عدد الدرجات على ١٥ . فإذا علمنا زمن عبور النجم مستوى الزوال بالتوقيت المحلى فإننا نعلم أيضاً مقدار الزمن الذى قد مضى منذ عبور الشمس مستوى الزوال وذلك لأن الزمن يقاس بهذه الكيفية . وإذا علمنا مطلع المستقيم للشمس فى نفس اليوم فاننا نعلم أيضاً مقدار الزمن الذى قد مضى منذ عبور ٧ مستوى الزوال . أى أننا نحصل على مطلع المستقيم للنجم بأن نضيف إلى زمن عبوره مطلع المستقيم للشمس .

ولإيجاد مطلع المستقيم بمعلومية خط عرض النجم وزاويته السمتية عند لحظة ما نحتاج إلى معرفة إحدى الزاويتين الباقيتين من المثلث الكروى الذى علمنا منه ضلعين والزاوية المحصورة بينهما . والقانون الذى كنا نستخدمه فى حساب المثلثات المستوية (الباب السادس) هى

حا ح = حَ حا ا / اَ (أو حا ح = حَ حا ب / بَ ، إذا علمنا ب).

أما القانون المناظر فى حساب المثلثات الكروية فهو

حا ح = حا حَ حا ا / حا اَ (أو حا ح = حا حَ حا ب / حا بَ)

ويمكن الحصول على هذا القانون من الشكل (أنظر الملحق الأول) أو من القانون السابق باستخدام قواعد الضرب فى علم الجبر واستخدام القاعدة

جتا٢ س = ١ — حا٢ س ، حيث س أية زاويه .

نلاحظ أنه كما يمكننا الحصول على اَ بمعلومية بَ ، حَ ، ا من القانون

جتا اَ = جتا بَ جتا حَ + حا بَ حا حَ جتا ا ،

فإنه يمكننا أيضاً الحصول على حَ إذا علمنا اَ ، بَ ، ح من القانون

جتا حَ = جتا اَ جتا بَ + حا اَ حا بَ جتا ح .

وتبرهن قاعدة الجيب كما يأتى :

من القانون الأول

— جتا ا حا بَ حا حَ = جتا بَ جتا حَ — جتا اَ .

وبتربيع الطرفين

∴ جتا٢ ا حا٢ بَ حا٢ حَ = جتا٢ بَ جتا٢ حَ — ٢ جتا اَ جتا بَ × جتا حَ + جتا٢ اَ .

وبإجراء التعويض

(١ — حا٢ ا) حا٢ بَ حا٢ حَ = (١ — حا٢ بَ) (١ — حا٢ حَ) — ٢ جتا اَ جتا بَ جتا حَ + (١ — حا٢ اَ)

∴ حا٢ بَ حا٢ حَ — حا٢ ا حا٢ بَ حا٢ حَ = ١ — حا٢ بَ — حا٢ حَ + حا٢ بَ حا٢ حَ — ٢ جتا اَ جتا بَ جتا حَ + ١ — حا٢ اَ .

وبحذف حا٢ بَ حا٢ حَ من الطرفين نحصل على

— حا٢ ا حا٢ بَ حا٢ حَ = ٢ — حا٢ اَ — حا٢ بَ — حا٢ حَ — ٢ جتا اَ جتا بَ جتا حَ .

وبما أن الطرف الأيسر متماثل فى اَ ، بَ ، حَ نستنتج أننا نحصل على نفس المقدار إذا نحن بدأنا بالقانون الثانى

جتا حَ = جتا اَ جتا بَ + حا اَ حا بَ جتا ح

وأننا فى هذه الحالة نحصل على

— حا٢ ح حا٢ اَ حا٢ بَ = ٢ — حا٢ اَ — حا٢ بَ — حا٢ حَ — ٢ جتا اَ جتا بَ جتا حَ .

وإذن — حا٢ ح حا٢ اَ حا٢ بَ = — حا٢ ا حا٢ بَ حا٢ حَ

وبالقسمة على — حا٢ بَ

∴ حا٢ ح حا٢ اَ = حا٢ ا حا٢ حَ

∴ حا ح حا اَ = ± حا ا حا حَ

∴ حا ح = ± حا ا حا حَ / حا اَ

ومع أن برهان هذا القانون صعب بعض الشىء إلا أنه لا توجد صعوبة ما فى تطبيقها . وفى الشكل ١٢٦ ، ا هى الزاوية السمتية ، حَ هو البعد السمتى ، اَ هو البعد القطبى (٩٠° — الميل) للنجم أى حا اَ = جتا الميل ، وإذن

حا الزاوية الساعية = حا الزاوية السمتية . حا البعد السمتى / جتا الميل

ولنفرض مثلا أن الزاوية الساعية لأحد نجوم الجبار ١٠° وهو غرب خط الزوال عند الساعة ٨ : ٤٠ (ساعة دقيقة) بعد الظهر بالتوقيت المحلى . لقد عبر النجم مستوى الزوال منذ ⅔ ساعة = ٤٠ دقيقة ، أى عبر فى تمام الساعة الثامنة . وإذن فمطلع المستقيم لهذا النجم أكبر من مطلع المستقيم للشمس بمقدار ٨ ساعات . فإذا كان مطلع المستقيم للشمس فى هذا اليوم ٢١ : ٥٠ (ساعة دقيقة) فإن الشمس

دقيقة ساعة ... دقيقة ساعة

تعبر بمقدار ١٠ : ٢ قبل ٥ أى أن ٥ تعبر الساعة ١٠ : ٢ بعد الظهر .

ساعة ... دقيقة ساعة ... دقيقة ساعة

وإذن يعبر النجم بمقدار ٨ — ١٠ : ٢ = ٥٠ : ٥ بعد ٥ وإذن فمطلع

دقيقة ساعة

المستقيم لهذا النجم = ٥٠ : ٥

ويمكننا نفس القانون من حساب وقت شروق ووقت غروب أى نجم عند أى مكان معين . فعند الشروق أو الغروب يكون البعد السمتى للجسم السماوى ٩٠° ، وحيث أن حا ٩٠° = ١ يأخذ القانون الصورة :

حا الزاوية الساعية = حا الزاوية السمتية / جتا الميل

وتعين الزاوية السمتية عند شروق النجم أو غروبه من العبارة التى سبق ذكرها

جتا الزاوية السمتية = حا الميل / جتا خط العرض

نأخذ مثالا بأن نوجد وقت شروق الشمس يوم الانقلاب الشتوى فى لندن (خط عرض ٥١ ½°) . من القانون الأخير ، الزاوية السمتية للشمس عند شروقها أو غروبها يوم الانقلاب الشتوى هى ٥٠ ½° من النقطة الجنوبية ، وإذن عند الشروق أو الغروب

حا الزاوية الساعية = حا ٥٠ ½° / جتا (-- ٢٣ ½°)

= ,٧٦٧٩ / ,٩١٧١

= ,٨٣٧٣

وبما أن ,٨٣٧٣ = حا ٥١ َ٥٦° ، إذن فالوقت الذى يمضى بين الشروق أو الغروب وعبور مستوى الزوال (أى الظهر ، إذ أننا ندرس حركة الشمس)

دقيقة ساعة ... دقيقة ساعة

يساوى ⅙ ٥٦ ÷ ١٥ = ٤٧ ٣ ، أى أن الشمس تشرق الساعة ١٣ ٨

دقيقة ساعة

صباحا وتغرب الساعة ٤٧ ٣ مساءاً ، فيستمر ضوء النهار نحو سبع ساعات ونصف تقريبا . وتختلف هذه القيمة بنحو ست دقائق عن تلك التى نجدها فى كتاب ويتكر ، ويرجع هذا الاختلاف إلى تقريبنا فى إجراء العمليـــات الحسابية وإلى أسباب أخرى لا تهمنا الآن لأننا ، كما سنرى ، سوف لا نجد صعوبة ما فى التخلص منها عند ما نفهم الأسس الرئيسية .

ويمكننا تطبيق نفس القانون فى إيجاد وقت شروق أو غروب الشمس فى ٢١ يونيو عند ما يتبادل طولا النهار والليل . وكما أشرنا فى تمرين ١٠ بالباب السادس . وكما سندرس بالتفصيل فى نهاية هذا الباب

حا ا = حا (١٨٠ — ا)

وإذن ,٨٣٧٣ إما أن تساوى حا ٥١ َ٥٦° وإما أن تساوى حا (١٨٠° — ٥١ َ٥٦°) .

ويمكننا أن نحكم من الشكل على القيمة التى نأخذها . فأى نجم على دائرة المعدل يشرق نحو الشرق ، يتحرك ٩٠° حتى يصل مستوى الزوال . والنجم الذى يقع جنوب دائرة المعدل يتحرك أقل من ٩٠° ، أما النجم الذى يقع شمال دائرة المعدل فيتحرك أكثر من ٩٠° . وإذن إذا كان ميل الجسم السماوى شمالا (كما فى حالة الشمس يوم ٢١ يونيو) فإننا نعتبر الحل حا (١٨٠ — ا) ، أما إذا كان الميل جنوبا فإننا نعتبر الحل جا ا فمثلا . الزاوية الساعية عند شروق

دقيقة ساعة

أو غروب الشمس يوم ٢١ يونيو هى (١٢٣ ⅙ ÷ ١٥) ساعة = ١٢ ٨ ،

دقيقة ساعة ... دقيقة ساعة

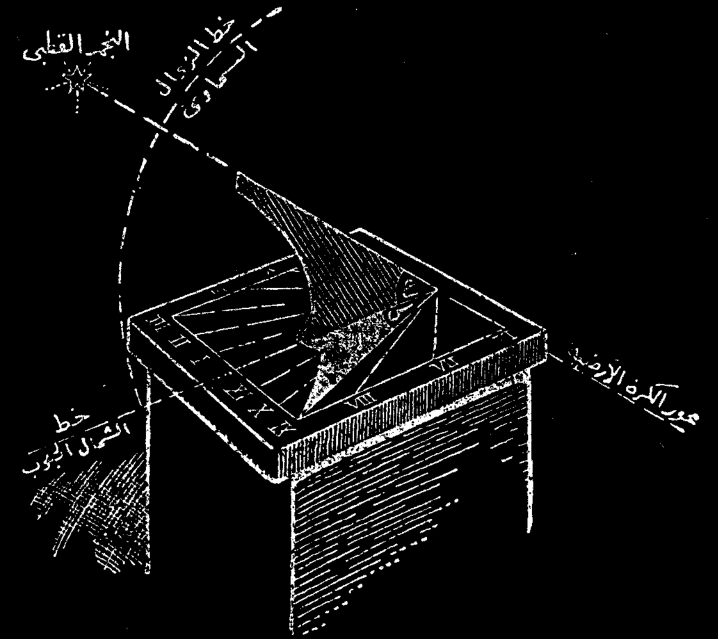
أى أن الشمس تشرق الساعة ٤٧ : ٣ صباحا وتغرب الساعة ١٣ : ٨ مساءاً ،

نظرية المزولة : (Sundial)

أما المثال الأخير الذى نستخدم فيه المثلثات الكروية فهو ما أصبح الآن وسيلة لتزيين الحدائق . فالمزولة (الساعة الشمسية) التى نراها فى الحدائق أو

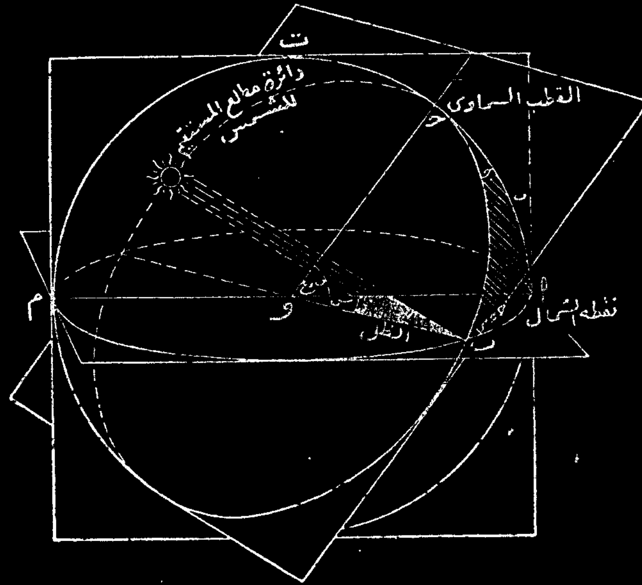
على جدران الكنائس القديمة العهد فى أوربا هى اختراع يعتمد على نفس الأسس التى تعتمد عليها الدوائر العظمى التى تبحر عليها السفن .

وأول من ابتكر المزولة هم العرب الذين تقدموا تقدماً واسعاً فى دراسة حساب المثلثات الكروية وهى تختلف كل الاختلاف عن ساعات الظل القديمة العهد ، فساعة الظل القديمة العهد ، أى المسلة ، تتركب من عمود رأسى يوضع فى بعض الأحيان فوق قاعدة حجرية مستديرة الشكل . والزاوية التى يصنعها ظل عمود رأسى مع خط الزوال هى الزاوية السمتية للشمس (شكل ١٣) ، والزاوية السمتية التى يتحركها الظل عند ما تتحرك الشمس زاوية معينة تختلف باختلاف الفصول ، فهى تتوقف على ميل الشمس . وإذن لم تكن نسبة طول ساعة العمل مقيسة بواسطة ساعة الظل ، إلى طول اليوم ، نسبة ثابتة كل أيام السنة . فلم يكن هناك علاقة ثابتة بين توقيت العمل و توقيت الفلكيين بواسطة الساعة الزجاجية أو الساعة المائية .



شكل (١٢٧) الساعة الشمسية عند العرب .

وقد أدرك فلكيو العرب أنه يمكن تصحيح ذلك الخطأ بوضع محور ساعة الظل بحيث ينطبق على المحور القطبى للكرة الأرضية . فعند ما يوضع المؤشر (أنظر شكل ١٢٧) بحيث نرى النجم القطبى على امتداد الحافة العليا له يمكننا تدريج القاعدة إلى أقسام تناظر فترات متساوية فى جميع فصول السنة ، أى أن مؤشر المزولة يوضع فى مستوى الزوال بحيث يميل على المستوى الأفقى زاوية تساوى خط عرض المكان الذى تستخدم فيه المزولة . وإذن فالمزولة التى تكون مضبوطة فى سيفل حيث ازدهرت جامعة عربية فى القرن العاشر ، لا تكون مضبوطة فى لندن .



شكل (١٢٨) مثلث الساعة الشمسية

المستوى ح و ب ، أى مستوى دائرة مطلع المستقيم للشمس ، يقطع مستوى الزوال ا ت م فى الخط المستقيم و ح ، وإذن ينطبق مؤشر المزوله على هذا الخط المستقيم . وتنطبق حافة الظل على خط تقاطع دائرة مطلع المستقيم للشمس مع المستوى الأفقى ا ب م ، أى الخط المستقيم و ب . والزاوية ح هى الزاوية التى تتحركها الشمس حول ح و بعد عبور مستوى الزوال .

ويتضح سبب ذلك من شكل ١٢٨ . فمهما كانت قيمة ميل أو مطلع مستقيم

الشمس فى أى يوم فإن الشمس تبدو أنها تدور حول المحور القطبى حيث تتقاطع مستويات الدوائر العظمى التى هى مطالع المستقيمات للشمس . ولنفرض مثلا أن الشمس قد تحركت زاوية ساعيه ح . أى شعاع يقابل حافة المؤشر يقع بأكمله فى مستوى الدائرة العظمى التى هى مطلع المستقيم للشمس . ويقطع هذا المستوى المستوى الأفقى فى الخط المستقيم الواصل بين الراصد ، والنقطة التى تقطع فيها دائرة مطلع المستقيم للشمس الدائرة العظمى الواقعة فى المستوى الأفقى . والقوس حَ ، قوس الدائرة الأفقية بين هذه النقطة وخط الزوال ، يقاس بالزاوية المستوية ف التى يتحركها الظل عندما تتحرك الشمس زاوية ساعيه ح فاذا كانت ح لها نفس القيمة فان حَ = ف لها نفس القيمة أيضا . أى أنه عندما تتحرك الشمس زاوية قدرها س من الساعات بالتوقيت الشمسى (١٥ س°) فإن الظل يتحرك زاوية ف لها نفس القيمة فى الصيف والشتاء

ولكى نصنع مزولة نضع مؤشراً فى مستوى الزوال بحيث يشير طرفه الأعلى إلى الشمال وتميل حافته العليا على القاعدة بزاوية بَ تساوى خط عرض المكان الذى سنستخدم فيه المزولة . وكل ما يتبقى إذن هو تدريج القاعدة إلى ساعات . ويمكننا أن نتسلى فى إحدى الأجازات الصيفية باستخدام حساب المثلثات فى تدريج مثل هذه المزولة . ولو تذكر الأوربيون أن نظرية المزولة قد وضعها فاتحو أسبانيا الملونون فى الوقت الذى كانت فيه شعوب بريطانيا وألمانيا شعوبا همجية تقطن عششا من الطين ويحكمها جماعة من القساوسة الجهلة والبارونات اللصوص لخلعوا عن أنفسهم نوع الكبرياء والغرور الذى أصاب الفاتحين البيض الذين غزوا كينيا ، والجنرال هير تسوج ، والرسل الذين قيدوا حرية الهجرة وقادة الحركة الاشتراكية الألمانية .

وتعتمد طريقة تدريج القاعدة على قانون ثالث لحل المثلث الكروى . فى شكل ١٢٨ نرى أن المثلث الكروى ابح قائم الزاوية وذلك لأن مستوى الزوال عمودى على المستوى الأفقى ، فالزاوية ا التى بين المستويين هى زاوية قائمة . والأجزاء التى تهمنا فى هذا المثلث هى ح الزاوية الساعية للشمس ، حَ = ف زاوية الظل ، بَ = خط عرض المكان . والزاوية الأخيرة معلومة ، والزاوية الأولى يمكن الحصول عليها ، أما الزاوية الثانية فهى التى نريد

حسابها حتى نضع علامات التدريج التى تناظر قيم ح التى نعتبرها ، أى تناظر الزمن .

إذا كانت ا = ٩٠° فإن حا ا = ١ ويأخذ القانون الثانى فى حالة المثلثات القائمة الزاوية الصورة

حا ح = حا حَ / حا اَ ... (١)

، ∵ جتا ٩٠° = صفرا ، يأخذ القانون الأول الصورة

جتا اَ = جتا بَ جتا حَ ... (٢)

وإذا طبقنا القانون الأول على الضلعين اَ ، بَ والزاوية المحصورة ح فإن

جتا حَ = جتا اَ جتا بَ + حا اَ حا بَ جتا ح

ومنها

جتا ح = (جتا حَ − جتا اَ جتا بَ) / (حا اَ حا بَ) ... (٣)

ومن (١) ، (٣) نحصل على

حا ح / جتا ح = (حا حَ / حا اَ) × (حا اَ حا بَ) / (جتا حَ − جتا اَ جتا بَ)

∴ طا ح = حا حَ حا بَ / (جتا حَ − جتا اَ جتا بَ)

وبضرب الطرفين فى حا بَ

∴ طا ح حا بَ = حا ح حا² بَ / (جتا حَ − جتا اَ جتا بَ)

وبالتعويض عن جتا اَ من (٢)

∴ ظا ح حا بَ = حا ح حا² بَ / (جتا حَ − جتا حَ جتا² بَ)

$$= \frac{\text{حا حَ حا}^{2}\text{ بَ}}{\text{جتا حَ (١ — جتا}^{2}\text{ بَ)}}$$

$$= \frac{\text{حا حَ حا}^{2}\text{ بَ}}{\text{جتا حَ حا}^{2}\text{ بَ}}$$

$$= \frac{\text{حا حَ}}{\text{جتا حَ}}$$

$$= \text{طا حَ}$$

وإذن .

ط (زاويه الظل) = حا (خط عرض المكان) × طا (الزاوية الساعية).

فمثلا عند تدريج مزولة بحيث تكون مضبوطة فى لندن تحصل على الزاوية التى تصنع علامة تناظرها ينطبق عليها الظل عند الساعة ٢:٣٠ بعد الظهر أى عند ما تساوى الزاوية الساعية ٢½ ساعة = ٢½ × ١٥ = ٣٧½° ، بأن نضع

طا (زاوية الظل) = حا ٥١½° × طا ٣٧½°

= ٠,٧٨٢٦ × ٠,٧٦٧٣

= ٠,٦٠٠٥

وباستخدام جداول الظلال ، طا ٣١ = ٠,٦٠٠٩ ، طا ٣٠,٩ = ٠,٥٩٨٥

وإذن فزاوية الظل = ٣١° مقربة إلى أقرب جزء من عشرة من الدرجات .

ويمكننا بالمثل إجراء باقى التدريج .

وإذا كنا ندرج مزولة فى الجيزة مثلا فإننا نضع حا ٣٠° موضع حا (خط العرض) .

النسب المثلثية للزوايا الكبيرة :

عند استخدام القوانين التى حصلنا عليها فى هذا الباب ، تنشأ لنا عدة نقط هامة لم ندرسها بعد . وقد ذكرنا إحدى هذه النقط عند ما درسنا رقيى شروق وغروب الشمس فى يومى الانقلابين. النقطة الجنوبية على الأفق تبعد ١٨٠° عن النقطة الشمالية ، فإذا كانت الزاوية السمتية لنجم مقيسة من النقطة الشمالية

تساوى ا فهى تساوى (١٨٠ — ا) مقيسة من النقطة الجنوبية . وقد سبق أن رأينا فى حساب المثلثات المستوية بالباب السادس انه إذا كانت الزاوية ا من المثلث أقل من ٩٠° فأن

$$\text{ا}^{2} = \text{ب}^{2} + \text{حـ}^{2} - \text{٢ ب حـ جتا ا} \qquad (١)$$

أما إذا كانت ا > ٩٠° فان

$$\text{ا}^{2} = \text{ب}^{2} + \text{حـ}^{2} + \text{٢ بَ حَ جتا (١٨٠ — ا)} \;\dots \qquad (٢)$$

وإذا كانت الزاويتان ا ، ب كل منهما أقل من ٩٠° فإن

$$\frac{\text{حا ا}}{\text{ا}} = \frac{\text{حا ب}}{\text{بَ}} \;\dots \qquad (٣)$$

أما إذا كانت إحدى الزوايا فى هذا المثلث المستوى أكبر من ٩٠° فإن

$$\frac{\text{حا (١٨٠ — ا)}}{\text{اَ}} = \frac{\text{حا ب}}{\text{بَ}} \;\dots \qquad (٤)$$

فإذا اصطلحنا على أن جتا (١٨٠ — ا) تعنى نفس الشىء الذى تعنيه — جتا ا (أو أن — جتا (١٨٠ — ا) تعنى نفس الشىء الذى تعنيه جتا ا) فإن القاعدة (١) تشمل أيضا القاعدة (٢) وبالمثل إذا اصطلحنا على أن حا (١٨٠ — ا) تعنى نفس الشىء مثل حا ا فان القاعدة (٣) تشمل القاعدة (٤) ، سواء كانت كل زاوية فى المثلث لاتزيد عن ٩٠° أو زادت إحداها عن ٩٠° .

وإذا اتفقنا على ذلك فإننا نقول أن جتا ٤٥ = ٠,٧٠٧١ ، جتا ١٣٥ = — ٠,٧٠٧١ ، وإذا كان جواب مسألة ماهو جتا ا = — ٠,٧٠٧١ وكنا نرى من الجداول أن جتا ٤٥ = ٠,٧٠٧١ فإننا نستنتج أن ا = ١٨٠ — ٤٥ = ١٣٥ بالمثل حا ٣٠° لها نفس القيمة مثل حا ١٥٠ (+ ½) ، والقيمة ½ المعطاه فى جداول الجيوب للزوايا من صفر إلى ٩٠° باعتبارها حا ٣٠° يجب أن تقرأ حا ٣٠° أو حا ١٥٠° .

تلزمنا إذن قاعدة واحدة لإيجاد ميل النجم ؛ هذه القاعدة ، إذا كانت الزاوية السمتية تقاس دائما من النقطة الجنوبية سواء كانت أكبر أو أصغر من ٩٠° هى :

حا الميل = حا خط العرض جتا البعد السمتى — حا البعد السمتى جتا خط العرض جتا الزاوية السمتية .

ويبدو ذلك لأول وهله أنه متناقض ، وذلك لأننا قد اعتدنا على التفكير فى الجيوب وجيوب التمام والظلال باعتبارها النسب بين أطوال أضلاع مثلث قائم الزاوية لا يمكن أن تكون فيه زاوية أكبر من ٩٠° . ويبدو إذن أنه من العبس أن نتكلم عن جيوب أو جيوب تمام زاوية مقدارها ١٥٠° . إلا أنه لو كنا بدأنا بأشكال مرسومة على سطح كرة — والأشكال المرسومة على سطح الكرة الأرضية كلها من هذا النوع ، لما كان ذلك بدأ هكذا سخيفا . فى المثلث الكروى يزيد مجموع زوايا المثلث عن قائمتين ويمكن أن تكون إحدى زوايا مثلث كروى قائم الزاوية أكبر من ٩٠° . يمكننا أن ننظر إلى ذلك من وجهة أخرى . يمكننا بسهولة تامة أن نرسم شكلا هندسيا يوضح معنى اⁿ عندما ن = ١ (خطا مستقيما) ، ن = ٢ (مربعا) ، ن = ٣ (مكعبا) ، بينما لا نستطيع رسم شكل هندسى من نوع مماثل نوضح به معنى المؤثر ٤ فى التعبير ا٤ . فى نفس الوقت يمكننا فى علم الحساب تمثيل ا٤ بنفس الطريقة التى تمثل بها ا ، ا٢ ، ا٣ .

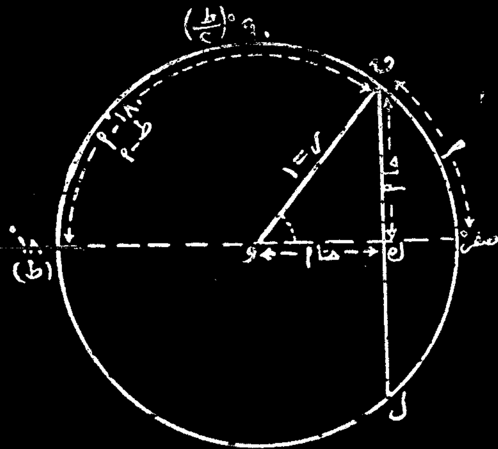
وإذن لماذا نقول ان حا ١٥٠ ليس لها معنى ؟ هل لأننا لانستطيع أن نرسم مثلثا مساويا قائم الزاوية وفيه زاوية تساوى ١٥٠° ؟ ولماذا نقول ان جتا ١١٠° ليس لها معنى ؟ هل لأننا لانستطيع أن نرسم مثلثا مستويا قائم الزاوية وفيه زاوية تساوى ١١٠ ؟ .

بوجه عام يمكننا ان نعتبر الجيب وجيب التمام والظل طرقا مختلفة لقياس زاوية ما ، وإذا ما اتفقنا على ذلك فإنه لا يبدو لنا غريبا أن الزاوية التى هى أكبر من ٩٠° لها جيب وجيب تمام وظل مثل الزاوية التى هى أصغر من ٩٠° . والواقع أن قياس الزاوية بواسطة جيبها أو جيب تمامها أو ظلها لا يستلزم رسم مثلث على الإطلاق . تقاس الزاوية عادة بعدد وحدات الطول فى قوس من دائرة نصف قطرها الوحدة . وإذا قلنا أن الزاوية بين خطين مستقيمين تساوى ١° فإنما نعنى بذلك أنه إذا رسمنا دائرة نصف قطرها بوصة ومركزها

نقطة تقاطع المستقيمين فإن طول القوس الصغير الواصل بين نقطتى تقاطع الخطين مع الدائرة يساوى ٢ط/٣٦٠ من البوصة . بالمثل يمكننا تعريف جيب زاوية بأنه عدد وحدات طول كما عملنا فى الباب السادس . إذا كان ن ل هو الوتر الواصل بين طرفى القوس ٢ ا من دائرة نصف قطرها الوحدة فإن ½ ن ل (= ن ك فى شكل ١٢٩) أى نصف الوتر يساوى جيب نصف القوس ، أى جيب ا ، والخط المستقيم ن ل لنا الحق فى أن نعتبره وتر القوس الاكبر ٣٦٠ — ٢ ا كما نعتبره القوس الأصغر ٢ ا ، والقوس ½ (٣٦٠ — ٢ا) = ١٨٠ — ا لنا الحق فى أن نعتبره نصف الزاوية أى الزاوية التى جيبها نصف الوتر ن ل تماما كما نعتبر القوس ا . وإذن تعنى هذه الطريقة لقياس الجيوب أن

حا ا = حا (١٨٠ — ا) .

ولكى نرسم شكلا يوضح أن جتا (١٨٠ — ا) يمكن كتابتها — جتا ا عند إجراء العمليات الحسابية علينا أن نجد أولا معنى للمؤثر « — » وقد سبق أن رأينا أن الهندسة الأقليدية لا تساعدنا على توضيح العمليات الحسابية التى تحتوى على الإشارة « — » . وسندرس الآن نوعا من الهندسة يساعدنا على ذلك .



شكل (١٢٩)

قبل أن نبدأ فى دراسة هذا النوع من الهندسة نلفت نظر القارئ إلى نقطة هامة أخرى . عند ما كنا نرسم أشكالا نوضح بها نظريات الهندسة الاقليدية ربما كنا نتخيل أرشميدس وهو يرسم الأشكال المستوية فى الهندسة الاقليدية على الرمال قبل أن تقتله الجنود الإيطاليون أننا ندرك الآن أن أرشميدس كان فى الواقع يرسم مثلثات كروية على سطح الكرة الأرضية . والسبب الوحيد فى أن الهندسة الاقليدية تسد حاجة الرسامين والمهندسين هى أن أبعاد هذه الرسومات والمبانى صغيرة جداً إذا قورنت بنصف قطر الأرض . والواقع أنه إذا نحن استمررينا فى مد خط مستقيم عبر المحيط فإننا نجد أنه ليس خطا مستقيما بالمعنى المقصود فى الهندسة الاقليدية . وداخل الحيز المحدود من الفراغ الذى يحيط بمجموعتنا الشمسية يعتبر شعاع الضوء لجميع الأغراض العملية خطا مستقيما بالمعنى المقصود فى الهندسة الاقليدية إلا أنه عند ما نقول إن الضوء ينتشر فى خطوط مستقيمة إلى أبعد السدم فإننا لا نعنى حتما أن الضوء ينتشر فى خطوط أقليدس المستقيمة .

اختبارات على الباب الثامن

(١) أوجد ميل الشمس ومطلع مستقيمها فى كل من الأيام ٢١ مارس ، ٢١ يونيو ، ٢٣ سبتمبر ، ٢١ ديسمبر .

(٢) أوجد بوجه التقريب مطلع مستقيم الشمس فى الأيام ٤ يوليو ، أول مايو ، أول يناير ، ٥ نوفمبر . (ابدأ بأحد هذه الأيام واعتبر الأيام الأخرى مرة تسبقه وأخرى تتلوه ، ثم كرر العمل مبتدئا بكل واحد من الأيام الثلاثة الأخرى . حقق النتائج من تقويم ويتكر) .

(٣) باستخدام استرولاب منزلى (شكل ١٢ ، الباب الثانى) ، حصل على القراءات الآتية ، فى مكان ما يوم ٢٥ ديسمبر .

البعد السمتى للشمس (من الجنوب)	توقيت جرينتش (مساءاً)
°٧٤½	١٢,١٨
°٧٤	١٢,١٩
°٧٤	١٢,٢٠
°٧٣½	١٢,٢١
°٧٣½	١٢,٢٢
°٧٤	١٢,٢٣
°٧٤½	١٢,٢٤

أوجد خط عرض وخط طول ذلك المكان . (انظر ذلك المكان على الخريطة) .

(٤) أوجد بوجه التقريب مطلع مستقيم الشمس يوم ٢٥ يناير . ومن ثم أوجد بالتوقيت المحلى زمن عبور الدبران ، (مطلع المستقيم ٣٢ ٤) مستوى الزوال ، ذلك المساء .

دقيقة ساعة

وإذا سجل كرونومتر السفينة الزمن ١١,١٥ مساءاً ، عند جرينتش فأوجد خط طول السفينة .

(٥) إذا كان ميل الدبران ١٦° شمالا (مقربا ... أقرب درجة) وارتفاعه عند عبوره مستوى الزوال ٦٠° فوق جنوب الأفق فأوجد خط عرض السفينة .

(٦) مطلع المستقيم لنجم ∞ فى الدب الأكبر هو ١١ ساعة بوجه التقريب وميله ٥َ ٦٢° شمالا ، ويعبر النجم مستوى الزوال على بعد ٤١ ٤° شمال سمت الرأس ، يوم ٨ أبريل الساعة ١٠ : ١ صباحا : حسب كرونومتر السفينة ، عين موضع السفينة .

دقيقة ساعة

(٧) لفرض أن شخصا قد استبعد إلى جزيرة ما وليس معه إلا ساعة يد وتقويم ويتكر . فإذا ضبط ساعته وقت الظهر بمشاهدة ظل الشمس ووجد أن النجم ∞ فى الدب القطبى كان فى العبور السفلى نحو الساعة ١١ مساءاً ، فكيف يمكنه أن يستنتج التاريخ بالتقريب ، إذا كان قد نسى عدد الأيام التى مضت؟

(٨) فى غرة أبريل عام ١٨٩٥ كان مطلع المستقيم للقمر ٢٣ ساعة ، ٤٨ دقيقة . أوجد بالتقريب شكله ؛ ووقت شروقه ، ووقت عبوره ذلك اليوم.

(٩) إذا علمت أن الشمس والدب الأكبر قد شوهدا معا لمدة ٢٤ ساعة متتالية مرة واحدة فى السنة فى موضع ما على خط زوال جرينتش ، فكيف تعين المسافة من لندن إذا علمت أيضا أن قطر الكرة الأرضيـــة يساوى ٨٠٠٠ ميلا وأن خط عرض لندن ٥١° ؟

(١٠) إذا علمت أن ظل الشمس فى مكان ما ينعدم فى ظهر أحد أيام السنة ويتجه جنوبا فى ظهر كل يوم آخر فأوجد بالأميال بعد ذلك المكان عن القطب الشمالى .

(١١) فى غرة يناير وصلت الشمس إلى أقصى ارتفاع لها فى السماء الساعة
دقيقة ساعة
١٧ : ١٢ مساء وقد كانت عندئذ ١٦° فوق جنوب الأفق ، ففى أى جزء من انجلترة كان ذلك ؟

ساعات دقيقة
(١٢) مطلع المستقيم لمنكب الجوزاء وميله، هما على الترتيب ٥ ، ٥٠ ، ٧ ½° شمالا فإذا كانت غرفة النوم تطل نحو الشرق ويذهب شخص للنوم كل مساء فى تمام الساعة الحادية عشر ، ففى أى وقت من السنة يرى هذا الشخص منكب الجوزاء مشرقا عندما يذهب للنوم ؟

(١٣) فى اليوم الثالث عشر من ابريل عام ١٩٣٧ كان أقصر طول لظل عمود مساويا لارتفاعه ، ومتجها نحو الشمال ، وقد كان ذلك عندما بدأ
ساعة دقيقة
بروجرام الإذاعة فى الساعة ١٠ : ١٢ بعد الظهر ، ففى أى مملكة قد أخذت هذه القراءات .

(١٤) باستخدام الاسترولاب المنزلى حصل على القراءات الآتية فى بنزانس (Penzance) (خط عرض ٥٠° شمالا وخط طول ٥ ½° غربا) فى اليوم الثامن من فبراير .

	أقل بعد سمتى	الزمن بالتوقيت المتوسط عند جرينتش
منكب الجوزاء	٤٢ ½° من الجنوب	٩,٩٠ مساء
رجل الجبار	٥٨ ½° »	٨,٢٤ »
الشعرى اليمانية	٦٧ ½° »	١٠,٠٠ »

أوجد الميل ومطلع المستقيم لكل نجم وقارن النتائج التى تحصل عليها مع الجداول فى تقويم ويتكر (صفحة ١٤٠) (لاحظ أن التوقيت المتوسط عند جرينتش يختلف عن التوقيت الشمسى الحقيقى مقيسا من الظهر عند جرينتش . إلا أن هذا الاختلاف لا يتجاوز دقائق معدودة . وقد دونت جداول بهذا الفرق لكل يوم من أيام السنة ، فى تقويم ويتكر أى التقويم الفلكى البريطانى . فمثلا فى اليوم الثامن من شهر فبراير يكون الظهر الحقيقى عند جرينتش بعد الظهر بتوقيت جرينتش المتوسط بمقدار ١٤ دقيقة) .

(١٥) بالاستعانة بالرسم اثبت أنه إذا كانت الزاوية الساعية ف للنجم هى الزاوية التى يتحركها النجم منذ عبوره مستوى الزوال (وإذا كانت ف سالبة فهى الزاوية التى يجب أن يتحركها النجم حتى يعبر مستوى الزوال) فإن

مطلع مستقيم النجم (بالساعات) = مطلع المستقيم للشمس (بالساعات) — (الزاوية الساعية بالدرجات ÷ ١٥) + الزمن المحلى (بالساعات) .

(١٦) بالاستعانة بخريطة موضح عليها أبعاد المحيطات أحسب المسافات مقيسة على دوائر عظمى بين الموانى المختلفة التى تربطها طرق بحرية مباشرة .

أوجد المسافة بين لندن ونيويورك ، وبين لندن وموسكو ، وبين لندن وليفربول .

(١٧) فى السادس والعشرين من شهر أبريل ، عند ما كان مطلع المستقيم
دقيقة ساعة
للشمس ١٣ ٢ حصل على القراءات الآتية ، بواسطة آلة منزلية

	الزاوية السمتية	البعد السمتى	الزمن المحلى
رأس التوأم المؤخر	٨٠° غرب الجنوب	٤٥	٩,٤٨ مساء
قلب الأسد	٢٨° » »	٤١	٩,٣٩ »
السماك الرامح	٧° » الشمال	٣١	١٢,٥٠ »

أوجد ميل ومطالع المستقيم لكل نجم وقارن هذه النتائج مع تلك النتائج الدقيقة المعطاة فى تقويم ويتكر عند خط عرض $٥٠\frac{١}{٢}°$ شمالا .

(١٨) للحصول على الموضع المضبوط لخط الزوال ، رسم خط بين عمودين على استقامة الشمس أثناء الغروب يوم ٤ يوليو فى مكان خط عرضه ٤٣° شمالا . عين الزاوية التى يصنعها خط الزوال مع هذا الخط .

(من تقويم ويتكر ، ميل الشمس يوم ٤ يوليو هو ٢٣° شمالا) . أوجد أيضاً زمن الغروب بالتقريب .

(١٩) إذا كان مطالع مستقيم الشعرى اليمانية ٦ ساعة ٤٢ دقيقة وميله $١٦\frac{١}{٢}°$ جنوبا فأوجد بالتوقيت المحلى وقت شروق وزمن غروب النجم فى غرة يناير عند كل من الأماكن الآتية :

الجيزة	خط عرض ٣٠° شمالا
نيويورك	» » ٤١° شمالا
لندن	» » $٥١\frac{١}{٢}°$ شمالا .

تحقق من صحة النتائج بواسطة الرسم .

ملخص القوانين والعبارات الهامة

(١) إذا قيس البعد السمتى شمال سمت الرأس فإنه تؤخذ الإشارة + ، أما إذا قيس جنوب سمت الرأس فإنه تؤخذ الإشارة — . إذا قيس خط العرض أو الميل شمال خط الاستواء فإنه تؤخذ الإشارة + ، أما إذا قيسا جنوبا فإنه تؤخذ الاشارة — ، وفى جميع الحالات :

الميل = خط عرض الراصد + البعد السمتى وقت العبور .

(٢) مطلع المستقيم للنجم = زمن العبور + مطلع المستقيم للشمس فى نفس اليوم

فى ٢١ مارس	مطلع المستقيم للشمس صفر ،	ميل الشمس صفر°
فى ٢٣ سبتمبر	» » » ١٢ ،	» » صفر°
فى ٢١ يونيو	» » » ٦ ،	» » $+٢٣\frac{١}{٢}°$
فى ٢١ ديسمبر	» » » ١٨ ،	» » $-٢٣\frac{١}{٢}°$

(٣) فى المثلث الكروى ا ب حـ

(١) جتا اَ = جتا بَ جتا حـَ + حا بَ حا حـَ جتا ا

(٢) $\frac{\text{حا ا}}{\text{حا اَ}} = \frac{\text{حا ب}}{\text{حا بَ}} = \frac{\text{حا حـ}}{\text{حا حـَ}}$

(٤) إذا قيست الزاوية السمتية لجسم سماوى من النقطة الجنوبية فإن

(١) حا الميل = جتا البعد السمتى . حا خط العرض — حا البعد السمتى — جتا خط العرض . جتا الزاوية السمتية

(٢) حا (الزاوية الساعية) = $\frac{\text{حا البعد السمتى . حا الزاوية السمتية}}{\text{جتا الميل}}$

(٣) عند الشروق والغروب (البعد السمتى = ± ٩٠°)

جتا الزاوية السمتية = — $\frac{\text{حا الميل}}{\text{جتا خط العرض}}$ (أنظر صفحة ٣٨٣)

حا الزاوية الساعية = ± $\frac{\text{حا الزاوية السمتية}}{\text{جتا الميل}}$

الباب التاسع

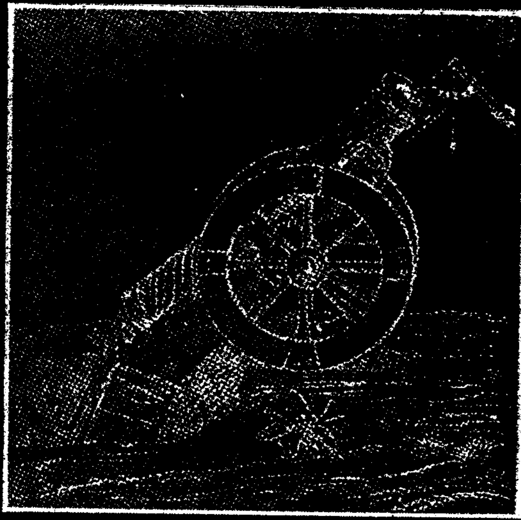
هندســـــة عصر النهضة

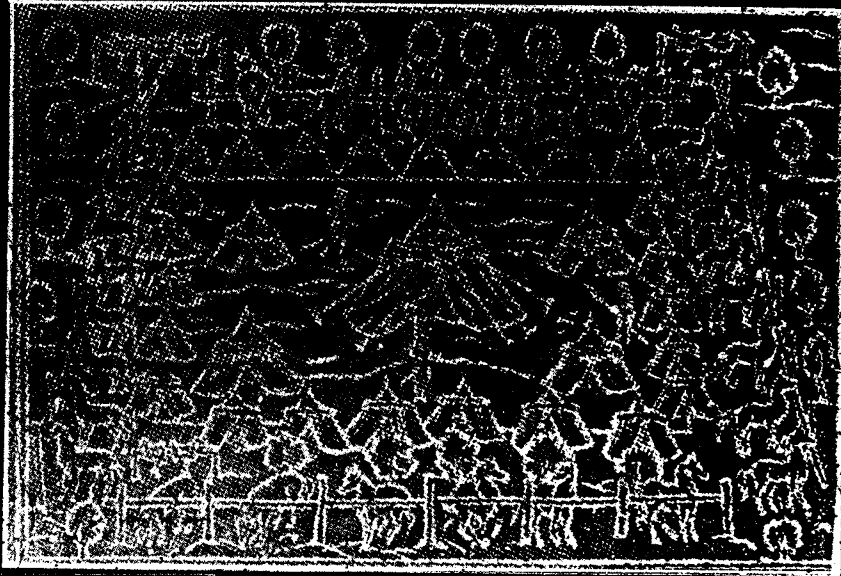
أو

ما هى المنحنيـــــات ؟

كان المنهج الرياضى لجامعة أكسفورد فى القرن الرابع عشر يحوى مسألة « قنطرة الحمير » غير أن الطالب يقف عندها دون الوصول إلى أية نتيجة . وكانت نهاية المنهج هى الفرض الخامس فى كتاب إقليدس الأول من الاثنى عشر كتابا ، ولم تقف دراسات الدول الأسلامية عند إبحاث القرآن اللغوية بل تعدتها إلى كثير من الدراسات العلمانية . أما فى أوربا فلم تكن الحالة كذلك ، إذ كانت الدراسة وقفاً على رجال الدين كما كان حال الكهنة فى عهد قدماء المصريين والشعوب التى سكنت وادى النيـــــل . وفى مدة القرون الأربعة التى تلت ذلك ، لم يزد الأوربيون إلا القليل عما تعلموه من الأقدمين حتى جاء العهد الجديد بتأثيراته التى دفعت الرياضيين للبحث فى نظريات جديدة فى أواخر القرن الخامس عشر ، وكانت أولى هذه العوامل الثلاث المؤثرة هى صناعة الساعات المحمولة على عجل وتبعها إدخال المدنية فى الحروب وثالثها إعداد الخرائط والجداول الفلكية للملاحة ، كل هذا دفع الرياضيين التطور اجتماعيا واستحداث الجديد من الفن وفقاً للأوضاع الحديثة :

وقد سبق أن استحدث الأسكندريون والصينيون حيلا مختلفة بدلا من الساعة الشمسية) منها الساعات المائية التى كانت تسير بإمرار الماء وكان أساس عملها كتلك الموجودة فى شكل (٢) ، أما الساعات التى تدار بواسطة العجلات فأستحداث جديد بدأ فى أواخر القرن العاشر . وكانت الحيـــــاة القروية فى أوربا الشمالية ، كما يذكرنا اشتقاق كلمة ساعة من كلمة جرس الفرنسية (Cloche) وكذا رجال الدين الذين تعودوا دق الأجراس فى الأديرة ،





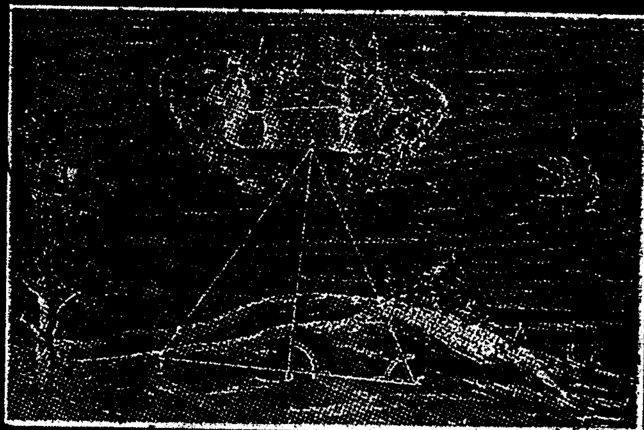
شكل (١٣٠)

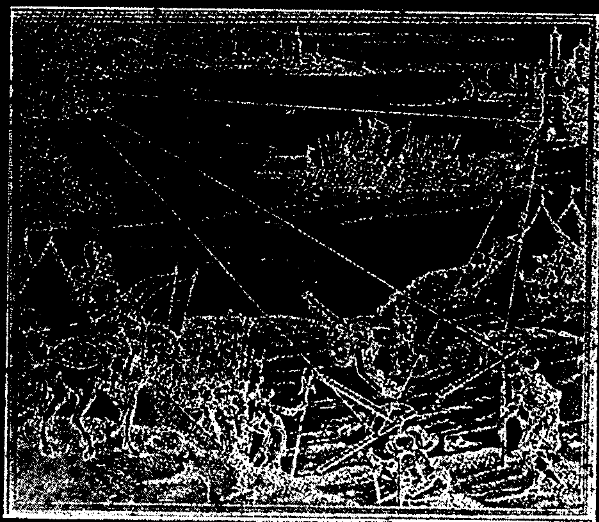
فى الصورة العليا يطبق تارجالينا ، الرياضى العظيم فى العصور الوسطى ، الرياضة للفنون الحربية وذلك فى كتاب نشر فى البندقية سنة ١٥٤٦ والصورة السفلى هى افتتاحية كتاب « مؤلف عن الحسابات الحربية » لمؤلفيه الأخوان ويجز وقد نشر فى لندن سنة ١٥٧٢

مرتبطة حياتهم باستغلال التربة كما فعل زملاؤهم حول النيل المقدس منذ آلاف السنين ، وورثت الكنيسة المسيحية عنهم عملهم الاجتماعى السابق ، وكانت الساعات الشمسية تدلهم على عباداتهم وأعياد ميلادهم واستعملت القناديل والشموع والساعات المائية ، وبدأت الأديرة المؤثرة فى أواخر القرن العاشر فى استعمال الساعات التى لها عجلات تدار بواسطة ثقل خاص وكان فى كنيسة سانت پول فى لندن إحدى الساعات فى سنة ١٢٨٦ ميلادية ، ولم تكن الساعات الميكانيكية تعرض للبيع لاستخدامها فى التوقيت حتى أواخر القرن الرابع عشر . وكانت هذه الساعات فى أول أمرها عبارة عن آلات بدائية ولم يكن من السهل تحديد الأوقات القصيرة إلا بعد أن اخترع جاليليو البندول ، وكان تطبيق هذا المبدأ لتركيب ساعات البندول فى القرن السابع عشر ، مثلا فريداً فى الاكتشاف النظرى الذى سبق التطبيق الصناعى قبل عهد الكهرباء والأصباغ الكيميائية ، ولم تكن الكرونومترات المستعملة فى السفن البحرية قد استكملت دقتها فى تحديد خطوط الطول ، حتى اخترع لزنبرك بعد قرن ولو أن جمارجنير[1] (فريزيوس) الرياضى الهولندى ابتكر الطريقة المذكورة فى الباب الرابع ص١٦٩ عام ١٥٤٠ ميلادية .

وكانت نظرية البندول هى بدء فتح جديد فى الميكانيكا ، وهى ميكانيكا الحركة المقابلة لميكانيكا التوازن فى الأسكندرية ، وبدأ أول تطبيق جدى للاكتشافات الميكانيكية فى الأعمال الكبيرة فى معسكر الأسكندر الأكبر باستعمال المنجنيق ، وتبع ذلك مباشرة التقدم النظرى لميكانيكا التوازن على يدى أرشميدس وتلاميذه ؛ واستعمل المغوليون ، الذين غزوا هنغاريا وبولندا عام ١٢٤١ ، البارود . وأوجد استعمال المدفعية فى الحروب الأوربية فى القرنين الرابع والخامس عشر نوعاً جديداً من المسائل الميكانيكية ، وهى حساب موضع جسم سريع الحركة يمكن دفعه لمسافات بعيدة ؛ كما ساعدتنا ساعة البندول على عمل جهاز لقياس فترات الزمن القصيرة جداً التى يمكن تسجيلها قبلا . وفى بحر قرن بعد اختراع الورق أمكن طبع دفاتر تعليم العلوم

(١) Gemma Regnier (Frisius)





شكل (١٣٠) « أ »

المسابات الحربية

نبين هذه الصور الأربع المأخوذة من كتب قديمة كيف أن حل مسائل الحركة أصبح ضرورة فنية فى الفترة ما بين ستيفنس وجاليليو . الصورة العليا هى من كتاب (ايباريا) لبنينو (بولونيا سنة ١٦٤٥) . والصورة الثانية مأخوذة من عمل زيلر عن الأدوات الهندسية (١٦٠٧) .

العسكرية مبينا فيها طريقة استخدام حساب المثلثات لحساب بعد هدف ما برصد زاويتين كما فى شكلى ١٣٠ ، ١٣٠ ا .

وبذلك كان الرياضى المحترف على ظهر السفن البحرية المجهزة بالمدافع فى رحلاته الاستكشافية الكبيرة فى القرن السادس عشر ، على علم بأكثر من طريقة واحدة لتعيين الموقع والزمن وتكاتفت ثلاث عوامل اجتماعية جديدة فى أن تحتل الهندسة القديمة مكانا بارزاً فى هذا الوسط الاجتماعى حيث أمكن الوصول الى حل ، فدرس الفلكى الراحل فى سفن هنرى الملاح تعاليم بطليموس التى بقيت بعد تدمير الدراسات العربية ، فأستعمل خرائط مسطحة عليها خطوط عرض متوازية كما أشارت أحيانا الى خطوط الزوال الطولية ، وكان أهل النرويج على علم بجهاز المشير إلى الجنوب ، « South pointing » الذى استعمله الصينيون لأكثر من ألف سنة . وعندما بدأت مغامرات السادة التجار ، تحسنت البوصلة البحرية وأصبح لها قيمة علمية وعملية . وقد نتج عن تطور البوصلة ورسم الخرائط كل العوامل الضرورية للهندسة التى بدأ تطبيقها رينيه ديكارت[1] على المعادلات النظرية وذلك فى أوائل القرن السابع عشر ، وعندئذ فاقت دراسة المنحنيات استعمال المسطرة والبوصلة كما وصفها أفلاطون فالعلماء كوبرنيكوس[2] ، وتيكوبراها[3] وكبلر[4] وجاليليو[5] (وقد تسلح الاثنان الأخيران بجهاز التلسكوب) قاموا بعمل قياسات جديدة صحيحة لمدارات النجوم متبعين مواقعها فى شكل بيانى أو خريطة .

وعلى عكس تعاليم أفلاطون التى تشير إلى تحرك الأجسام السماوية فى دوائر كاملة نظراً لأن الدائرة هى الشكل التام الصحيح ، ظهر أن الكواكب تتحرك فى قطاعات ناقصة ، سبق أن درسها العالم أبولونيوس[6] من برجا بواسطة تركيبات اقليدس المبنية على القطاعات المائلة للمخروط ، وقد حل فعلا عمر الخيام معادلات الدرجة الثالثة باستعمال القطاعات المخروطية . وقد وضع

(١) René Descertes
(٢) Copernicus
(٣) Tycnu Braine
(٤) Kepler
(٥) Galileo
(٦) Apollonius of Perga

مارينيوس[1] ومعاصره بطليموس خرائط عليها متوازيات من خطوط الطول وخطوط العرض . وكما استعمل البارود للألعاب النارية قبل انتقاله للحروب ، كذلك عَرَضَتْ جميع اكتشافات الهندسة الكارتيزية للبعض فى عهود سابقة لإستعمالها فى الأجهزة التى أوجدت عهداً جديداً للاختراعات الرياضية .

ويشعر التلاميذ براحة عند الانتقال من إثباتات اقليدس إلى استعمال الرسم البيانى أو يعجب المفكرون لعدم اكتشاف بعض الأسس البسيطة إلا بعد العناء والوقت الطويل ، والحقيقة أن التقدم المثمر لا يتم إلا إذا فكر جماعات عديدة من الناس فى الشىء الواحد ، وربما لا نعجب كثيراً إذا علمنا أن المجتهد والكسول يحتاج كل منهما للآخر ولا يمكننا أن نبنى مستقبلا ذا تقدم ذهنى عال للجنس البشرى ، متى تناقضت حاجيات الإنسان العادية مع حاجيات أهل التفكير النادر . وكلما زادت الصفة التجريدية للرياضة كلما وضحت لنا العلاقة بين الحالة الفكرية والأسس الاجتماعية ، فقد أنتجت الحاجة الاجتماعية ساعة واستغنى بذلك عن البدع الكهنوتية للكاثوليكية ، كما أن نجاح الحروب كان معقوداً لمن كان أقوى فى الاستعداد الميكانيكى وكذا الاستكشافات التى أغنت طبقة التجارة بما فتحت لهم من آفاق جديدة ، والاختراع الرياضى الذى مكّن من قياس حركة البندول ومدى سقوط قبلة المدفع وموقع السفينة فى البحر ومسارات الأجسام السماوية — الموقع والقياس — يقع الاختلاف الأساسى بين الهندسة الكارتيزية وهندسة اقليدس فى أن كل كمية (أو مقدار) لها أيضاً اتجاه أو موضع متصل بها ، وعلى ذلك فليس الخط هو مجرد وحدات طولية . بل وحدات طولية عديدة مرسومة فى اتجاه خاص بالنسبة لخطوط أخرى ، وليست المساحة مجموعة من وحدات السطح بل هى الفرق بين وحدات عديدة من السطح فى موقع ما ووحدات أخرى فى موضع آخر (شكل ١٠٥) فإذا قيل إن الخط يوصف باتجاهه وبمقداره فهو تعبير صحيح فى لغة النحو

(١) Marinus of Tyre

لأن جميع الكميات فى الهندسة الكارتيزية لها إشارة متصلة بها + أو — تشير إلى الاتجاه التى تقاس فيه . واستعمال العلامات بمعنى الجهة أو الموقع هو تطبيق بسيط لاستعمالها البدائى الذى يعنى الجمع أو الطرح وربما كان من السهل استعمالها بهذا المعنى فى أى وقت فى الثلاث آلاف سنة التى سبقت ديكارت لو كان تطور الرياضة مستقلا حقيقة عن الإرث الاجتماعى .

ولتفسير كيف ينشأ هذا بصورة طبيعية من الجمع والطرح ، سنقتصر أول الأمر على دراسة الحركة فى خط مستقيم . يبين شكل (٣) طريقا مستقيما ممتدا شرقا وغربا من فندق قديم فى قرية انجليزية ويسمى « بادجر وباجيبس »[1] وتقع كنيسة القرية على بعد ٤٠٠ ياردة من الجهة الشرقية كما يوجد فندق ثان على بعد ٤٠٠ ياردة من الجهة الغربية ، ولنفرض أن سائحاً قام بعد استراحة فى الفندق الأول قاصداً حضور القداس بالكنيسة ، إذن كل خطوة يخطوها تضيف ياردة إلى المسافة التى يقطعها شرق الفندق وتكون المسافة المقطوعة عند وصوله إلى الفندق هى :

٤٠٠ ياردة

والآن دفعه الظمأ إلى العودة إلى الشراب ، فإذا قطع ٣٠٠ ياردة عائداً أى فى الاتجاه الغربى فما موضعه الآن ؟ باستعمال طريقة الرموز ، أمكن القول بأنه على بعد

٤٠٠ — ٣٠٠ = ١٠٠ ياردة

من المكان الذى بدأ منه السير . أى أنه قطع ٣٠٠ ياردة من المسافة الشرقية بين مكانه الأصلى والكنيسة وإذا استمر فى السير ١٠٠ ياردة أخرى ، تكون المسافة بينه وبين الفندق هى :

٤٠٠ — ٤٠٠ = صفر ياردة

---

(١) The Budger and Bagpipes

أى أنه سيكون فى مكانه الذى بدأ منه السير ، لكنه ربما تذكر عندئذ حلاوة البيرة بالفندق الثانى « السلحفاة والشوكة » .

شكل (٣) معنى الجيروند

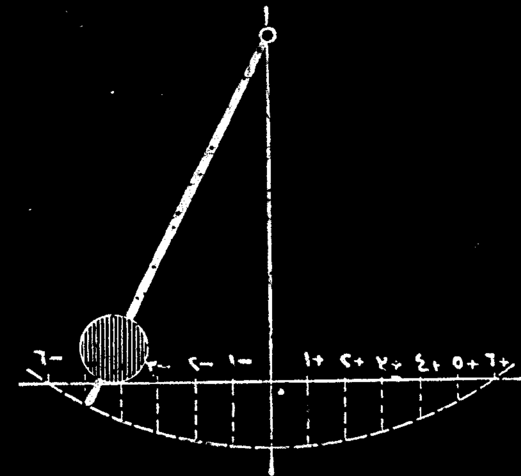
فاذا استمر فى السير ٤٠٠ ياردة متجا غرباً فانه يصل إلى الفندق الثانى وكأنه قطع ٨٠٠ ياردة من قيامه من الكنيسة . وإذا اتبعنا ما ذكرناه سابقاً وجدنا أن المسافة التى قطعها من نقطته الاصلية هى الآن

٤٠٠ — ٨٠٠ = — ٤٠٠ ياردة

إذن لمعرفة مكانه الآخير مما علمناه من حركاته ، وجب أن نكتب ٤٠٠ ياردة غرب المكان الذى بدأ منه فى الصورة — ٤٠٠ متى كتبنا ٤٠٠ ياردة شرق المكان الذى بدأ منه فى الصورة + ٤٠٠ ويكون معنى « + » هو نفس معناها العادى وكذلك معنى « الجيروند » متى كان معنى التعبير + ا هو من وحدات الطول شرقا أو ; من وحدات الطول مأخوذة إلى اليمين ، ومعنى التعبير

— ! هو ١ من وحدات الطول غرباً أو ١ من وحدات الطول مأخوذة إلى اليسار .

ولا يشعر المرء لأول وهلة بفائدة هذه الإضافة الى قواعد النحو ، وربما لا تكون لها فائدة متى كان الانسان يقضى كل وقته فى الكنائس أو المقاهى ومعه ساعة مائية يحسب بها مرور الزمن المستمر . وعلى كل حال يبدأ العصر الاجتماعى الذى نحن فيه الآن بنذيره « الزمن أيها السادة : الزمن ! » ، إنه عصر ساعة البندول . يشير شكل ١٣٢ إلى بندول يدق كل ثانيتين ، وتُمَثل إزاحتا طرفه ، أعى المسافة الأفقية مقيسة من موضع سكونه أى عنـــدما تتوقف الساعة ، بالكميتين « + » 6 « — » ، وطول الذبذبة الكاملة ١٢ سنتيمترا أو ± ٦ سم من موضع الأتزان . لنفرض أننا نستطيع تسجيل موضعه بصور متتابعة بواسطة آلة تصوير مزودة بفتحة سريعة القلق جدا . فاذا بدأنا من نهاية + ٦ وحدات إلى اليمين ، أمكننا كتابة جدول قراءات كالآتى :



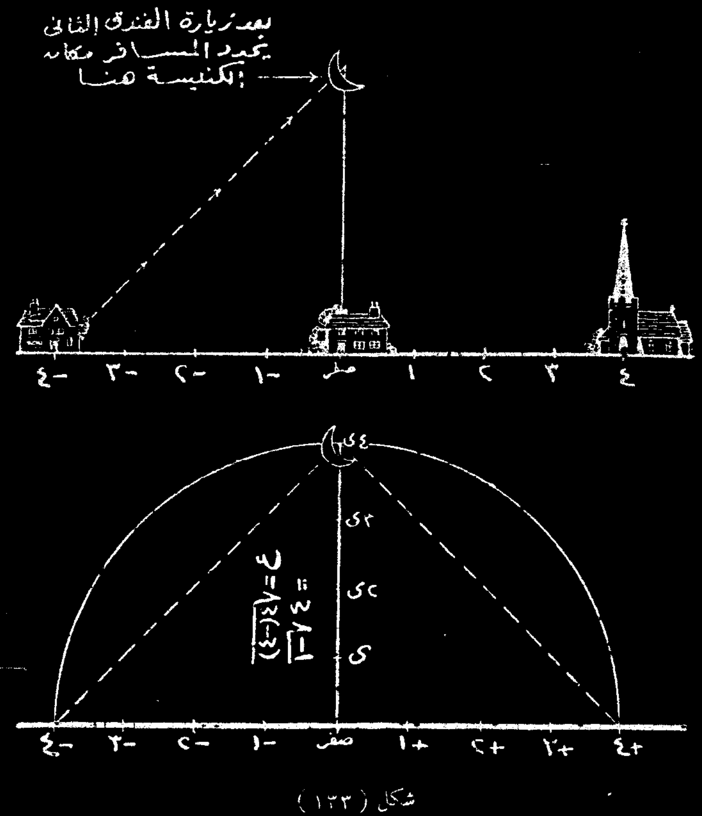
شكل (١٣٢) إزاحة بندول الساعة من موضع السكون

الزمن بالثانية	المسافة الأفقية المقطوعة (مقدرة بالسنتيمترات)	الإزاحة الأفقية (مقدرة بالسنتيمترات)
صفر	صفر	+ ٦
,٣٧	١	+ ٥
,٥١	٢	+ ٤
,٦٦	٣	+ ٣
,٨٠	٤	+ ٢
,٩٠	٥	+ ١
١	٦	صفر
١,١٠	٧	— ١
١,٢٢	٨	— ٢
١,٣٣	٩	— ٣
١,٤٤	١٠	— ٤
١,٦٢	١١	— ٥
٢,٠٠	١٢	— ٦
٢,٣٦	١٣	— ٥
٢,٥٢	١٤	— ٤
٢,٦٤	١٥	— ٣
٢,٨٠	١٦	— ٢
٢,٩٠	١٧	— ١
٣,٠٠	١٨	صفر
٣,١٠	١٩	+ ١

يمكن أن نسمى العمود الثانى الطريقة القديمة لتسجيل موقع البندول ، أما العمود الثالث فهو الاحداثى الكرتيزى وفائدة معرفة نوع حركة البندول فوراً . ويتذبذب البندول إلى اليمين وإلى اليسار حول الموضع الذى يشغله عند ما تتوقف الساعة ثم يعود إلى موضعه الأصلى مثل الساعة الشمسية التى تتذبذب حول الأفق .

ولمعرفة ما تم من أمر الزيارة ، نعد إلى باب الفندق حيث المسافر يقرر العودة وهو فى نشوة الخمر ، محاولا الصعود فوق حائط الفندق بينما يتصور ضوء

القمر فى سمت الكنيسة ، وإذ هو يخفق فى أداء صلاته ، يفسر لنا معنى تعبير آخر هو $\sqrt{-1}$ أو كما نكتبه فى صورة مختصرة « ت » . ولمعرفة لماذا نعنى ت ؛ (أو ؛ $\sqrt{-1}$) ؛ من الوحدات مقيسة إلى أعلا نحو السماء حيث دفعه خياله ، يجب أن تتذكر نظرية اقليدس للوسط الهندسى (قارن بين شكلى ١٣٣ ، ٦٤) من نظرية ٨ فى الباب الرابع علمنا أن طول العمود الساقط من الزاوية القائمة على الوتر يساوى الجذر التربيعى لحاصل ضرب جزئى الوتر الذى يقسمه العمود أما نظرية ١٠ فهى تبين أن المثلث الذى أحد أضلاعه قطر فى دائرة والرأس المقابلة تقع على الدائرة هو مثلث قائم الزاوية . فإذا رسمنا نصف دائرة مركزها هو منتصف المسافة بين الفندق الثانى والكنيسة ،



شكل (١٣٣)

فإننا نحصل على مثلث قائم الزاوية بالتوصيل بنقطة تقع رأسيا فوق المركز . فى شكل ١٣٣ وحدة القياس هى ١٠٠ ياردة ، وعلى ذلك فالكنيسة على بعد + ٤ والفندق الثانى على بعد — ٤ من الوحدات ، عن المركز . فإذا كان ع هو الارتفاع الرأسى ، ا البعد الأول ، ب البعد الثانى ، فإن

$$ع = \sqrt{\text{ا ب}}$$

فى الهندسة الاقليدية لا نعتبر الاتجاه مطلقاً وعلى ذلك

$$ع = \sqrt{٤ \times ٤} = ٤$$

وإذا أردنا أن نضع ما فات اقليدس فى الهندسة ، وصلنا إلى نتيجة غريبة وهى :

$$ع = \sqrt{-٤ \times +٤}$$

$$= ٤\sqrt{-١ \times +١}$$

$$= ٤\sqrt{-١}$$

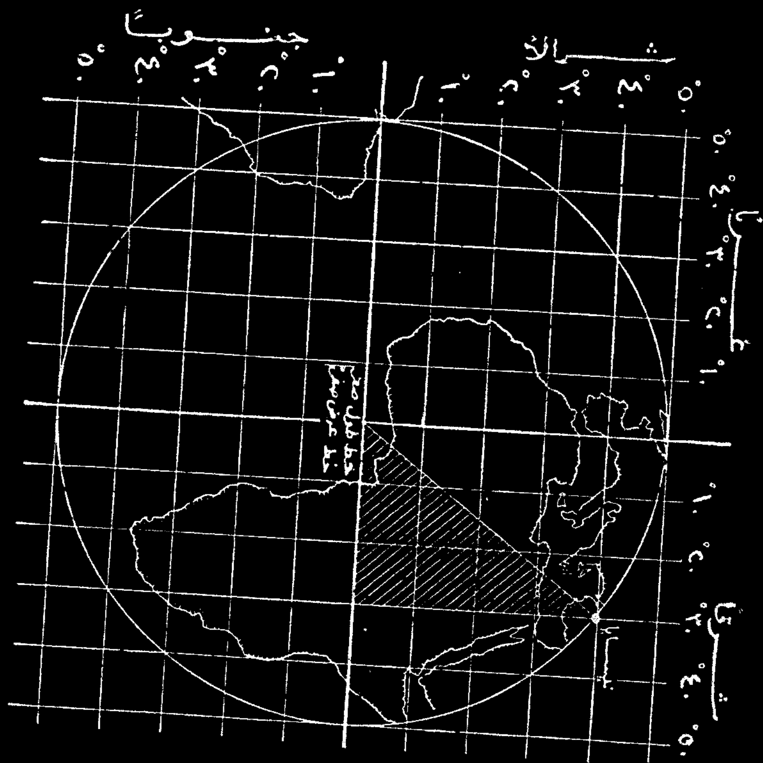
$$\text{أو} \qquad = ٤\,ت$$

وعلى ذلك ٤ ت من الوحدات أو أربع وحدات خيالية تتفق مع موقع الكنيسة بالنسبة لخيال المسافر ، أو بعبارة أخرى ت من الوحدات طولها ١ ، ٢ ت من الوحدات طولها ٢ من الوحدات ، ٣ ت من الوحدات طولها ٣ من الوحدات وجميعها مقيسة إلى أعلا فى الهواء بدلا من + ١ ، +٢ ، + ٣ شرقا أو — ١ ، — ٢ ، — ٣ غربا

وقبل أن نذكر مثالا لتوضيح استعمال هذه اللغة الرياضية فى وصف العالم الحقيقى (الباب العاشر من ص ٤٩١ الى ص ٤٩٨) يحسن من باب المتعة أن نستعيد موقف أحد الرياضيين المحترفين المناصرين لنيوتن ، عندما كان من الصعب معرفة قائمة الأعداد التخيلية . هذا الرياضى هو والس ، فلكى يدافع عن اقتراحه بأنه يمكن أن يكون لهذه الأعداد التخيلية مثل ٢ ت ، ٣ ت معنى هندسى ، وقارن والس بينها وبين الأعداد السالبة فقال : ليس هذا الغرض

عديم المنفعة أو غير معقول متى فهم على حقيقته ، فمع انه فى الرموز الجبرية يأتى بكميات أقل من لاشىء ، إلا أنه عند التطبيق فى الطبيعة يدل على كمية حقيقية كما لو كانت الاشارة + لكن تفسر بالمعنى المضاد ، وهذه الكلمات لكبير رياضى كمبردج فى القرن السابع عشر تتباين تباينا غريبا مع كلمات هذا الزعيم الرياضى عند وفاته التى أشار فيها إلى أن جميع كتشافاته الرياضية كان فيها نفع لأى إنسان ماعدا نفسه .

تطويق العالم — عندما بيّنا كيف أن استعمال « + » ، « — » فى تعيين الاتجاه والموضع هو نتيجة طبيعية لطريقتنا الأولى لاستخدامها ، تركنا المسافر فى الطريق على رجليه وتركناه حراً يبحث عن السماء بالطريقة التى يسمح بها خياله . والآن دعنا نرى كيفية استعمالها فى وصف حركات السفن فى الطرق البحرية التى ليس بها موانع حتى يستطيع الملاح أن يسلك طريقا مستقيما . فى شكل ١٣٤ بيّنا عالم الملاحات الكبرى مُسقطا على موازيات للعرض وخطوط زوال للطول والأخيرة ليست متوازية على سطح الكرة إذ تتقابل جميعها عند القطبين . ويقسم سطح الكرة بواسطة دوائر موازية لدائرة خط الاستواء بحيث يكون عدد الدوائر فوق خط الاستواء ٩٠ دائرة وتحته ٩٠ دائرة ، وبذلك إذا اتجهنا من القطب الشمالى إلى القطب الجنوبى وعدنا مرة أخرى إلى مكان الابتداء فإننا نقطع ٣٦٠ من هذه الدوائر . تسمى هذه الدوائر خطوط العرض أو ٣٦٠ درجة عرضية . وتقسم الخطوط التى تصل القطبين أى خط عرض مواز لخط الاستواء إلى ٣٦٠ جزءاً متساويا أو درجة طولية من صفر° إلى ١٨٠° شرق خط الزوال المار بجرينتش ومن صفر° إلى ١٨٠° غربه ، وإذا اعتبرنا شكل المسقط فان خطوط الزول ترسم عادة متوازية مثل الخطوط المتوازية التى تناظر دوائر العرض ، أى كما لو كان العالم مسطحا ، غير أن ذلك يؤدى إلى خطأ كبير فى حساب المسافات الطويلة التى لا يمكن حسابها بدقة إلا باستخدام المثلثات الكروية كما هو مبين فى الباب الثامن ص ٣٧٢ ، إلا أننا سنهمل فى الوقت الحاضر هذا التصحيح ونعتبر العالم كما لو كان حقيقة مسطحا .



شكل (١٣٤)

لكى نعين موضعنا فى البحر أو على الأرض ، نحتاج إلى نقطة ثابتة ننسب إليها جميع مقاييسنا مثل فندق البادجر وفندق الباجييس فى المثال السابق . وتؤخذ عادة فى الملاحة نقطة عند خليج جينيا حيث يوجد ماء فى كل مكان ولا شىء للشرب ، وهذا هو موضع خط زوال جرينتش ، أعنى الخط الذى درجة طولة صفر ويقطع خط الأستواء (درجة عرض صفر) . هذا الخط هو مركز العالم فى حساب الملاحين . يمثل شكل ١٣٤ دائرة مركزها نقطة تقاطع خط طول صفر ونصف قطرها يكافىء ٥٠° طول أو عرض ، وعلى ذلك تكون أقرب مدينة من هذه الدائرة هى مدينة نيميا[1] و Bithynia

(٢) Nicaea

والواقعة على خط طول ٣٠° شرقاً وخط عرض ٤٠° شمالا تقريبا . وسنرى الآن كيف أن هذه المدينة التى لها اعتبارها لأسباب أخرى ستساعدنا فى توضيح أن رسم الخرائط جعل من الممكن أن تتحد الهندسة مع الجبر . فبعد مائة عام من هدم مدارس العلم فى الأسكندرية بواسطة الرهبان ، اختيرت مدينة نيسيا مركزاً لأبحاث حسابية فى خواص العدد ثلاثة ، والنتائج المعروفة لهذه البراعة النادرة أكثر صعوبة فى إدراكها عن جدول اللوغاريتمات الطبيعية . ولا شك أن لنا حظاً مضاعفاً فى قدرتنا على تعلم الحساب التجارى لعهد الأصلاح بدلا من هذه النتائج ، إذ تطلبت عقوبة الإعدام للخطأ فى استعمال العقيدة النيسية الكثير من الضحايا . وفى القرن الثالث عشر انتقل مركز الامبراطورية الرومانية من استنبول إلى نيسيا نتيجة هجوم وقع من الصليبيين الذين اعتبروا أن طريقة تحليل العدد ثلاثة البيزنطية طريقة ضالة عن الدين .

إذا اعبرنا خريطة شكل ١٣٤ حسب قيمتها الإسمية . فما هو بعد مركز العالم للحساب التجارى عن مركز العالم للحساب الفلكى ؟ إن الإجابة عن هذا السؤال ليست بالصعبة ، فالمستقيم (س) الواصل بين المركزين هو وتر مثلث قائم الزاوية ، ضلعيه الآخرين هما ٣٠ درجة طول ، ٤٠° درجة عرض. فإذا كان محيط الأرض هو ٢٥٠٠٠ ميل ، ودرجة واحدة عرض أو طول (عند خط الاستواء) يقابلها $\frac{٢٥٠٠٠}{٣٦٠}$ أو ٦٩½ ميلا ، فإن طول ضلعى المثلث هما ٣٠ × ٦٩½ ، ٤٠ × ٦٩½ ميلا . إذن حسب ما يمكن أن نسميه الآن نظرية البوصلة الصينية

$$\text{ر}^{٢} = (٣٠ + ٦٩\tfrac{١}{٢})^{٢} + (٤٠ \times ٦٩\tfrac{١}{٢})^{٢}$$

$$= (٦٩\tfrac{١}{٢})^{٢}(٣٠^{٢} + ٤٠^{٢})$$

$$\therefore \text{ر} = ٦٩\tfrac{١}{٢}\sqrt{٩٠٠ + ١٦٠٠}$$

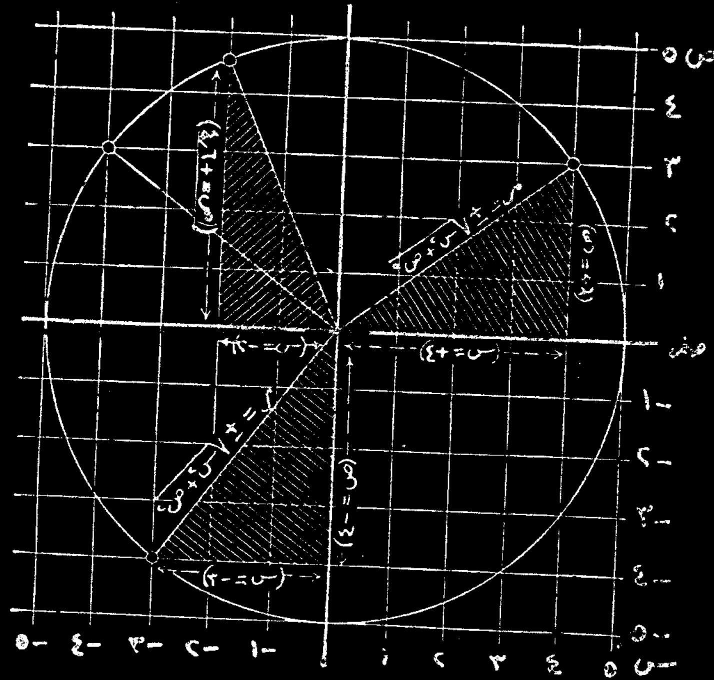
$$= ٦٩\tfrac{١}{٢}\sqrt{٢٥٠٠}$$

$$= \pm ٦٨\tfrac{١}{٢}\,(٥٠) \quad +$$

$$= \pm ٣٤٧٥ \text{ من الأميال}$$

+ الخطأ نتيجة إنحناء الأرض هو حوالى ٣٪ ويمكن تبين ذلك باستخدام صيغة ص ٣٠٢ .

تذكرنا هاتين العلاقتين فى هذه الحالة بأن ر ، وهى المسافة بين المركز والمحيط لا تتغير إذا قيست فى اتجاه مضاد لأى مكان على محيط الدائرة فى المحيط الأطلنطى الجنوبى . وتفسر لنا عملية الحساب البسيطة هذه كيفية وصف



شكل (١٣٥) المعادلة الكرتيزية للدائرة

عند أية نقطة على محيط الدائرة التى نصف قطرها ر ، تتحقق العلامة $\text{ر}^{٢} = \text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢}$

أى أن $\text{س}^{٢} = \text{ر}^{٢} - \text{ص}^{٢}$ ، $\text{ص}^{٢} = \text{ر}^{٢} - \text{س}^{٢}$

أى أن $\text{ر} = \sqrt{\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢}}$ ، $\text{س} = \sqrt{\text{ر}^{٢} - \text{ص}^{٢}}$ ، $\text{ص} = \sqrt{\text{ر}^{٢} - \text{س}^{٢}}$

إذن إذا كان ر = ٥ ، س = −٢ فإن

$$\text{ص} = \sqrt{٥^{٢} - (-٢)^{٢}} = \sqrt{٢٥ - ٤} = \sqrt{٢١} = \pm ٤,٦ \text{ تقريباً}$$

الأرقام فى هندسة عصر النهضة ، فالخط الكرتيزى ، لا يشبه الخط عند اقليدس الذى يتساوى فى كل الحالات بالرغم من كونه فى مواضع مختلفة . بل

هو خط ممتد فى اتجاه معلوم ومبتدىء من نقطة معلومة . وفى شكل ١٣٥ أعيد رسم الدائرة السابق رسمها فى شكل ١٣٤ وبها أربعة أنصاف أقطار وليس هنـــاك إلا اختلاف لفظى بين الدائرتين ، فتسمى أية مسافة موازية لخط الأستواء ± س من الوحدات ، وأية مسافة موازية لخط طول ± ص من الوحدات[1] . وفى الشكل :

١٠ درجات طولية	شرقية	تناظر	+ ١	وحدة	(س = + ١)
١٠ » »	غربية	»	— ١	وحدة	(س = — ١)
١٠ درجات عرضية	شمالية	تناظر	+ ١	وحدة	(ص = + ١)
١٠ » »	جنوبية	»	— ١	»	(ص = — ١)

وكل ما على المرء أن يتـــذكره ، هو أن يترجم ، شرق وغرب وشمال وجنوب ، بالإشارتين ± والخطوط الطولية والعرضية بالمقدارين س ، ص على الترتيب . ومن ذلك يتضح أن أى نصف قطر يمتد شمال خط الاســتواء حيث ص = صفر وشرق خط زوال جرينتش حيث س = صفراً ، يكون وتر المثلث القائم بالزاوية وقاعدته + س من الوحدات وارتفاعه + ص من الوحدات ، أى أن

$$\text{ر}^{2} = \text{س}^{2} + \text{ص}^{2}$$

وتبعا لقاعدة ديوفانتس[2] . نحصل على العلاقات الآتية للأوضاع الثلاثة الباقية من الدائرة .

شمال غرب $\quad \text{ر}^{2} = (-\text{س})^{2} + \text{ص}^{2} = \text{س}^{2} + \text{ص}^{2}$

جنوب شرق $\quad \text{ر}^{2} = \text{س}^{2} + (-\text{ص})^{2} = \text{س}^{2} + \text{ص}^{2}$

جنوب غرب $\quad \text{ر}^{2} = (-\text{س})^{2} + (-\text{ص})^{2} = \text{س}^{2} + \text{ص}^{2}$

---

(١) لا تخلط بين مقاييس ص فى شكل ١٣٥ ومقاييس ت س فى شكل ١٣٣ . ففى شكل ١٣٥ تقابل مقاييس س المسافات المأخوذة على طريق عمودى على الطريق الذى يصل بين الفندقين فى شكل ١٣٣ . لا المسافات المأخوذة إلى أعلى (ت س) فى مستوى عمودى على المستوى الواقعة فيه . فالاختلاف بينهما اختلاف اصطلاحى فقط .

(٢) Diophantus

وعلى ذلك عند أية نقطة نقطة على الدائرة

$$\text{ر}^{2} = \text{س}^{2} + \text{ص}^{2}$$

أو $\quad \text{ر} = \sqrt{\text{س}^{2} + \text{ص}^{2}}$

ويجب أن نكون على علم بمعنى هذا إذا ما استبدلناه بجبر الهنـــدوس المألوف البليغ ونحصل على الآتى :

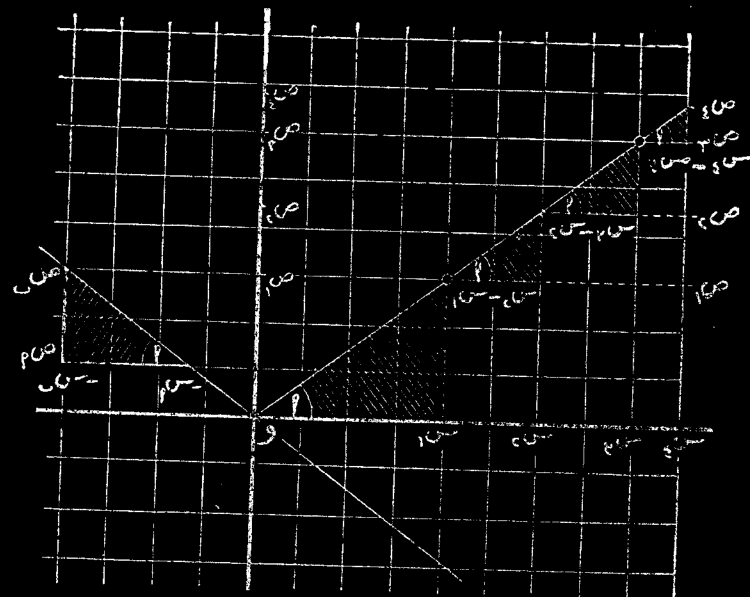
الدائرة فى الهندسة الكرتيزية ، هى شكل يكون فيه بعد أية نقطة علية عن نقطة ثابتة تسمى المركز هو الجذر التربيعى لمجموع مربعى البعــدين الرأسى والأفقى عن المركز وبذلك يكون فى هندسة عصر النهضة تعريف أى شــكل معادلة جبرية ، فمثلا الدائرة هى الشكل الذى معادلته :

$$\text{ر} \sqrt{\text{س}^{2} + \text{ص}^{2}}$$

وتسمى المعادلة الكرتيزية للدائرة التى مركزها عند النقطة س = صفراً ، ص = صفراً .

وهناك شكل آخر مألوف يوضح الفرق بين وجهتى النظر الأقليـــدية والكارتيزية ، هذا الشكل هو المثلث القـائم الزاوية فأى خط مستقيم مرسوم حسب النظام الكرتيزى ، ومار بنقطة تقاطع خط طول (س) وخط الاستواء ونقطة تقاطع خط عرض (ص) وخط زوال جرينتش ، هو وتر مثلث قائم الزاوية ارتفاعه خط طول وقاعدته خط عرض .

وإذا مر الخط بمركز العالم ، أعنى نقطة تقاطع خط جرينتش وخـــط الاستواء أو ما نسميها الآن نقطة الأصل ، فإن أى مثلث قائم الزاوية ، أحد أضلاعه جزء من هذا الخط وضلعاه الآخران يقعان على خطى طول وعرض ، يشابه أى مثلث آخر قائم الزاوية أحد أضلاعه جزء آخر من هذا الخط والضلعان الآخران واقعان على خطى طول وعرض . ويظهر ذلك جليا إذا قورنت مجموعتا المثلثات الواقعة على اليمين وعلى اليسار فى أسفل شكل ١٣٦ مع شكل ٤٣ لتوضيح نظرية د فى الباب الرابع . ولو كان الخط المار بنقطة الأصل مثل ر ل فإن موضع وحجم المثلث القائم الزاوية الذى رأسه ا عند نقطة الأصل وقاعدته س وارتفاعه ص ، يتعين تماما بالمعادلة .



شكل (١٣٧) ميل المستقيم كعامل تفاضل

$$\frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{(-\text{س}_2) - (-\text{س}_1)} = \frac{\text{ص}_3 - \text{ص}_2}{(-\text{س}_3) - (-\text{س}_2)} \quad \text{الخ}$$

$$\text{أى} \quad - \frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1}$$

إذن ميل المستقيم الذى يميل بنفس الزاوية ا على الخط الأفقى مأخوذاً على يسار نقطة الأصل يساوى عدديا ميل المستقيم الذى يميل بنفس الزاوية على الأفقى مأخوذاً على يمين نقطة الأصل ولكن يختلف عنه فى الاشارة .

رسم مسار القذائف — لقد أطلقنا على الهندسة الحديثة اسم هندسة عصر النهضة لننبه إلى الحالة الاجتماعية التى نشأت فيها ، ولقد لاحظنا أن هندسة رينيه ديكارت حوت أشياء لم تتعرض لها هندسة اقليدس فهى تذكر الموقع الذى يشغله شكل فى الفراغ . وسنرى الآن أنها أوجدت مكانا لشىء آخر لم يذكره إقليدس فيمكنها أن تدخل الزمن فى الحساب ، وهى فى كلا الحالتين تتصل إتصالا وثيقاً بالتطورات الفكرية العظيمة التى صحبت الإصلاح

ولما كانت المثلثات القائمة الزاوية ، وأحد أضلاعها جزء من مستقيم معلوم والأخرى موازيات لخطوط طول وعرض، متشابهة فإننا نستنتج من شكل ١٣٧ أن

$$\frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1} = \text{طا ا} = \frac{\text{ص}_3 - \text{ص}_2}{\text{س}_3 - \text{س}_2} = \frac{\text{ص}_4 - \text{ص}_3}{\text{س}_4 - \text{س}_3}$$

أى أن ميل أى مستقيم يساوى خارج قسمة الفرق بين الاحداثيين الصاديين لأى نقطتين عليه على الفرق بين الاحداثيين السينيين لهما ، أو

$$\text{طا ا} = \frac{\text{الفرق فى ص}}{\text{الفرق فى س}}$$

وسنكتب هذه العبارة فى الصورة $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ عندما تكون النقطتان قريبتان جداً من بعضهما وبذلك يكون الفرق أصغر من أن يمكن قياسه . ويجب أن نتذكر أن ء ص لا يعنى ء مضروبة فى ص بل هى مسافة رأسية صغيرة جداً وبالمثل ء س لا يعنى ء مضروبة فى س بل يعنى المسافة الأفقية المقابلة والصغيرة جداً . إذن معادلة المستقيم يمكن كتابتها فى الصورة .

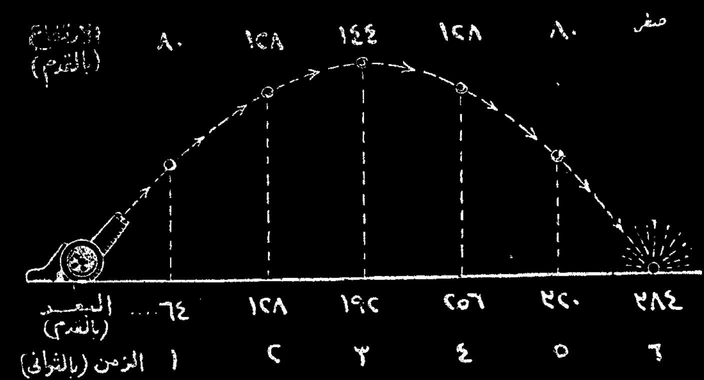
$$\text{ص} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} \cdot \text{س} + \text{ب}$$

وستمدنا كتابة معادلة الخط فى هذه الصورة فى الباب الثانى ، بمفتاح نيوتن لقياس الحركة . وعندما نكتب ظا ا فى الصورة $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ فإنها تدل على المعامل التفاضلى للكمية ص ، ويمكنك أن تتبين من الرسم أن النسبة أو الميل $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ لا يتغير مهما كانت ء ص ، ء س صغيرتين .

والملاحظة الهامة الثانية فى شكل ١٣٧ ، هى وجود مستقيم آخر يميل بنفس الزاوية ا على خط الاستواء ولكن من الجهة الأخرى . فى هذه الحالة يكون الميل

البروتستنتى . ولو أن ديكارت كصاحبه ايرازمس[1] الذى وضع أسس دراسة الإنجيل البروتستنتية وساعد على تقدم المبادىء الحرة للعصر الأخير ، مات قبل أن ينكر حقيقة العقيدة الرومانية .

ولم يتم الاصلاح بالدراسة الانجيلية وحدها ، إذا كانت أوربا تمزقها الحروب التى لعبت فيها المدفعية دوراً هاماً ، وكان عصر خطة البارود مادام الانتصار العسكرى يتوقف على استنباط فن جديد . وعندما استعمل المدفع لأول مرة فى القرن الثالث عشر ، كان الغرض منه القضاء على روح العدد المعنوية واستخدم فى القرن السادس عشر كآلة شديدة للتدمير ، وكانت الرغبة فى طلق المدفع



شكل (١٣٨) مسار القذيفة

طلقاً يساعد على دفع القذيفة إلى مكان خاص وكيفية معرفة المسافة ، سبباً فى تطور العقيدة الرياضية فى فن الحرب .

شكل ١٣٨ هو الرسم البيانى للمسألة الأساسية فهو يبين مسار قذيفة رأسياً وأفقياً . وليس من الضرورى أن يكون مقياس رسم الارتفاع الرأسى مماثلا لمقياس رسم المسافة الأفقية إذا كان ذلك مناسباً فى الرسم وسترى أن كل موضع للقذيفة المتحركة ، مثل كل موضع للسفينة المتحركة ، له احداثيتان إلى أعلا مقيسة من سطح الأرض (+ص) وتناظر خط العرض الشمالى . والفرق بين الرسم البيانى لقذيفته والخريطة العادية هو أننا أضفنا إليه شيئاً لم تحتو

(١) Erasmus

عليه الخريطة ، فقد وضعت الخرائط للسفن المختلفة التى تسير بسرع متفاوتة لذلك لا يدخل الزمن فى حسابها وتهتم فقط بإظهار موضع السفينة . ولقد بينا فى الرسم البيانى للقذيفة الزمن الذى يمضى بين انطلاق القذيفة واللحظة التى تمر فيها بالنقط الأفقية المختلفة المناظرة درجات الطول .

وعلى ذلك يمكن أن نعتبر إحداثيات أية نقطة أثناء مسار القذيفة الآتى :

(ا) الارتفاع الرأسى = +ص ، المسافة الأفقية = + س

(ب) » » = +ص ، الزمن الذى يمضى بعد انطلاق القذيفة = + س

وبعبارة أخرى يمكننا أن نستخدم النظام الكرتيزى لتمثيل مرور الزمن كما فى شكل ١٣٩ حيث وحدة القياس على محور الصادات تمثل ٦٤ قدماً ووحدة القياس على محور السينات تمثل ثانية واحدة . يسمى منحنى هذا الشكل بالقطع المكافىء . وترسم القذيفة قطعاً مكافئاً بالضبط كتعريف الرياضيين لها متى انطلقت فى فراغ أما فى الهواء فمسارها قريب جداً من القطع المكافىء ولا بد من إحداث بعض "تصحيحات" متى استعملنا القطع المكافىء الرياضى كنموذج الورق لرام ماهر . ولقد أخذنا قيما فى الشكل المرسوم لتوضيح التعريف الرياضى . ولكن كباقى الحيل العددية فهو وصف تقريبى لما يحدث فى العالم الحقيقى . وبوضع القيم فى جدول يمكننا تكوين معادلة القطع المكافىء مرة أخرى بقليل من التجربة بالأعداد . وعلى ذلك نجد ما يأتى :

س	ص	٣س/٢	س٢	س٢/٤	(٣س/٢ − س٢/٤)
٥	٠	٠	٠	٠	٠
١	١ ١/٤	١ ١/٢	١	١/٤	١ ١/٤
٢	٢	٣	٤	١	٢
٣	٢ ١/٤	٤ ١/٢	٩	٢ ١/٤	
٤	٢	٦	١٦	٤	
٥	١ ١/٤	٧ ١/٢	٢٥	٦ ١/٤	
٦	٠	٩	٣٦		

ومعادلة القطع المكافىء المفتوح إلى أسفل هى :

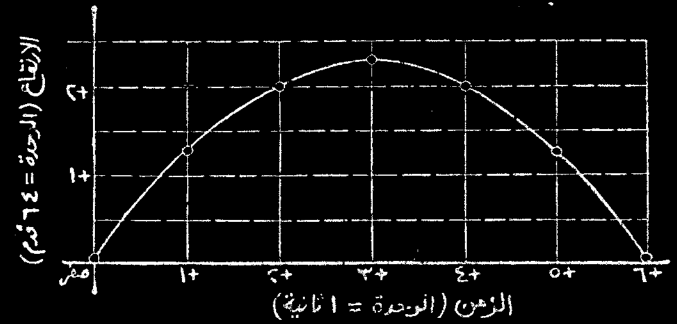
$$ص = ا س^{٢} + ب س + ح$$

وفى هذا المثال ا = $-\frac{١}{٤}$ ، ب = $\frac{٣}{٢}$ ، ح = صفر وهذا واضح من الجدول.

وبما أن وحدة الرسم على محور الصادات تمثل ٦٤ قدماً ، إذن يجب ضرب قيمة ص التى نحصل عليها من المعادلة فى ٦٤ لكى نحصل على الجواب الصحيح.

وبنقل نقطة الأصل نحصل على معادلة أبسط بكثير من المعادلة السابقة :

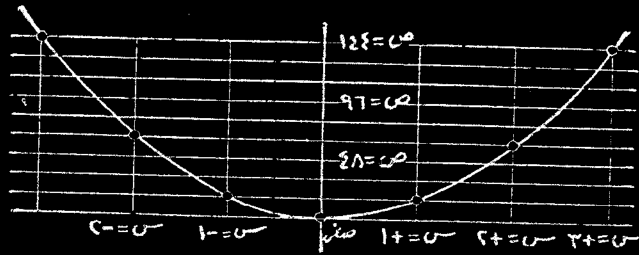
فشكل (١٤٠) مرسوم بحيث أن نقطة الرجوع ، وهى على بعد ١٩٢ قدماً من المدفع وبعدها الرأسى ١٤٤ قدما (شكل ١٣٨) تكون نقطة الأصل الجديدة ، والبعد (ص) مقاس بالاقدام والزمن (س) مقدر بالثوانى قبل (—س) أو بعد (+ س)



شكل (١٣٩) إدخال الزمن فى الهندسة

أن تصل النقطة إلى أقصى ارتفاعها إذن نحصل على الآتى :

س	ص	
٣—	١٤٤	$= (-٣)^{٢} \times ١٦$
٢—	٦٤	$= (-٢)^{٢} \times ١٦$
١—	١٦	$= (-١)^{٢} \times ١٦$
صفر	صفر	$= (\text{صفر})^{٢} \times ١٦$
١+	١٦	$= (+١)^{٢} \times ١٦$
٢+	٦٤	$= (+٢)^{٢} \times ١٦$
٣+	١٤٤	$= (+٣)^{٢} \times ١٦$



شكل (١٤٠) ما ترسمه القذيفة

المعادلة الكرتيزية للقطع المكافىء عند رسمه فى هذه الصورة هى ص = ا س^{٢}
فى هذا الشكل ا = ١٦

وعلى ذلك معادلة قطع مكافىء كالمرسوم فى شكل ١٤٠ هى :

$$ص = ا س^{٢}$$

وفى هذه الحالة ا = + ١٦.

وقد اقتصرنا حتى الآن على الحالة التى نشأت فيها هندسة عصر النهضة من المسائل الفنية واختراعات العصر التى نتج عنها وضع الهندسة فى صيغتها النظامية وقبل أن نبحث نواحيها الفنية الأخرى علينا أن نتساءل عن مدى استعمالها ونفعها ، ونتبين من ذلك فائدتين : أولاهما أنها تساعدنا على حل المسائل العددية التى يمكن وضعها فى صيغة معادلة ولو لم نجد قاعدة جبرية لحلها.

فمثلا هاهى معادلة لم نجد بعد طريقة لحلها

$$س^{٣} - ٥ س^{٢} + ٤ س - ٨ = صفراً$$

$$\text{أو}\quad س^{٣} - ٥ س^{٢} + ٤ س = ٨$$

يحتوى الطرف الايمن لهذه المعادلة على مجموعة من الكميات لا تعرف قيمتها وهى فى حد ذاتها تأخذ قيمة ما حسب قيمة س. أما الطرف الأيسر فيشير إلى أن قيمة أو قيم س الصحيحة لابد وأنها تجعل قيمة (س^{٣} — ٥س^{٢} + ٤س) مساوية ٨.

فإذا أطلقنا على المجموع (س^{٣} — ٥س^{٢} + ٤س) ص ، يمكننا عمل صورة تمثل جميع القيم الممكنة للمقدار (س^{٣} — ٥س^{٢} + ٤س) مثل منحنى الدائرة التى مركزها نقطة الاصل ، فهو يمثل جميع قيم $\sqrt{س^{٢} - ر^{٢}}$ الممكنة عندما ص = $\sqrt{ر^{٢} - س^{٢}}$.

فالصورة التى تحصل عليها تبين لنا ماهى قيمة ص عندما تأخذ س قيمة خاصة فتى وجدت الصورة يمكننا أن نعرف الجواب إذا كان له وجود. ولا بد من وجود قيمة أو قيم واقعة على خط عرض + ٨ من الوحدات وتكون قيمة س الصحيحة والتى تحقق المعادلة هى قيمة خط الطول المناظر.

ولعمل الصورة يجب أولا أن نرسم جدولا نوضح فيه القيم المختلفة المقدار ص والمناظرة لمجموعة من قيم س المختلفة

ونستمر على ذلك حتى تصبح بعض قيم ص أكبر من ٨ وبعضها أقل. وها هو جدول من هذا النوع :

الإحداثى السينى				الإحداثى الصادى
س	$س^{٣}$	$-٥س^{٢}$	٤س	($س^{٣} - ٥س^{٢} + ٤س$)
— ٢	— ٨	— ٢٠	— ٨	— ٣٦
— ١ ١/٢	— ٢٧/٨	— ٤٥/٤	— ٦	— ٢٠ ٥/٨
— ١	— ١	— ٥	— ٤	— ١٠
— ١/٢	— ١/٨	— ٥/٤	— ٢	— ٣ ٣/٨
صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
١/٢	١/٨	— ٥/٤	٢	٧/٨
١	١	— ٥	٤	صفر
١ ١/٢	٢٧/٨	— ٤٥/٤	٦	— ١ ٧/٨
٢	٨	— ٢٠	٨	— ٤
٢ ١/٢	١٢٥/٨	— ١٢٥/٤	١٠	— ٥ ٥/٨
٣	٢٧	— ٤٥	١٢	— ٦
٣ ١/٢	٣٤٣/٨	— ٢٤٥/٤	١٤	— ٤ ٣/٨
٤	٦٤	— ٨٠	١٦	صفر
٤ ١/٢	٧٢٩/٨	— ٤٠٥/٤	١٨	٧ ٧/٨
٥	١٢٥	— ١٢٥	٢٠	٢٠

وبعد ذلك نوقع النقط ، مستخدمين دوائر صغيرة كما فى شكل ١٤١ ، التى

احداثياتها هى س (أقصى عمود على اليمين) ، ص (أقصى عمود على اليسار) فى الجدول . تسمى هذه العملية بعملية رسم المنحنى . صل بين هذه النقط بواسطة منحنى بحيث يمر تقريبا بين جميع النقط .

والمنحنى يبين قيم س التى تناظر العلاقة

$$ص = س^{٣} - ٥س^{٢} + ٤س$$

لكن حسب المعادلة الأصلية .

$$٨ = س^{٣} - ٥س^{٢} + ٤س$$

إذن نرسم مستقيما يوازى محور السينات ويبعد عنه بمقدار ٨ (ص = ٨) ، ويقطع المنحنى فى نقطة أو نقط تكون أبعادها الأفقية هى قيمة س أو قيم س التى تحقق المعادلة . وتتوقف دقة النتيجة على كيفية رسم المنحنى والورق المرسوم عليه الرسم البيانى ومقياس الرسم المختار . وسترى أن س تقع بين ٤٫٥ ، ٤٫٧٥ وتقرب جداً من القيمة الأولى ، وبقليل من التعب يمكنك أن تصل إلى أى درجة من الدقة تريدها مهما كان نوع الكمية التى تحسبها .

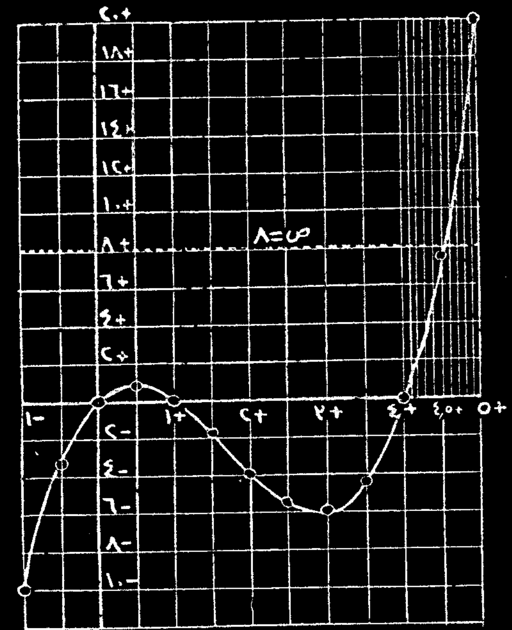
ويظهر فى شكل ١٤٢ تطبيق عددى . فلو أردنا إيجاد قيم تقريبية للمربعات أو الجذور التربيعية أو الجذور التكعيبية الخ ، نرسم الرسم البيانى المناسب مثل ص = $س^{٢}$ ، ص = $س^{٣}$. فالجذور التربيعية يمكن إيجادها من القطع المكافئ

$$ص = س^{٢}$$

أى $$س = \pm \sqrt{ص}$$

وبعد رسم المنحنى ، نقرأ الإحداثى السينى للنقطة التى إحداثيها الصادى هو العدد المراد إيجاد جذره التربيعى .

أما ثانى الحالات التى تظهر فيها فائدة هندسة عصر النهضة ، فهى أنها تعرض نوع القواعد العددية أو القوانين التى تربط التغييرات الطبيعية أو الحيوية أو الاجتماعية التى يمكن التعبير عنها بالاعداد

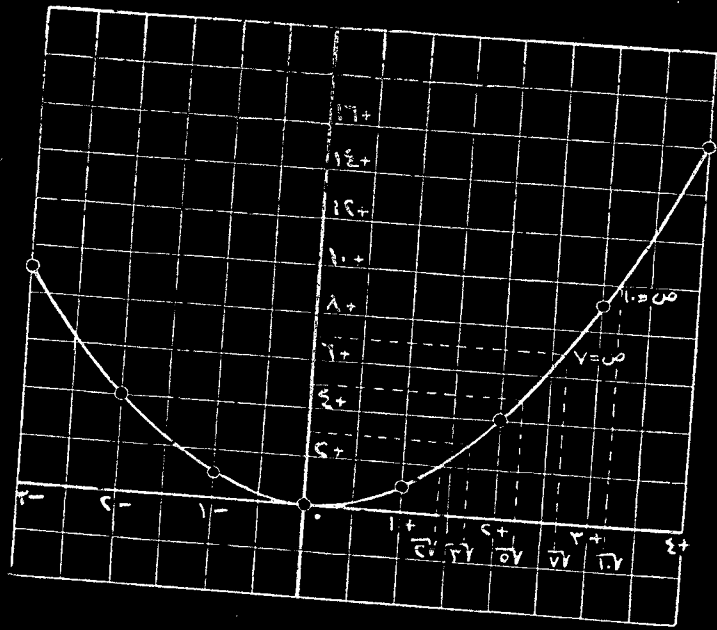


شكل (١٤١) رسم المنحنى

$$ص = س^3 - 5س^2 + 4س$$

وإليك بعض الأمثلة

يوضح شكل ١٤٣ تمرر خيط أو قطعة مرنة ، ويمكن إجراء التجربة فى بضع دقائق إذ أن الزنبرك عبارة عن أنبوبة سميكة معلقة بواسطة مسمار مثبت فى رجل مائدة المطبخ ومعها مسطرة مقسمة إلى $\frac{1}{10}$ من البوصة مثبتة إلى أسفل بواسطة دبابيس رسم أو مسمارى برية . أما كفة الميزان فهى غطاء علبة طباق ومعلقة بواسطة أربع ثقوب يمكن عملها بمطرقة ومسمار . وتستخدم فى ذلك صنج الموازين المستخدمة فى المطبخ وبذلك نحصل على المنحنى من القراءات الآتية :



شكل (١٤٢) الطريقة البيانية لإيجاد الجذور التربيعية

س (الوزن بالأوقية)	مستوى الكفة (بالبوصات)	ص (المسافة الممتدة بالبوصات)
صفر	٣	صفر
٢	٣٫٤	٠٫٤
٤	٣٫٦	٠٫٦
٦	٣٫٨	٠٫٨
٨	٤	١٫٠
١٠	٤٫٢	١٫٢
١٢	٤٫٤	١٫٤
١٤	٤٫٧	١٫٧
١٦	٥٫١	٢٫١

ومن مثل هذا الرسم يمكن قراءة المسافات المناظرة للأوزان المختلفة . إذا أردت ترقيم الأوزان على ميزان زنبركى . ويمكنك أن تلاحظ أنه ابتداء من س = ٢ إلى س = ١٢ يكون المنحنى خطاً مستقيماً ، وإضافة أوقيتين فى هذا

الحيز إلى الكفة (الفرق فى س = ٢) ينتج عنه امتداد قدره ٢و بوصة (الفرق فى ص = ٢ >) . والآن معادلة خط مستقيم هى

ص = (الفرق فى ص / الفرق فى س) . س + ا

إذن معادلة المنحنى فى الفترة التى يكون فيها خطاً مستقيماً هى

ص = (١و) س + ا

ويمكنك إيجاد قيمة ا بالتعويض عن س ، ص لأية نقطة واقعة بين س = ٤ ، س = ١٢ . فمثلا

عند ما س = ١٠ ، ص = ١و٢ أى أن

١و٢ = (١و) ١٠ + ا

∴ ا = ٢و

وعلى ذلك فالمعادلة تأخذ الصورة

ص = (١و) س + ٢و

إذن يمكنى عمل مقياس لميزان يصلح لوزن أشياء ما بين أربع أوقيات واثنى عشر أوقية لدرجة كبيرة من الدقة ، وعلى ذلك تبعد علامة التدريج المناظرة لوزن قدره ٤¾ أوقية بمقدار (١و) (٤و٧٥) + ٢و = ٦٧٥و، أى ٧/١٠ من البوصة عن علامة الصفر . ولقد اكتشف هوك القاعدة أو القانون الذى يربط بين الوزن المستعمل ومقدار تمدد الزنبرك . وهوك كان عالماً ، كغيره من معاصرى نيوتن ، كرس كثيراً من وقته فى عمل ساعة دقيقة تحتفظ بزمن جرينتش فى البحر وبذلك تكون وسيلة بسيطة لتعيين خط الطول . وهذا كان من الأسباب الرئيسية فى أن الكشف عن قوانين صحيحة للحركة كان من الأهمية بمكان .

وإنك تلاحظ أن س ، ص ابتدأتا من الصفر وهذا يناظر طول الزنبرك إذا علق به أوقيتان أى كما لو كان وزن الكفة أوقيتين . وقيم س التى تناظر س = ٢ ، ٤ ، ٦ الخ هى ٢و ، ٤و ، ٦و الخ . أيضاً المعادلة التى تعين التمدد الناشىء عن وزن لا يتعدى عشر أوقيات هى :

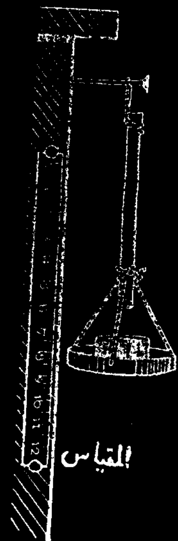
ص = (١و) س أو س = ١٠ ص

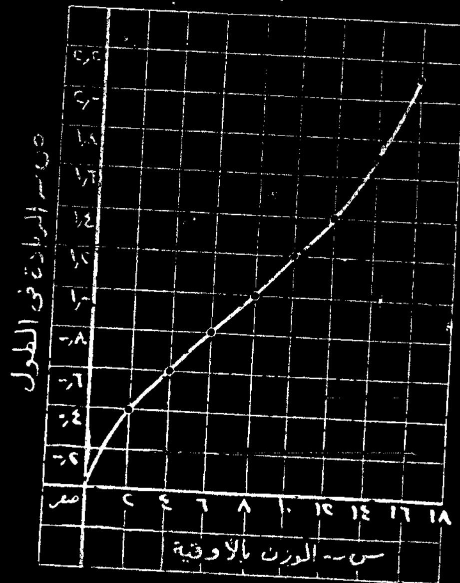
وهذه المعادلة صحيحة لدرجة كبيرة (أى أن الوزن المضاف مقدراً بالأوقيات = عشر أمثال التمدد مقيساً من نقطة الصفر بالبوصات) .

والصورة العامة لقانون هوك هى :

و = λ ل

وهذه المعادلة تكافئ المعادلة س = ١٠ ص إذا كان λ = ١٠ وفى أى تجربة خاصة تتوقف قيمة λ على وحدات الوزن المستعملة (فمثلا لو كانت الاوزان المستعملة فى التجربة هى عشرة أرطال فإن λ = ١/١٦) وعلى سمك ومادة الزنبرك . وقاعدة هوك صحيحة لمدى واسع متى كان الزنبرك من المعدن ، وهى صحيحة لمدى خاص متى استعملت مادة المطاط الهندى وتؤدى إلى نتائج سيئة





شكل (١٤٣) قانون الميزان الزنبركى

للغاية متى كان هناك أوزان ثقيلة . وهذا صحيح لجميع القوانين الطبيعية ، فالقانون الطبيعى صحيح لدرجة ما ويمكن تطبيقه حتى علم المدى الذى يناسب ما نتطلبه

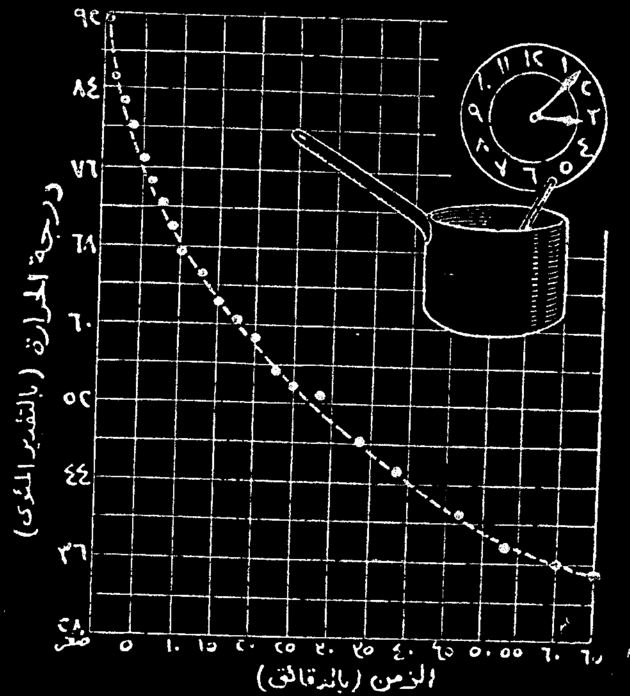
وهناك خاصية للقانون العلمى تستحق أن نلاحظها هنا فلكى نستعمل قانون هوك على أوسع مدى يلزمنا أن نعرف كيفية توقف قيمة λ على سمك ونوع الزنبرك ، لذلك نختار مادة للسلك تكون مادة معيارية ونأخذ عدة أسلاك مختلفة السمك ونرسم لها منحنيات فنحصل على قيم λ ، المختلفة وسمك السلك المناظر نحصل على علاقة بين السمك و λ فى صورة بسيطة ، وبإيجاد قيمة λ لاسلاك لها نفس السمك لكنها من مواد مختلفة ، يمكننا عمل جدول يبين النسب ما بين قيمة λ لاسلاك مختلفة المادة وقيمة λ لاسلاك مصنوعة من المادة المعيارية .

وبهذا يمكننا حساب التمدد الناشىء عن وزن ما متى علم سمك ومادة الزنبرك وذلك من المعادلة التى تربط λ وسمك المادة المعيارية والجدول السابق لقيم λ المختلفة لاسلاك لها نفس السمك ، وأغلب القوانين الطبيعية تحتوى على عدد مجرد أو ثابت مثل λ ، يمكن أن ينقسم إلى عامل تدخل فيه الوحدات المستخدمة (السمك فى هذه الحالة) و « عامل نوعى » (يتوقف على نوع المادة) . إذن القول بأن القوانين الطبيعية تختص بالكميات ، كما يدعى بعض الناس ، صحيح نظراً للطريقة التى تكتب بها فى الكتب المتداولة . وعندما نستعمل هذه القوانين علينا أن نضع بدل هذه الاعداد المجردة الاعداد المناسبة لانواع الاشياء الحقيقية

وقبل هندسة عصر النهضة ، كانت تستخدم الرياضة فى دراسة مسالك النجوم وانعكاس الاشعة الضوئية وفى مسائل ميكانيكية بسيطة على الاوزان مثل مبدأ الرافعة ، كما أنها كانت تختص بالفراغ لانها مبنية على هندسة إقليدس وكان العلم موليا إهتماما كبيراً نحو أشكال الاشياء فكان مهتما بتشريح هذه الاشياء أكثر من اهتمامه بتعرف وظيفة كل واحد منها .

لكن تمثيل ديكارت للهندسة على خريطة ليس مقصوراً على الاشكال ، بل يمكن تطبيقه على العلاقات بين جميع أنواع الكميات وليس هناك ما يستدعى أن يكون كل من إحداثيى منحنى ممثلا لمسافة بل يمكن جعل خط طول وعرض خريطة يناظران مقاييس زمنية مكانية كما فى المثال السابق . وسنذكر الآن قانون

نيوتن للتبريد كمثال لتوضيح قانون كمى بسيط (شكل ١٤٤) فعلى محور الصادات تمثل درجات حرارة ماء مغلى فى وعاء ومتروك يبرد ، بعيداً عن التيارات الهوائية حتى يصل إلى درجة حرارة الغرفة . وتمثل على محور السينات عدد الدقائق التى تنقضى منذ وضع الماء للتبريد . إذن لحل ما تحتاج إليه التجربة ترمومتر ووعاء ماء وساعة ، وشكل المنحنى يختلف عما سبق من منحنيات وسوف نذكر المعادلة التى تمثل مثل هذا المنحنى فى نهاية هذا الباب (شكل ١٥٤) .



شكل (١٤٤) قانون التبريد

ربما تتذكر أن $١٠^{-١}$ هى $\frac{١}{١٠}$ ، و $١٠^{-٢}$ هى $\frac{١}{١٠^{٢}}$ على المدداد البيانى الذى تمتد من كلتا جهتيه إلى حيث تريد ومنحنى شكل ١٥٤ الذى تمثله المعادلة $ص = ٢^{-س}$ هو صورة منحنى شكل ١٤٤ ، والمعادلة التى تمثل تبريد الماء فى الإناء هى

رياضى للقطع الناقص من طريقة رسمه . والطريقة المبينة فى شكل ١٤٥ تشبه إلى حد كبير طريقة رسم شكل ١٨ الرملية ، فبدلا من مشجب واحد نحتاج فى هذه الحالة إلى مشجبين وحبل معقود على شكل خيمة كما فى شكل ١٤٥ ا ، ب : الذى يوضح طريقة رسم القطع الناقص على الورق باستخدام دبوسين وخيط قطنى على شكل خيمة بدلا من الحبل والمشجبين ؛ وتسمى النقطتان اللتان يثبت عندهما الدبوسان أو المشجبان ببؤرتى القطع الناقص وهما ف ، فَ فى الشكل الأسفل وابعد بينهما هو ٢ حـ من الوحدات الطولية ، والنقطة و فى منتصف المسافة بينهما وتبعد مسافة حـ عن كل من البؤرتين وتسمى مركز القطع ، وإذا كانت البؤرتان قريبتين من بعضهما بحيث لا يسهل تمييزهما ، أصبح القطع قريباً جداً من الدائرة ، وإذا كانتا بعيدتين عن بعضهما حتى أنه يمكن أن يشد الحبل بينهما دون ارتخاء ، تحول القطع فى هذه الحالة إلى خط مستقيم ، وبما أن الخية ذات طول ثابت ، فإن مجموع بعدى أى نقطة عن البؤرتين يكون ثابتاً كذلك ، ومن الشكل ى هى نصف المجموع ، أى أن

ا + ب = ٢ ى

والقطع الناقص متماثل حول قطرين غير متساويين فى الطول ، يسمى أحدهما المحور الاصغر ، وهو العمودى على الخط الواصل بين البؤرتين الذى يصل القط التى يكون عندها ا = ب = ى ، وإذا كانت م هى نصف المحور الاصغر كما فى شكل ١٤٥ (حـ) فإن م^٢ = ى^٢ — حـ^٢ (١)

أما القطر الآخر فيسمى المحور الأكبر وهو الخط الواصل بين البؤرتين وامتداده من الجهتين ، وفى شكل ١٤٥ (ب) يسمى م نصف المحور الأكبر ونجد أن

= ا + حـ ،
م = ب — حـ
∴ ٢ م = ا + ب = ٢ ى
م = ى (٢)

وإذا كان المحور الأكبر مساويا المحور الأصغر تقريبا مثل الأقطار

المتساوية فى الدائرة فان القطع الناقص ينتفخ ويصبح شبيها بالدائرة وحينئذ تكون حـ = صفراً كما تكون البؤرتان قريبتين جداً من بعضهما وكأنهما منطبقتان عند المركز و ، وتسمى النسبة بين حـ ، ى بالاختلاف المركزى e للقطع الناقص حيث حـ هى البعد بين البؤرة والمركز ، ى هى المسافة بين المركز ومحيط القطع مقيسة على المحور الأكبر وإذن

e = حـ / ى

أ ، حـ = e . ى

إذن الدائرة ص قطع ناقص اختلافه المركزى صفر ، حيث أن حـ = صفراً والشمس لا تقع عند مركز القطع الناقص فى مسارات الارض أو الكواكب ، فهى تقع عند إحدى البؤرتين ، وإذا عرفنا معادلة المسار يمكننا حساب مواضع الارض والكواكب بالنسبة للشمس ، وفى الباب السادس تكلمنا عن مسار القمر كما لو كان دائرة ، وهذا كاف جداً كتقريب أولى ، لأن الاختلاف المركزى صغير كما سنرى الآن ؛ باعتبار أكبر قيمة (ب) وأصغر قيمة (ا) ، أى الابعاد الارضية للقمر هما ٢٥١٩٤٧ ، ٢٢٥٧١٩ من الاميال ، فإن نصف المحور الاكبر أى م = ½ (ا + ب) هو ٢٣٨٨٣٣ ميلا ، وحيث أن ا + حـ = م = ب — حـ ، حـ = e ى = e م ينتج أن

e = (ب — ا) ÷ ٢ م

وبذلك يكون الاختلاف المركزى لمسار القمر هو

½ (٢٥١٩٤٧ — ٢٢٥٧١٩) ÷ ٢٣٨٨٣٣ = ٠,٠٥٥

ولإيجاد معادلة القطع الناقص يحسن وضع المعادلة (١) فى الصورة

م^٢ = ى^٢ — (ى e)^٢ = ى^٢ (١ — e^٢)
= م^٢ (١ — e^٢) (٣)

ومنها نجد أن م (نصف المحور الأصغر لمسار القمر)

= ٢٣٨٨٣٣ √(١ — (٠,٠٥٥)^٢) = ٢٣٨٤٧٠ من الأميال .

فإذا كنت ترى أن الطريقة التى نستنتج بها المعادلة معقدة نوعا ما ، فاقرأ أولا الملحق الثانى وفى شكل ١٤٦ ، ن هى أى نقطة على المحيط ، ص هى إرتفاعها الرأسى ، س هى بعدها الأفقى عن المركز ، ومن المثلثين القائمى الزاوية اللذين وتريهما هما المستقيمان الواصلان من ن إلى البؤرتين نستنتج أن

$$\text{ا}^2 = \text{ص}^2 + (\text{س}+\text{ح})^2 = \text{ص}^2 + \text{س}^2 + 2\text{ح}\,\text{س} + \text{ح}^2 \qquad (٤)$$

$$\text{ب}^2 = \text{ص}^2 + (\text{س}-\text{ح})^2 = \text{ص}^2 + \text{س}^2 - 2\text{ح}\,\text{س} + \text{ح}^2 \qquad (٥)$$

وبجمع الطرفين الأيسرين والطرفين الأيمنين فى المعادلتين (٤) ، (٥)

نجد أن $\text{ا}^2 + \text{ب}^2 = 2\text{ص}^2 + 2\text{س}^2 + 2\text{ح}^2$

$$= 2\text{ص}^2 + 2\text{س}^2 + 2\text{ى}^2 e^2 \qquad (٦)$$

وبطرح (٥) من (٤)

$$\text{ا}^2 - \text{ب}^2 = 4\text{ح}\,\text{س} = 4\text{ى}\,e\,\text{س}$$

ولكن $\text{ا}^2 - \text{ب}^2 = (\text{ا}+\text{ب})(\text{ا}-\text{ب})$

$$\therefore (\text{ا}+\text{ب})(\text{ا}-\text{ب}) = 4\text{ى}\,e\,\text{س}$$

$$2\text{ى}(\text{ا}-\text{ب}) = 4\text{ى}\,e\,\text{س}$$

$$\text{ا}-\text{ب} = 2e\,\text{س}$$

$$\therefore (\text{ا}-\text{ب})^2 = 4e\,\text{س}$$

أو $\text{ا}^2 - 2\text{ا}\text{ب} + \text{ب}^2 = 4e^2\text{س}^2 \qquad (٧)$

ويطرح (٧) من (٦)

$$2\text{ا}\text{ب} = 2\text{ص}^2 + 2\text{س}^2 - 4e^2\text{س}^2 + 2\text{ى}^2e^2 \qquad (٨)$$

وبجمع (٨) ، (٦)

$$\text{ا}^2 + 2\text{ا}\text{ب} + \text{ب}^2 = 4\text{ص}^2 + 4\text{س}^2 - 4e^2\text{س}^2 + 4\text{ى}^2e^2$$

$$\therefore (\text{ا}+\text{ب})^2 = 4\text{ص}^2 + 4\text{س}^2(1-e^2) + 4\text{ى}^2e^2$$

ولكن $(\text{ا}+\text{ب})^2 = (2\text{ى})$

$$\therefore 4\text{ى}^2 = 4\text{ص}^2 + 4\text{س}^2(1-e^2) + 4\text{ى}^2e^2$$

$$\text{ى}^2 = \text{ص}^2 + \text{س}^2(1-e^2) + \text{ى}^2e^2$$

$$\text{ى}^2 - \text{ى}^2e^2 = \text{ص}^2 + \text{س}^2(1-e^2)$$

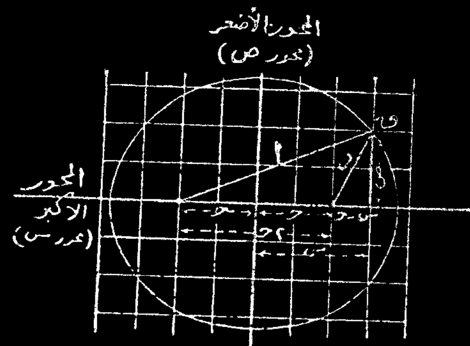
$$1 = \frac{\text{ص}^2}{\text{ى}^2(1-e^2)} + \frac{\text{س}^2}{\text{ى}^2}$$

ومن (٢) ، (٣) ينتج أن $\quad 1 = \frac{\text{ص}^2}{\text{م}^2} + \frac{\text{س}^2}{\text{م}^2}$

وهذه هى المعادلة الكرتيزية للقطع الناقص ، وهى تبين كيف نحسب البعد ص فى الاتجاه الموازى للمحور الأصغر (٢ م) لنقطة بعدها الأفقى فى اتجاه المحور الأكبر (٢ م) يساوى س ٢ ولاستعمال هذه المعادلة يلزمنا معرفة قيم م ، ن لهذا القطع ، وفى حالة مسار القمر

م = ٢٣٨٤٧٠ ميلا

م = ٢٣٨٨٣٣ ميلا



شكل (١٤٦) معادلة القطع الناقص

$$1 = \frac{\text{ص}^2}{\text{م}^2} + \frac{\text{س}^2}{\text{م}^2}$$

فمعادلة مسار القمر هى

$$1 = \frac{\text{ص}^2}{(238470)^2} + \frac{\text{س}^2}{(238823)^2}$$

$$\text{أو ص} = \frac{٢٣٨٤٧٠}{٢٣٨٨٣٣}\sqrt{(٢٣٨٨٣٣)^{٢} - س^{٢}}$$

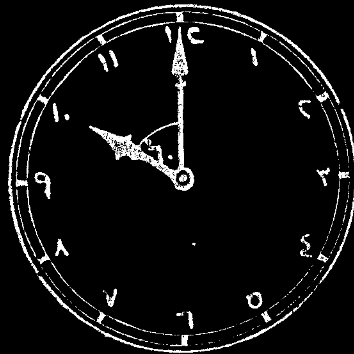
حيث يقع المركز على بعد ح = م e (٢٣٨٨٣٣ × ٠,٠٥٥ ميل) من الارض كبؤرة مسار القمر .

وبطريقة يطول شرحها هنا ، يكون من السهل نسبياً رسم شكل يبين الابعاد النسبية للأرض أو أى كوكب عن الشمس (متخذين بعد الارض عن الشمس كوحدة للقياس) وذلك بمشاهدات مستمرة لشروقها وغروبها لمدة طويلة ، فإذا تم لك ذلك ، يمكنك معرفة ما إذا كان الشكل الذى يمثل مسار الكوكب قطعا ناقصاً بؤرته هى الشمس وذلك بقياس أكبر عرض للشكل أولا ، فهذا هو المحور الأكبر إذا كان الشكل قطعا ناقصاً ، أما المحور الاصغر فهو الخط العمودى على المحور الأكبر من منتصفه ، وبما أنك تعرف معادلة القطع الناقص بدلالة ص ، س إذا عرفت محوره الأكبر والأصغر ، فإنه يمكنك حساب قيم ص بجميع قيم س على التوالى ، وبوضع هذه النقط على الشكل فإنها تكون منطبقة تقريباً على المنحنى المرسوم من المشاهدة إذا كان المسار قطعا ناقصا ، ولقد جرب كيپلر كثيراً من الأشكال قبل أن يجد أن القطع الناقص هو أكثرها انطباقاً ، وبذا أجهز على نظرية أفلاطون القائلة بأن الأجسام تتحرك فى دوائر لأن الدائرة هى أكثر الأشكال كمالا .

تحرير الطبقة العاملة — فى الأشكال الثابتة فى هندسة اقليدس ، لا يقابلنا إلا زوايا لا تزيد على أربع قوائم (٣٦٠°) ، وربما قد بدا لك حين عرفنا التقدير الدائرى للزوايا أنه يمكن أن تكون الزوايا كبيرة كيفما نشاء ، إذ لما بدأ الناس فى استخدام الهندسة الجديدة ، كثر بينهم تداول آلتين تؤكدان إمكانية ذلك ، أحدهما هى البوصلة البحرية أما الأخرى فهى الساعة .

وشكل ١٤٧ يوضح كيف أن هذين الاختراعين قد حررا الزاوية من سجنها الذى وضعتها فيه تلك الأشكال الثابتة اللازمنية فى هندسة الإغريق ،

انظر أولا إلى الساعة فالوقت الآن هو الساعة العاشرة أو باللغة الحديثة الثانية والعشرون ، فما هى الزاوية ا مقيسة بالدرجات أو مقيسة بالتقدير الدائرى بين عقربى الساعة ا فأول ما يخطر لك هو أن تقول ٦٠° أو $\frac{١}{٣}$ ط ، ولكن فلنفرض أننا منعنا عقرب الساعات من الحركة ، فبعد مضى ساعة ، يكون العقربين فى نفس الوضع السابق تماما ، ولكن عقرب الدقائق يكون قد دار زاوية مقدارها ٣٦٠° . فالزاوية الآن هى ٣٦٠° + اَ أو ٢ ط + ا زوايا نصف قطريه . وإذا انتظرنا ساعة أخرى فالزاوية هى ٦٠° فى هندسة الأشكال اللازمنية ، ولكن إذا أدخلنا



شكل (١٤٧)

الزمن فى الهندسة فإن الزاوية هى ٢(٣٦٠°) + اَ أو ٤ ط + ا زوايا نصف قطرية . وبعد ساعة أخرى تكون العقارب فى نفس الوضع ، ولكن عقرب الدقائق يكون قد دار ٣٦٠° أخرى أو ٢ ط زاوية نصف قطرية . فالزاوية الان هى ٣(٣٦٠°) + اَ أو ٦ط + ا . وعلى ذلك فإنك ترى أن الزاوية الثابتة التى مقدارها $\frac{٢}{٣}$ زاوية قائمة (٦٠° أو $\frac{١}{٣}$ ط زاوية نصف قطرية) فى الهندسة القديمة تكافىء ± ٦٠° أو ن(٣٦٠°) ± ٦٠° ، { ن (٢ ط) ± $\frac{ط}{٣}$ } حيث ن = صفر ، ١ ، ٢ ، ٣ ، الخ . وهذه ليست كل القصة ، إذ أنه بإدارة عقرب الدقائق فى الاتجاه المضاد ساعة مع تثبيت عقرب الساعات فإننا نكون قد أنقصنا من الزاوية ٣٦٠° ، أربع قوائم أو ٢ط زاوية نصف قطرية ، وتبعاً

لهندسة إقليدس يكون لدينا نفس الزاوية أى أن ا َ — ٣٦٠° أو ا — ٢ ط هى نفس الشىء مثل ا َ ، ا فى هندسة إقليدس وبالمثل ا — ن(٣٦٠°) ، ا — ٢ن ط حيث ن أى عدد صحيح ، وإذن

ا َ (فى هندسة إقليدس) = ا َ — ن (٣٦٠°)

أ ، ن (٣٦٠°) — ا َ = — ا َ

وكذلك ٢ ن ط — ا = — ا

وبالطبع لا يلزمنا إيقاف عقرب الساعة لكى نبين أن الزاوية حين نصف بها دوران عجلة ، تختلف اختلافا بينا عن الزاوية التى نصف بها ميل عمود نريد وضعه (أو فشلنا فى وضعـــــه) فى وضع رأسى قائم ، فإننا نرى نفس الزاوية الإقليدية على وجه الساعة كل اثنى عشر ساعة أو مرتين يوميا دون أن توقف عقرب الساعات ، فإذا أدخلنا الزمن فى الهندسة ، فانه يلزمنا أن نسأل كم مرة دارت حافة ما حول محور ما قبل أن تصل إلى الوضع الذى نراها عليه ، فاذا كنا نحدد موضع نقطة فى الاتجـــاه الشمالى الشرقى أى ٤٥° أو ط/٤ زوايا نصف قطريه من الاتجاه الشمالى باستخدام البوصلة ، فإنه يمكننا إدارة البوصلة ٣٦٠° أو ٢ ط زاوية نصف قطريه أى عدد من المرات فى اتجاه عقارب الساعة أو عكس اتجاهها ونجد نفس الزاوية الإقليدية بين المؤشر وعلامة الشمال الشرقى على مقياس البوصلة .

وإلى هنا المسألة بسيطة ، لكن تأتى الان نتيجة غريبة إذا كان عليك أن تواجه كل ماتضمنته الزاوية الاقليدية من اختلافات . لقد قلنا :

ا إغريقية = { ن (٣٦٠°) + ا } الحديثة

، — ا = ن (٣٦٠°) — ا

أو ا = ن ط + ا

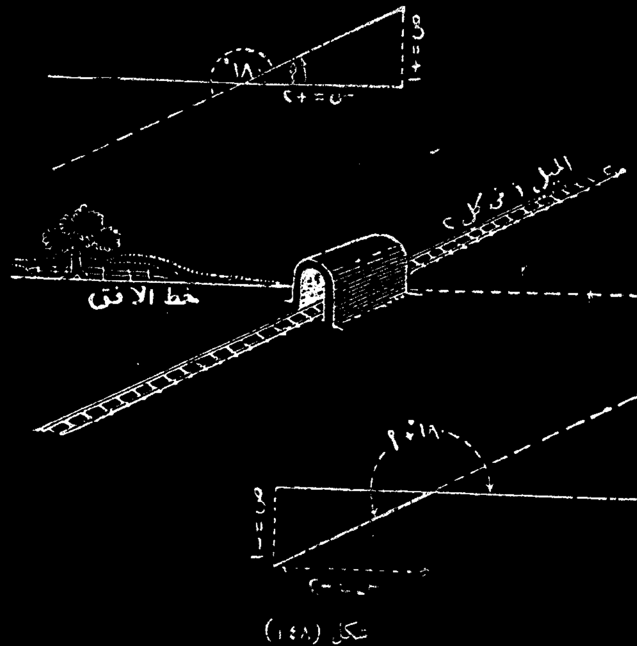
، — ا = ٢ن ط — ا

وهنا نتساءل لماذا نخطوه خطوة أخرى ونقول أن :

طا ا = طا (٣٦٠° + ا)

أو طا ن = طا (٢ن ط + α)

يعرف جيب أو جيب تمام أو ظل زاوية فى الهندسة الأقليدية بأنه النسبة بين ضلعى مثلث قائم الزاوية . ولما كانت أية زاوية من زوايا المثلث القائم الزاوية والمرسوم فى مستو ، لا يمكن أن تزيد عن ٩٠° ، فإن الهندسة الأقليدية تمكننا فقط من قياس جيب وجيب تمام وظل زاوية لاتزيد عن ٩٠°. وعلى كل حال سبق أن رأينا فى الباب الثامن ص٣٨٤ أن حا (١٨٠° — ا) ، ضا (١٨٠° — ا) يساويان حا ا ، — ضا ا على الترتيب ، فمثلا حا ٣٠° = ½ ، حا ١٥٠° = ½ ، صا ٦٠° = ½ ، حتا ١٢٠° = — ½ . ويرجع السبب فى فشل هندسة إقليدس فى تزويدنا بصورة للطريقة الحسابية التى نستخدمها تبعا لهذه القواعد ، إلى التحديد الذى تعرفنا عليه الآن ، فالزاوية فى هندسة إقليدس اللازمنية هى كمية ثابتة وموجودة ، أما فى هندسة عصر الإصلاح فلها تاريخ ، إذ أنها تتولد من حركة مستقيم محور السينات وتكون سالبة إذا كان اتجاه الحركة مع عقرب الساعة وموجبة إذا كان اتجاه الحركة ضد عقرب الساعة. ولقد سبق أن رأينا فى ص ٣٨٤ أن جا ١٥٠° ليس بالشىء غير المعقول متى



شكل (١٤٨)

عرفنا الجيب بأنه علاقة بين الوتر والقوس . وإذا رجعنا إلى تعريفنا الأول للظل (ص١٢٢) بأنه ميل ، نجد أن قياس الزاوية ٢١٠° (١٨٠° + ٣٠°) أو الزاوية ١٥٠° (١٨٠° — ٣٠°) بطريقة الظل غير محال .

فى شكل ١٤٨ رسم للتوضيح طريق بميل قدره ١ فى ٢ ومار تحت نفق ويقطع محور السينات ، الذى يقاس عليه المسافة الأفقية لأية نقطة ، محور الصادات ، الذى يقاس عليه ارتفاع أية نقطة عن الطريق ، تحت النفق . وعلى ذلك تكون نقطة الأصل فى هندسة عصر النهضة عند موضع النفق . إذن حسب شكل ١٤٨ يمكننا القول بأن :

(ا) ميل الطريق يمين النفق على محور السينات هو

$$\frac{+\text{ص}}{+\text{س}}$$

(ب) الزاوية التى يصنعها الطريق يسار النفق مع محور السينات تساوى ١٨٠° + ا فيكون الميل

$$\frac{-\text{ص}}{-\text{س}}$$

لكن النسبة $\frac{-\text{ص}}{-\text{س}} = \frac{+\text{ص}}{+\text{س}}$

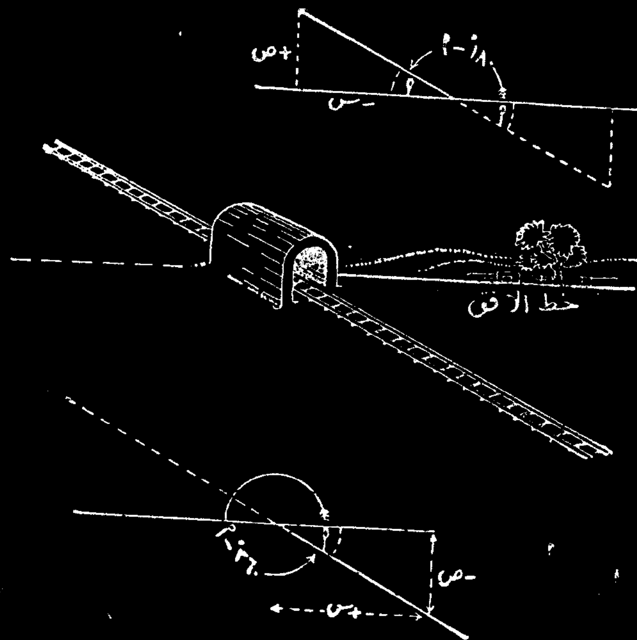
إذن لو اعتبرنا أن ظل الزاوية ا يدل على ميل الطريق فإن الهندسة الكرتيزية تعرفه بأنه النسبة بين الإحداثى السينى والاحداثى الصادى لأية نقطة على يمين أو يسار نقطة الاصل . إذن

ظا ا = ظا (١٨٠° + ا)

وهناك فائدة بسيطة فى تعريفنا للظل بهذه الطريقة . فالظل فى المثلث الاقليدى لا يفرق بين ميل مستقيم يصنع زاوية ا مع محور السينات ويقع فوقه مثل الطريق فى شكل ١٤٩ وميل مستقيم يصنع زاوية ا ويقع أسفله مثل الطريق

فى شكل ١٤٨ . أما فى الهندسة الكرتيزية فالطريق فوق النفق فى شكل ١٤٩ يميل بزاوية قدرها (١٨٠° — ا) على محور السينات أما تحت النفق فيميل بزاوية قدرها (٣٦٠° — ا) . وعلى ذلك ميله لا يساوى $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$ بل يساوى

$$\frac{+\text{ص}}{-\text{س}} \quad \text{أو} \quad \frac{-\text{ص}}{+\text{س}}$$



شكل (١٤٩)

إذن فى الهندسة الجديدة

ظا (١٨٠° — ا) أو ظا (٣٦٠° — ا) = — ظا ا

أى أنه لو كان ظا (٤٥°) = ١ فإن ظا ١٣٥° = ظا (١٨٠° — ٤٥°)

= — ١ ، ظا (٢٢٥°) = ظا (١٨٠° + ٤٥°) = + ١

إذن القيم العددية لظلال الزوايا تتكرر فى كل ربع (شمال شرقى ، شمال غربى ، جنوب شرقى) متى تغيرت البوصلة والإشارات من

ربع شمال شرقى	ص / س
ربع شمال غربى	—ص / س
ربع جنوب غربى	—ص / — س
ربع جنوب شرقى	—ص / س

ولما كان من الممكن تكوين زوايا من أى حجم على وجه الساعة ، إذن نستطيع تعميم جدول الظلال بوضع

طا ا = طا (ن ١٨٠° + ا)

أو طا α = طا (ن ط + α)

، طا ا = — طا (ن ١٨٠° — ا)

أو طا α = — طا (ن ط — ا)

وإذا كنا استطعنا أن نتوسع فى تعريف الظل ، فليس هناك أى سبب يمنعنا من منح الجيب وجيب التمام هذه الميزة . إذا اعتبرنا دائرة نصف قطرها الوحدة فإن حا ا هو الإحداثى الصادى وحتا ا الإحداثى السينى (أنظر شكل ١٢٩ ، الباب الثامن) وذلك لأية نقطة على محيط الدائرة (شكل ١٥٠) .
إذن القيم العددية للجيوب وجيوب التمام تتكرر والاشارات تتغير تبعا للقاعدة

الربع	الجيب	جيب التمام	الظل
شمال شرقى	+	+	+
شمال غربى	+	—	—
جنوب شرقى	—	—	—
جنوب غربى	—	+	—

وعلى ذلك نستطيع تعميم جداول الجيوب وجيوب التمام باستخدام المعادلات

حا ا = حا (١٨٠° — ا) = — حا (١٨٠° + ا)

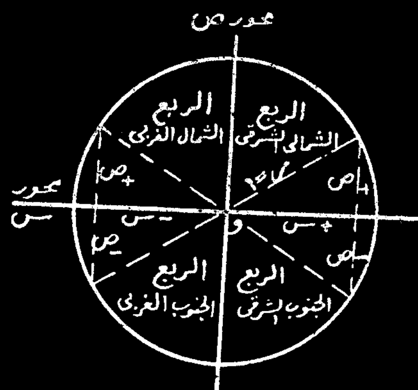
صا ا = — صا (١٨٠° ± ا)

ومن شكل ١٥١ نستطيع أن نتبين تعميم الجداول باستخدام الصيغ

حا (٩٠° + ا = + صا ا

طا (٩٠° + ا) = — ١ / طا ا

جتا (٩٠° + ا) = — حا ا



شكل (١٥٠) تعميم جدول النسب المثلثية

الزوايا ا ، ٣٦٠° + ا	الزوايا ١٨٠° — ا
	٥٤٠° — ا ، الخ
حا ص	حا ص
جتا س	جتا — س
الزوايا — ا ، ٣٦٠° — ا ، الخ	الزوايا ١٨٠° + ا
	٥٤٠° + ا ، الخ
حا — ص	حا — ص ، جتا — س
جتا س	

وليس هناك أى اعتراض لو اعتبرنا أن الزاوية (٣٦٠° — ا) هى الزاوية ا مقيسة أسفل محور السينات

ولها نفس موضع الزاوية — ا . إذن :

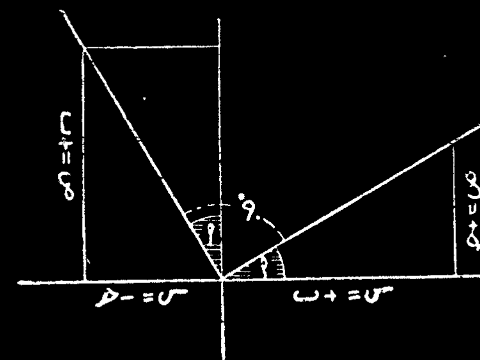
حا (٣٦٠° — ا) = — حا ا

حا (٣٦٠° — ا) = حا ا

ظا (٣٦٠° — ا) = — ظا ا

والآن قد تتساءل عما نرمى إليه من التوسع فى جداول الجيب وجيب التمام والظل للزوايا التى هى أكبر من ٩٠° . والجواب على ذلك يتضح على الفور من شكل ١٥٢ . أما أشكال الهندسة اللازمنية فبوضعها الراهن لا تصلح إلا لتمثيل الزيادة أو النقصان إلى حد معين فى حجم شىء ما ، ولقد احتاجت إلى كثير من البراعة لجعلها صالحة لتمثيل الزيادة أو النقصان إلى حد معين فى حجم شىء ما ، ولقد احتاجت إلى كثير من البراعة لجعلها صالحة لتمثيل الكميات المتعددة التى ترتد إلى نفس القيمة باستمرار . وهذا النوع من الكميات على جانب كبير من الأهمية فمثلا من الأشياء الدورية المألوفة التى تمثل على محور الصادات وتتغير مع الزمن الممثل على محور السينات . إزاحة الخيط المتذبذب فى الكمان والزيادة والنقصان فى نسبة البطالة فى العهود التجارية المتعاقبة للبلاد الرسمالية .

وشكل ١٥٢ يمثل المعادلة . ص = ظا س



شكل (١٥١)

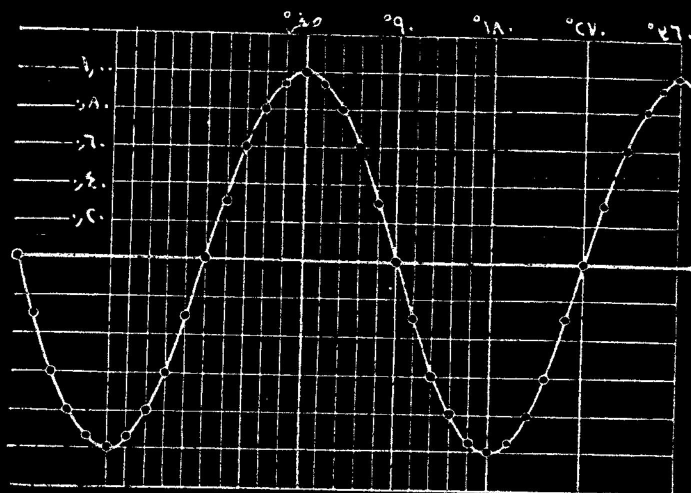
أما منحنى المعادلة ص = حا س فهو يماثله تماما فيما عدا أنه يمر بنقطة الأصل (س = ٠°) ويمكنك رسمه بنفسك .

وبرسم منحنى المعادلة ص = ٢ صا $\frac{س}{٢}$ أو ص = $\frac{١}{٢}$ صا ٢ س ، يمكنك أن تستنتج بنفسك نوعا عاما لمعادلة منحنيها يشبه تماما منحنى المعادلة السابقة ؛ فيما عدا أنه بمبادلة ٢ ، $\frac{١}{٢}$ يكون أكثر فرطحة أو عمقا والصورة العامة هى .

ص = ا صا ب س

ص = ا حا ب س

وهاتان المعادلتان هما منشأ رياضة المركز الموجبة التى أصبحت من أهم



شكل (١٥٢) منحنى ص = ظا س

التطبيقات العملية للرياضة فى العالم . ولقد أدى اكتشاف الطريقة البسيطة لتمثيل الحركاتُ الشبيهة بالموجبة أو الدورية إلى امكان تفسير مقاييس الطيف والتفريغ الكهربائى للغازات ، وبدونه لا يمكننا عمل الحسابات الخاصة بالتيارات الكهربائية المتقطعة .

وسنعود فيما بعد إلى البحث فى الحركة الموجبة ، وهنا يتحتم عليك أن تقتنع فى لمح البصر بشىء طالما أحدث لك إرتباكا ، فكثيراً ما سمعت أو قرأت فى كتب العلم المشهورة أن الضوء ينتقل فى شكل موجات ، كما أن « أطوال الموجات » فى عصر الراديو من الحقائق المألوفة فى حياتنا اليومية ، فمن المحتمل

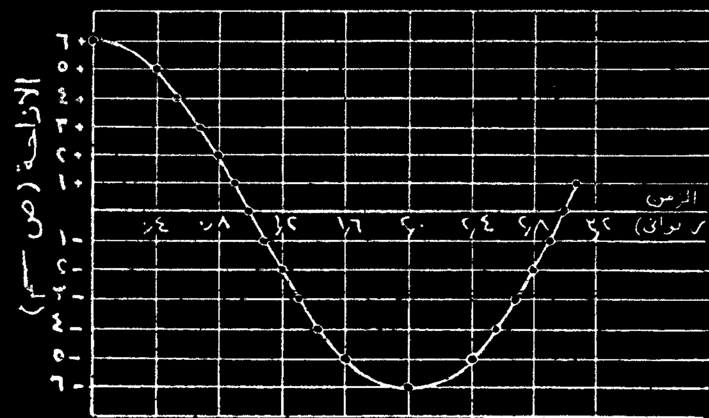
أنك كثيراً ما تساءلت عما يعنيه علماء الطبيعة حينما يتحـدثون عن الموجات . يوضح الشكل التالى (شكل ١٥٣) الجواب على سؤالك ، فهو يمثل الجدول المعطى فى أول هذا الفصل لبيان كيفية استعمال « + » ، « — » فى وصف موضـع البندول فى اللحظات الزمنية المختلفة . فمحور الصادات يمثل الازاحة .

أما محور السينات يمثل الزمن الذى مضى على البدء فى المشاهدات المدونة فى الجدول المعطى ص ٣٩٧ . ومنحنى البندول كثير الشبه بالمنحنى الذى معادلته هى

$$\text{ص} = \text{ا صا ب س}$$

وإذا أقمت جدولا ورسمت النقط تجد أن المنحنى المبين فى شكل ١٥٣ يقترب كثيراً من منحنى المعادلة

$$\text{ص} = ٦ \text{ حا } (٩٠ \text{س})^{\circ}$$



شكل (١٥٣)

ولذا فإنه فى وسعنا أن نستخدم المنحنى الأخير لحساب موضع البندول عند أية لحظة . وكل ما يعنيه عالم الطبيعة حين يتكلم عن موجات الضوء أو الصوت أو الكهرباء هو أنه يقوم بحسابها مستخدما المعادلات التى يمكن تمثيلها بمنحنيات موجية مثل المنحنى المبين فى شكل ١٥٢ . وبهذا قد بددنا بعض الغموض الذى يحيط باللغة الحديثة وذلك بفصل المعادلتين « حا » ، « صا »

عن أشكال هندسة اقليدس حيث كانا ينسبان إلى الزوايا الواقعة بين صفر° ، ٩٠° أو بين صفر ، $\frac{ط}{٢}$ زاوية نصف قطرية .

وهناك مجموعة أخرى من المعاملات ظهرت فائدتها فى هندسة عصر النهضة فلوحة العد ترمز إلى سياسة المستعمر الأبيض فهى تخول للمعامل به فى العبارة أ أن يأخذ أعداداً صحيحة وتضع حاجز اللون أمامه فتمنعه من أن يأخذ قيما كسرية . ويبين شكل ١٥٤ كيف أن س لها أثر كبير كعدد كسرى فى منحنى المعادلة .

$$\text{ص} = ٢^{\text{س}}$$

إنك لا شك تعرف الآن ما تعنيه العبارة $٢^{\text{س}}$ حيث س عدد صحيح موجبا أو سالب (أنظر شكل ٢٠٤ وشكل ٢٠٩) . لكن أشكال إقليدس أو لوحة العد فلا يمكن أن تعطينا مثالا يوضح الحالة التى تكون فيها س كسرية .

وفى الحقيقة عند ما تتعلم فى بادىء الأمر أن ذلك ممكن بقلق يشبه قلق أهل جنوب أفريقيا الذين يدعون بعدم إمكان تعليم سكان البلاد الأصليين القراءة والكتابة بالرغم من أنه يمكنهم أن يروا مجموعات من طلبة زولو[١] وكسوزا[٢] يدرسون حساب التفاضل والتكامل متى رفعوا التحفظ فى زيارة كليـة فورت هار[٣] فى سيسكاى[٤] . فالطريق لمعرفة ما إذا كان يمكن المستوطن الأصلى أن يتعلم ما نستطيع نحن أن نتعلمه هو أن تعلمه وهذا يجب ن يكون مبدأ الحركة العمالية فى جنوب أفريقيا إذا كانت حركة تقدمية .

ولا شك أن ما تقدمه هندسة عصر النهضة للمعامل س فى $٢^{\text{س}}$ من فرصة للعمل الماهر يجب أن يماثل ما تقدمه جمعية تقدمية لقبيلة البانتو[٥] الافريقية .

ولقد وقعنا فى شكل ١٥٤ جميع قيم ص $= ٢^{\text{س}}$ المناظرة لقيم س الصحيحة

---

(١) Zulu (٢) Xoso (وهما قبيلتان من قبائل جنوب أفريقيا)
(٣) Fort Hare (٤) Ciskei (٥) Bantu

والواقعة بين س = — ١ ، س = ٥ ثم وصلنا بين هذه النقط وحصلنا على منحنى وبذلك حورنا س من كونها عدداً صحيحا لنرى ما إذا كانت مفيدة وهى غير مقيدة بهذا الشرط . ولقد أعطينا فى الباب السادس ص ٢٦٩ قاعدة ارشميدس

$$٢^{ا} \times ٢^{ب} = ٢^{ا+ب}$$

ومن السهل أن ترى صحة ماسبق للاعداد الصحيحة ، فمثلا

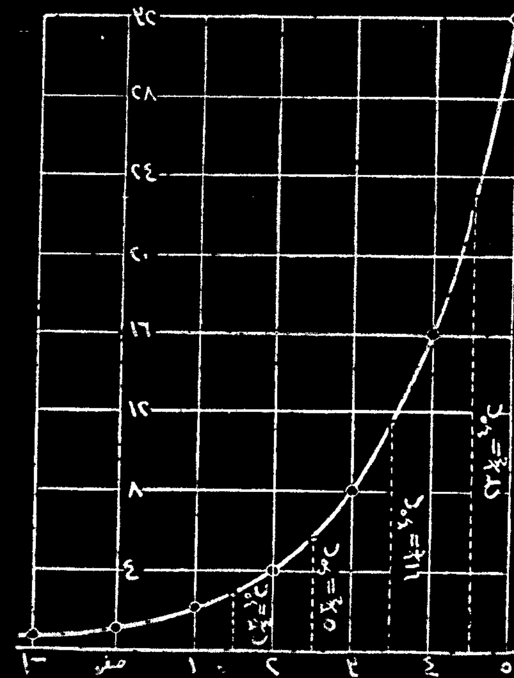
$$٢^{٢} \times ٢^{٣} = ٢^{٥}$$

$$٤ \times ٨ = ٣٢$$

وعلى ذلك لو جعلنا س تؤدى عملا مفيداً عندما لا تكون عدداً صحيحا، بأن

$$٢^{١,٥} \times ٢^{٢,٥} = ١٦$$

يمكننا أن نقرأ من المنحنى المبين بدرجة كبيرة الدقة قيم ص المناظرة قيم س



شكل (١٥٤) المنحنى الذى معادلته $ص = ٢^{س}$

الواقعة بين س = ١,٥ ، س = ٢,٥ ونحصل على

$$ص_{١,٥} = ٢\tfrac{٣}{٤} = \tfrac{١١}{٤}$$

$$ص_{٢,٥} = ٥\tfrac{٣}{٤} = \tfrac{٢٣}{٤}$$

$$إذن \; (ص_{١,٥} \times ص_{٢,٥}) = \tfrac{٢٥٣}{١١} = ١٥,٨$$

وهذا العدد قريب من ١٦ وهى نتيجة يسمح بها رسم تقريبى فالفرق أقل من $١\tfrac{١}{٢}$ فى المائة .

ويمكنك من الرسم الحصول على ما يأتى :

	القيمة (التقريبية) المقيسة		القيمة النظرية
$٢^{١,٥} \times ٢^{٣,٥}$	$\tfrac{١١}{٤} \times \tfrac{٢٣}{٢}$	٣١,٦	٣٢
$٢^{١,٥} \times ٢^{٤,٥}$	$\tfrac{١١}{٤} \times \tfrac{٩٣}{٤}$	٦٣,٩	٦٤
$٢^{٢,٥} \times ٢^{٣,٥}$	$\tfrac{٢٣}{٤} \times \tfrac{٢٣}{٢}$	٦٦,١	٦٤
$٢^{٢,٥} \times ٢^{٤,٥}$	$\tfrac{٢٣}{٤} \times \tfrac{٩٣}{٤}$	١٣٤	١٢٨
$٢^{٣,٥} \times ٢^{٤,٥}$	$\tfrac{٢٣}{٢} \times \tfrac{٩٣}{٢}$	٢٦٧	٢٥٦

ومنحنى شكل ١٥٤ مرسوم على ورق مربعات رخيص جداً (كراس قيمته بنس) ولذلك لا يمكن أن تكون المقاييس صحيحة لأقل من ٥ فى المائة فمتى ضربت فى بعضها كان الخطأ فيها أكثر من ١٠ فى المائة ، ومن المحتمل أن تحصل بنفسك على نتائج أحسن ، إذ ما ذكرناه هنا كان ليبين لك أن المعامل س فى $٢^{س}$ له من الفائدة ما يجب أن نتوقعه عند ما يأخذ قيما كسرية . وسوف نرى فى الباب القـــادم كيف يؤدى إطلاق المعامل س من العمل فقط على الأعداد الصحيحة إلى حيلة الحذف الزمنى التى هى أختراع فى تاريخ الحساب ،

والعملية $ا^{س}$ مثل حا س ، صا س ، تلعب دوراً هاما فى قيـاس التيـارات المتغيرة بعـد أن أصبحت تقوم بعمليات منعها من القيـام بها قيود إقليدس وقوانين التفرقة بين البيض والسود للوحة العد .

معنى العبارة < ( ) . ربما يساعدك فيها بعد أن تتوقف عن ذكر هذا الحديث عند هذه النقطة لكى تدخل بسيطة فى أجرومية الحجم . إنك تعلم جيداً أن الفعل « يفعل » فى اللغه الانجليزبة يمكن أن يقوم مقام أى مثل آخر، كما كان الآباء فى عهد الملكة فيكتوريا يقولون لأطفالهم « إفعلوا كما تأمرون ».
والفعل العالمى المناظر لأى عامل فى الرياضة يكتب فى الصورة < ( ) أو ه( ) فهو يعنى « إبحث عن القيمة المناظرة إلى . . . . فى جدول » . إذن تدل الجملة

ص = < (س)

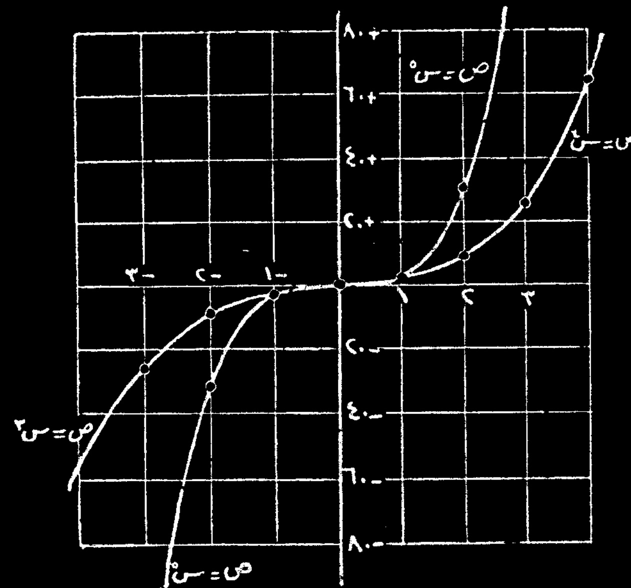
على « إبحث عن قيمة ص فى جدول به قيم س » أعنى أن س هى عمود الانتقال المناظر إلى ص عمود الوصول فى الجدول الزمنى الذى ننشأه عند رسم منحنى .

ونحن ندرس كثيراً من قواعد جميع الافعال أو معظمها من أ[illegible]رزنية أحاديثنا اليومية . فمثلا ينتهى اسم الفاعل للأفعال الانجليزية بالحرف « i n g » وعلى ذلك جعل حكومة اشتراكية الزراعة ملكا للمجتمع وتأميم حكومة استعمارية للمناجم مثالان يوضحان القاعدة الاجرومية السابقة بالرغم من أنهما شيئان مختلفان تماما عن بعضهما . كذلك هناك قواعد تطبق على جميع أو على معظم المعاملات الرياضية . إحدى هذه القواعد وهى التى تطبق على جميع المنحنيات الملساء وليست لها زوايا حادة ، لها علاقة مهمة جداً باكتشاف متسلسلات ٢^{س} ، حا س ، صا س .... الخ ، التقاربية .

هذه القاعدة ليس بالصعب إدراكها ، متى اعتدت على أشكال المنحنيات الآتية وذلك برسمها :

(ا) ص = س ، ص = س^{٣} ، ص = س^{٥} الخ
(ب) ص = س^{٢} ، ص = س^{٤} ، ص = س^{٦} الخ

وقد سبق أن درسنا شكل المنحنى ص = ا س^{٢}
وأشكال المنحنيات التى تناظر ص = س^{٤} ، ص = س^{٦} الخ مماثلة إلا أنها . أشد انحداراً .



شكل (١٥٥) منحنيات
ص = س^{٣} ، ص = س^{٥}

وحسب قاعدة الإشارة (— س) (— س) .... (س) ، إلى م حق الحدود ، يساوى س^{م} متى كانت م زوجية وعلى ذلك فمنحنى الدالة ص = س^{م} حيث م زوجية على هيئة الحرف u لأن ص دائماً موجبة مهما كانت إشارة س.
ويوضح شكل ١٥٥ . منحنيات الدالة ص = س^{م} عند ما تكون م فردية وهى جميعها بنقطة الأصل متجهة إلى أعلى نحو اليمين وإلى أسفل نحو اليسار وذلك لأن تمر (س) (— س) .. .. .. (— س) ، إلى م من الحدود ، حيث م فردية يساوى — س^{م} . إذن ص سالبة عندما تكون س سالبة . كذلك منحنيات الدوال ص = — س^{٣} ، ص = — س^{٥} .. الخ .

لها نفس الشكل فهى تمر بنقطة الأصل إلا أنها تتجه إلى أعلا نحو اليسار

وإلى أسفل نحو اليمين . ولكى نفرق بين المنحنيات التى تمثل القوى الزوجية والمنحنيات التى تمثل القوى الفردية ، نكتب معادلاتها فى الصورتين الآتيتين .

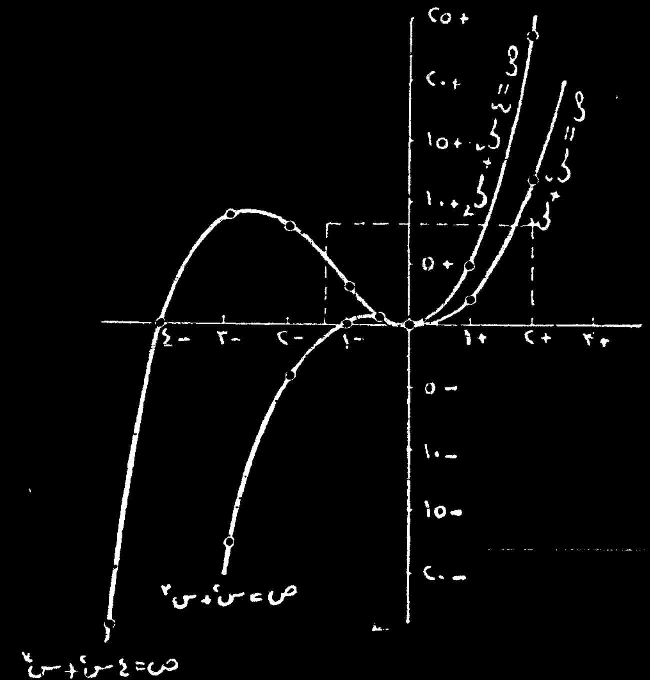
$$ص = س^{٢ن} \quad ، \quad ص = س^{٢ن+١}$$

إذن عندما ن = ١ ، $س^{٢ن} = س^{٢}$ ، $س^{٢ن+١} = س^{٣}$ وعندما ن = ٢ ، $س^{٢ن} = س^{٤}$ ، $س^{٢ن+١} = س^{٥}$

يمثل الشكلان الآتيان منحنيين ينتميان إلى مجموعة المنحنيات التى تمثلها المعادلة .

$$ص = ا\,س^{٢ن} + ب\,س^{٢ن+١}$$

ويمكنك أن تلاحظ أنه لقيم س الكبيرة فى شكل ١٥٦ (قارن بشكل ١٥٥)



شكل (١٥٦)

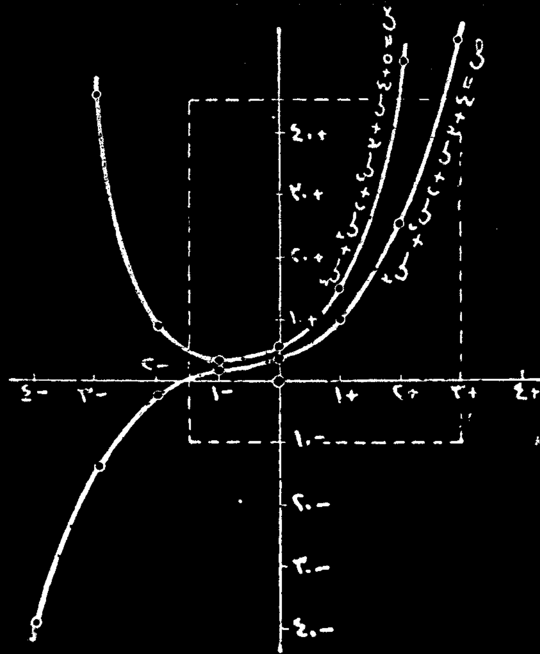
يصبح المنحنى مماثلا المنحنى $ص = ب\,س^{م}$ حيث م فردية ، أى أن

$$ص = ب\,س^{٢ن+١}$$

وهذا ما يجب أن نتوقعه ، فعندما س = ٢ نجد أن $س^{٣}$ ، ولكن عندما س = ٨ نجد أن $س^{٣}$ ثمانية أمثال $س^{٢}$. أما لقيم س الصغيرة فإن شكل المنحنى يقرب جداً من شكل المنحنى $ص = ا\,س^{٢ن}$

وهذا أيضاً بديهى ، فعندما س = ١ نجد أن $س^{٢} = ١ = س^{٣}$ وعندما س = $\frac{١}{٤}$ فإن $س^{٢} = \frac{١}{١٦}$ ، $س^{٣} = \frac{١}{٦٤}$ أى أن $س^{٢}$ أربعة أمثال $س^{٣}$.

إذن فى الجوار المباشر لنقطة الأصل (س = ٠ = ص) تكون القوة



شكل (١٥٧) منحنيات المعادلات

$$ص = ٤ + ٣\,س + ٢\,س^{٢} + س^{٣}$$

$$ص = ٥ + ٤\,س + ٣\,س^{٢} + ٢\,س^{٣} + س^{٤}$$

الأصغر ($س^{٢ن}$) هى العامل المهم الذى يؤثر فى شكل المنحى ، بينما عند ما تكون س كبيرة فإن القوة الأكبر ($س^{٢ن+١}$) هى العامل المهم فى شكل المنحنى .

ويبين لك شكل ١٥٦ شيئاً آخر ، إذ يمكنك تكبير منطقة المنحنى التى عندها القوة الأصغر هى العامل المهم وذلك بجعل ا كبيرة بالنسبة إلى فى منحنى الدالة

$$ص = ا س^{٢ن} \pm ب س^{٢ن+١}$$

ففى كلا المنحنيين ن = ١ وفى أحدهما (المنحنى الأسفل) ا = ١ = ب ومن الصعب أن تتعرف على جزء المنحنى الذى يشبه الحرف U . أما فى المنحنى الآخر ا أربعة أمثال ب ، وهناك منطقة كبيرة إلى حد ما فيها المنحنى يشبه الحرف U للمنحنى $ص = س^٢$ ذى القوة الأصغر . ولقد جعلنا ص مقصورة إلى حد ما فى منحنى الشكل التالى (١٥٧) إذ أن معادلتى المنحنيين هما

$$ص = ٤ + ٣ س + ٢ س^٢ + س^٣$$

$$ص = ٥ + ٤ س + ٣ س^٢ + ٢ س^٣ + س^٤$$

عندما ترسم هذين المنحنيين بنفسك ، قارنهما بشكل ١٥٤ الذى يمثل المنحنى

$$ص = ا^{س}$$

وسوف ترى أنه داخل المساحة المستطيلة المحددة بالخطين الموازيين لمحورى الإحداثيات ، أن شكل منحنى ١٥٤ يماثل لدرجة كبيرة جداً المنحنيين فى شكل ١٥٧ . وفى الحقيقة لو أعطينا ا قيما مناسبة تختلف عن قيمتها (ا = ٢) فى شكل ١٥٤ ، أمكنك أن تأخذ أى المنحنيين كتقريب لقيم $ا^{س}$ فى حدود خاصة.

وإذا عدت الآن إلى شكلى ١٥٨ ، ١٥٩ فإنك ترى منحنيي

$$ص = ٦ س - س^٣$$

$$ص = ٤ - ٥ س^٢ + س^٤$$

ونلاحظ أن إحدى المعادلتين تحتوى على قوى فردية فقط والأخرى على قوى زوجية فقط ، كما أن المنحنيين فى الجوار المباشر لنقطة الأصل دوريان

أو كالأمواج ويقتربان من المنحنيين الممثلين بالمعادلتين

$$ص = ا حا ب س$$

$$ص = ا حتا ب س$$

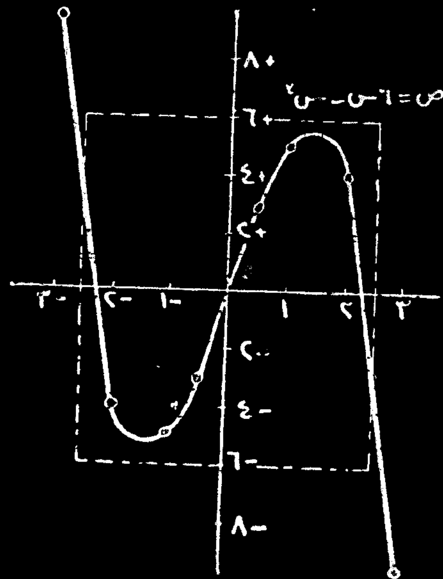
والنقطة المهمة التى تلاحظها على المنحنى الثانى هى أنه بوضع قوة أخرى من قوى س ، نكون قد أضفنا نصف دورة واحدة للمنحنى . وجميع ما رسمنا من منحنيات يمكن تمثيلها بأعضاء مجموعة واحدة

$$ص = ا + ب س + حـ س^٢ + ء س^٣ + هـ س^٤ + و س^٥ \quad \text{وهكذا}$$

أو لو استعملنا الفعل العام

$$ء (س) = ا + ب س + حـ س^٢ + ء س^٣ + هـ س^٤ + و س^٥ \quad \text{وهكذا}$$

وهى تختلف فى إشارات وقيم ا ، ب ، حـ .... الخ ، العددية ، والمسماة بثوابت المعادلة . إذن قيم ثوابت المنحنى $ص = ٦ س - س^٣$ هى



(شكل ١٥٨) المنحنى الذى معادلته $ص = ٦ س - س^٣$

(شكل ١٥٩) المنحنى الذى معادلته
ص = ٤ - ٥ س² + س⁴

ب = ٦ ، ٦ = — ١ ، ١ = صفر = حـ = ٥ = ٠٠ الخ

إذن ما رأيناه يبرر اشتباهنا فى أنه باستعمال عدد كاف من قوى س(س ، س² ، ٠٠٠٠ ، س° ، س⁷ ، ٠٠٠) يمكن تكوين منحن بقترب بأية درجة نشاء من منحنيات مثل :

ص = أ^س

أو ص = حا س

وسوف يكون هذا الأساس الذى نستخدمه فى إيجاد متسلسلتين لكل من حا س ، أ^س ومتقاربتين مثل الكسر الدائر .

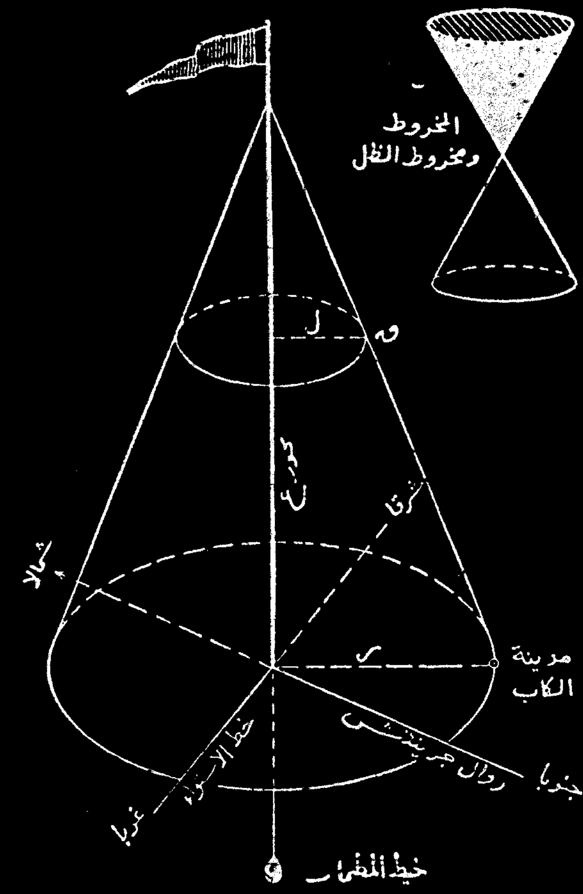
الخريطة الهندسية للطائرة والغواصة — لقد خصص إقليدس مكانا لهندسة الأجسام الصلبة أما أبولونيس فقد طبق هندسة أقليدس للأجسام الصلبة على دراسة المنحنيات . ولعلك تذكر أننا أوردنا سببا فى الباب الرابع ، لحذف أى بيان عن « هندسة إقليدس للأجسام الصلبة » . هذا السبب هو أن الأجسام الصلبة يمكن تصويرها وقياسها بطرق سهلة ومركزة فيما بعد . ولقد رأينا حتى الآن ، عند وصفنا لهندسة عصر النهضة ، كيف سهدت خرائط المسطح لعالم الملاحات الكبرى الطريق إلى طريقة جديدة لدراسة الأشكال المسطحة ، فهذه

الخرائط مفيدة جداً للسفن فى البحار . أما فى هـــذه الأيام فلدينا الغواصات التى تسير على أعماق مختلفة ، والطائرات التى تحلق على ارتفاعات متباينة ، عن سطح البحر . إذن طريقـــة خط الطول (شرق — غرب) وخط العرض (شمال — جنوب) لوصف حركات طرق المواصلات الحديثة لا تفى بجميع حاجيات النقل ، لكن هندسة عصر النهضة يمكن أن تفى بما تتطلب الغواصة والطائرة وذلك دون أية صعوبة . إذن الطريقة الكرتيزية يمكنها أن تصف فراغ جسم صلب كما تصف الأشكال المرسومة فى مستوى .

وما نحتاج إليه الآن هو أن تعود إلى مركز العالم عند خليج جينيا ، نرس المركب ، نسقط مطهاراً رأسيا إلى أسفل ، وننصب صاريا رأسيا إلى أعلا وبه علم برلمان الرجل ليذكرنا بأن الأمم المتحضرة تعتبر الحروب الحديثة فرعاً منحطا من القرصنة . يمثل الصـــارى والمطهار المحور السينى لكل من ارتفاع المركب وعمق الغواصة . إذن أية نقطة فى فراغ مجسم يمثلها ثلاث إحداثيات : الإحداثى السينى (ع) مأخوذ على مواز للارتفاع أو العمق ، الاحداثى السينى (س) مأخوذ على مواز لخط طول ، الاحداثى الصاوى (ص) مأخوذ على مواز لخط عرض . وقد سبق أن رأينا أن الشكل المسطح يمثله معادلة تعين منها ص حتى علم قيم س المختلفة أما شكل المجسم فتمثله معادلة تعين منها ع متى علم قيم س ، ص المختلفة او بعبارة أخرى هى معادلة تعطى الاحداثى العينى للارتفاع أو العمق المناظر لكل نقطة (جبل مثلا أو غابة) لها خط طول معلوم وخط عرض معلوم على سطح خريطة المسقط المسطح .

فى شكل ١٦٠ ، أقمنا عند مركز العالم فى خليج جينيا المحور العينى منطبقا على الصارى ذى الراية والمطهار ، وسنستنتج معادلة المخروط لتوضيح الطريقـــة الكرتيزية لإيجاد معادلة شكل الجسم .

نفرض أن مركز قاعدة المخروط الدائرية (نصف قطرها س) يقع على سطح خليج جينيا عند خط طول صفر° وخط عرض صفر° . إذن جميـــع الشرائح الموازية لسطح البحر هى دوائر كذلك كل نصف شريحة رأسية دائرة



شكل (١٦٠)

بمحور المخروط عبارة عن مثلث قائم الزاوية . نعتبر الآن النقطة ه الواقعة فى حوالى منتصف البعد بين محيط القاعدة ورأس المخروط ، الازاحة الأفقية لهذه المنطقة هى ل والازاحة الرأسية ع ، ومما سبق نعلم أن العـــلاقة بين الاحداثى الأفقى والاحداثى الرأسى لنقطة على مستقيم تعطى بالمعادلة .

$$\text{ص} = \text{ا س} + \text{ب}$$

حيث س البعد الافقى ، ص البعد الرأسى .

فإذا سمينا البعد الرأسى ع بدلا من ص والبعد الأفقى ل بدلا من س ، يمكن كتابة المعادلة كالآتى .

$$\text{ع} = \text{ا ل} + \text{ب}$$

$$\text{أو}\quad \text{ع} - \text{ب} = \text{ا ل}$$

كذلك إذا كان ر هو بعد أية نقطة على محيط دائرة عن مركز العالم فإن العلاقة بين ر ، س (خط الطول) ، ص (خط العرض) على خريطة مسطحة هى

$$\text{ر}^{٢} = \text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢}$$

وهذه العلاقة صحيحة بالنسبة لأية دائرة توازى سطح البحر ومركزها يقع فوق مركز العالم مباشرة .

إذن يمكننا كتابة المعادلة الآتية :

$$\text{ل}^{٢} = \text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢}$$

$$\text{أو}\quad \text{ا}^{٢}\,\text{ر}^{٢} = \text{ا}^{٢}\,(\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢})$$

$$\text{لكن}\quad \text{ا}^{٢}\,\text{س}^{٢} = (\text{ع} - \text{ب})^{٢}$$

$$\therefore\quad \text{ا}^{٢}\,(\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢}) = (\text{ع} - \text{ب})^{٢}$$

ولاستخدام هذه العملية فى الحساب يلزمنا معرفة ا ، ب . وعند ر ، ع = ف ، إرتفاع المخروط ، ل = صفراً . إذن إذا كان

$$\text{ع} = \text{ا ل} + \text{ب}$$

$$\text{فإن}\quad \text{ب} = \text{ف}$$

وعند ما ع = صفراً ل = ر ، نصف قطر القاعدة ، أى أن

$$\text{صفر} = \text{ا ر} + \text{ب}$$

$$\therefore\quad \text{ا} = -\frac{\text{ب}}{\text{ر}}$$

$$= -\frac{\text{ب}}{\text{ر}}$$

$$\text{إذن يمكن كتابة المعادلة}\quad \text{ا}\,(\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢}) = (\text{ع} - \text{ب})^{٢}$$

والقطع الناقص . فالدائرة هى منحن فيه س ، البعد بين أية نقطة على المحيط والمركز ، دائماً ثابتة مهما كانت الزاوية α التى يصنعها المستقيم س مع خط الإستواء . إذن إذا كانت ح كمية ثابتة فإن المعادلة القطبية الدائرة هى

$$ر = ح$$

والمستقيم يصنع زاوية ثابتة مع خط الأستواء وجميع خطوط العرض ، إذن إذا مر بنقطة الأصل فمعادلته هى

$$α = ح$$

فى شكل ١٦١ ، البعد (ر) عن إحدى البؤرتين هو أحد الأحداثيين القطبين والزاوية α التى يصنعها المستقيم الواصل ما بين أية نقطة ں والبؤرة ، الأحداثى القطبى الآخر . بما أن مجموع البعدين البؤريين ثابت (٢ ى) ، فان طول البعد البؤرى الاخر يكون ٢ ى — ر والثوابت ح ، ى ، e تعنى نفس الأشياء كما فى شكل ١٤٥ . القطر إلى المثلثين القائمى الزاوية الموجودين فى شكل ١٦١ ، نجد أنه من (١)

$$ل = ر\ حا\ α\ ٢\ ك = ر\ صا\ α$$

وأيضا من معادلة ٢ فى توضيح رقم ٨

$$(٢ى - ر)^{٢} = (٢ى\ e + ك)^{٢} + ل^{٢}$$

$$= (٢ى\ e + ر\ صا\ α)^{٢} + (ر\ حا\ α)^{٢}$$

$$∴ ٤ى^{٢} - ٤ى\ ر + ر^{٢} = ٤ى^{٢}\ e^{٢} + ٤ى\ e\ ر\ صا\ α$$

$$+ ر^{٢}\ صا^{٢}\ α + ر^{٢}\ حا^{٢}\ α$$

وإذا نظرت إلى التذييل الموجود بصفحة (٢٥١) من الباب السادس سترى أن

$$ر^{٢}(صا\ α + حا^{٢}) = ر^{٢}$$

$$∴ ٤ى^{٢} - ٤ى\ ر + ر^{٢} = ٤ى^{٢}\ e^{٢} + ٤ى\ e\ ر\ صا\ ه + ر^{٢}$$

بالقسمة على ٤ ، حذف ر^٢ من كل من الطرفين نحصل على

$$ى - ر = ى\ e^{٢} + e\ ر\ صا\ α$$

$$∴ ى - ى\ e^{٢} = ر\ (١ + e\ صا\ α)$$

وبالرجوع إلى شكل ١٤٥ مرة أخرى ، ستتذكر أن إذا كان م هو نصف المحور الأصغر فإن

$$م^{٢} = ى^{٢}\ (١ - e^{٢})$$

وبالمثل إذا كان م نصف المحور الأكبر

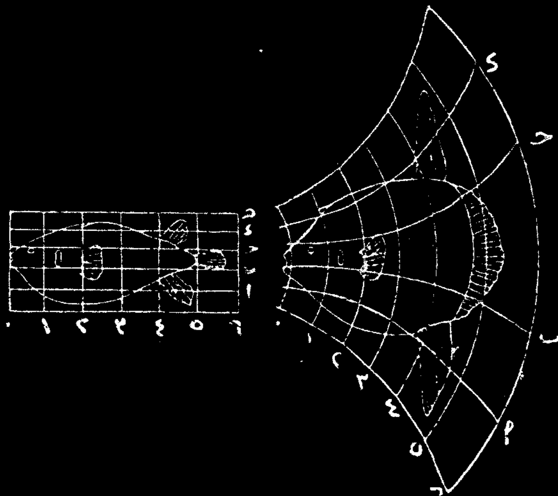
$$م = ى$$

$$\frac{م^{٢}}{م} = ى - ى\ e$$

وعلى ذلك تستطيع أن نضع المعادلة القطبية للقطع الناقص فى الصورة

$$\frac{م^{٢}}{م} = ر\ (١ + e\ صا\ α)$$

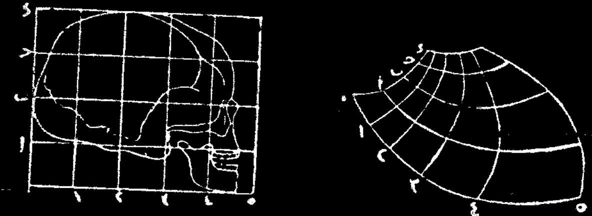
$$أو\ ر = \frac{م^{٢}}{م\ (١ + e\ صا\ α)}\ .$$



(شكل ١٦٢٠)

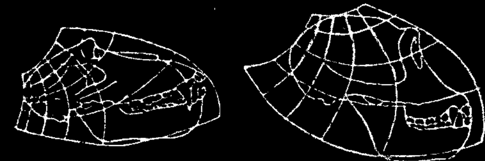
على اليسار نموذج مثالى لـ Genus Diodon وعلى اليمين ، يقول الأستاذ داركى تومسون : لقد حولت الإحداثيات الرأسية إلى مجموعة من الدوائر المتحدة المركز والإحداثيات الأفقية إلى مجموعة من المنحنيات التى تشابه مجموعة من القطاعات الزائدة . وبذلك يظهر الشكل القديم فى الإحداثيات الجديدة كتمثيل واضح لنوع السمك الذى يرتبط ارتباطاً وثيقاً بالنوع المدروس والذى يختلف عنه اختلافاً بيناً فى الشكل وهو سمك الشمس Sunfish .

وهناك طريقة أخرى لتمثيـــل النقطة بواسطة نوع من الخرائط يسميه الجغرافيون خرائط فالامستيد[١] أو مولوايد[٢] للمسقط ويسميها الرياضيون الاحداثيات المقوسة . ولما كانت خطوط الطول تتجمع عند القطبين فهى ليست متوازية لخطوط العرض ، لكن طريقة مركاتور الاسقاطية تمثـــل خطوط الطول بمستقيمات متوازية لذلك فهى تشوه حجوم القارات والمحيطات بالنسبة إلى بعضها ، جاعلة بلادا مثل جرينلاند التى تقع فى أقصى الشمال تبدو كبيرة عن حقيقتها . أما خرائط فلامستيد للمسقط فهى تصحح هذا التشويه بتمثيل خطوط

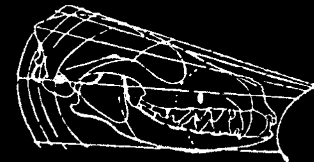


جمجمة بشرية فى إحداثيات كرتزية

إحداثيات جمجمة الشمبانزى كإسقاط من على أعلى



جمجمة شمبانزى (يمين) وجمجمة بابوون (يسار)



جمجمة كلب

(شكل ١٦٢ «ا»)

---

(١) Flamsteed (٢) Molluside

الطول على مستقيمات مقوسة تتجمع عند القطبين ، وهناك تطبيق على الاحداثيات المقوسة فى شكل ١٦٢ ، مأخوذ من كتاب "Growth and Form" للاستاذ داركى تومسون[١] أحد كبار المتحدثين باللغة الانجليزية فى العالم . هذا التطبيق ينبهنا إلى أمر هام وهو : تشبه جمجمة أو جسم أحد الأجناس مرسوم تبعاً للظام الكرتيزى . وربما يؤدى إستخدام هذه الطريقة إلى مفتاح قوانين النمو فى تشرد الأجناس .

تحديدات هندســـة عصر النهضة ـــ ر وضعنا نصب أعيننا طول دراستنا هذه أن تطبيق الرياضة على العالم الحقيق يعطى وصفاً تقريبيا للأشياء التى نراها أو نسمعها أو نعالجها . لقد رأينا كيف ترك أقليدس الزمن من حساب الهندسة وكيف أدخله ديكارت فى الهندسة . ولـكن هل يعنى هذا أن هنـــدسة عصر النهضة أعطتنا أخيراً وصفا كاملا للعالم : لاشك أن الاجابة بالنفى ، فقد تركت الهندسة الجديدة شيئا كما فعلت هندسة الأغريق ، ولـكى تتحقق من هذا الشىء عد مرة أخرى إلى مسألة البندول ، فترى كيف لاتمثل المعادلة

ص = ا صا ب س تذبذب البندول تمثيلا تاماً .

والسبت فى ذلك أن منحنى المعادلة يمتد على اليمين وعلى اليسار إلى أية درجة نشاء . أعنى أنه لو كانت س تدل على الزمن فإن المعـادلة تشير إلى أن بندول يتذبذب منذ الأزل قبل أن تبدأ قراءاتك ، فعندما نرسم المنحنى مبتدئين من زمن ما ، نـكون بذلك أدخلنا شيئا لاوجود له فى الشكل الرياضى للمنحنى كما لو أسقطنا من حسابنا أحد أجوبة معادلة المخروط لأننا نستعمل أحد المخروطين الذى تمثله المعادلة .

وتختلف الديناميكا فى رياضة الأغريق عنها فى رياضـــة عصر النهضة ، فالأخيرة تدخل الزمن فى حسابها . كما أن رياضة عصر النهضة لبسمت بتاريخية فلا تدخل فى حسابها التاريخ الماضى ، إذ نشأت مدة التجارة عندما كانت السفن

---

(١) D'Arcy Thompson

تستخدم الفلك لتسير فى البحار . والتاريخ الماضى ليس بذى أهمية للاغراض الفلكية لأن خواص عالم نجوم تتغير قليلا فى مدة تؤثر فى حاجات الانسان الاجتماعية ؛ فيمكننا استخدام نفس الأسس الحسابية متى حدث أو سيحدث كسوف وتولى الطبيعة الحديثة والكيمياء الحديثة وعلم الحياة الحديثة عناية كبيرة جداً نحو مسائل النمو والانحلال ، والناحية التاريخية القديمة أصبحت مسألة مهمة فى العلوم الطبيعية . وفى تاريخ الثقافة التجارية ، نجد أن مستقبل العدل الانسانى يتوقف أكثر وأكثر على تفهم العلاقات الانسانية على ضوء الخبرة التاريخية . فنحن قد بدأنا نرى أن الرياضة التى تسمح لنا بالحركة ليست كافية بل نحتاج إلى رياضة تختص بالبحث فى « من أين أتينا وإلى أين سنرحل » .

تمارين على الباب التاسع

سنذكر الآن نقطة مهمة جداً فى جميع تمارين المنحنيات يجب أن تتذكرها إذ ربما لم تتبينها عند قراءة الكتاب . إذا استخدمنا منحنى لتمثيل شكل هندسى بالضبط يلزمنا استخدام وحده قياسية واحدة لكل من س ، ص أى أن $\text{س}^{\text{٢}} + \text{ص}^{\text{٢}} = \text{س}^{\text{٢}}$ هى معادلة دائرة متى قيست كل من س ، ص بنفس الطول ، فلو كانت ص كبيرة جداً بالنسبة إلى س كان من المناسب أن نمثل الوحدة من س بمقدار ١سم والوحدة من ص بمقدار ٠٫١ سم وعلينا أن نتذكر أن المسافة المناسبة على أحد المحورين تختلف فى قيمتها عن المسافة مقاسة على المحور الآخر .

إذن يمكن أن نختار وحدات القياس بأية طريقة تشاء عند رسم المنحنيات التى تمثل القوانين الطبيعية .

وقبل أن تحاول أى مثال ، بين أن الدائرة هى الشكل الذى معادلته

$$\text{ص} = \sqrt{\text{٢٥} - \text{س}^{\text{٢}}}$$

ولذلك كون جدولا لجميع قيم ص المناظرة لقيم س الواقعة بين −٥ ، +٥

بحيث يكون الفرق بين أى قيمتين متتاليتين $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$. (استخدم جدولا للجذور التربيعية) .

إذن عند ما $\text{س} = - \text{٤} \frac{\text{١}}{\text{٢}}$

$$\text{ص} = \sqrt{\text{٢٥} - \left(\frac{\text{٩}}{\text{٢}}\right)^{\text{٢}}}$$

$$= \frac{\text{١}}{\text{٢}} \sqrt{\text{١٩}} = \pm \frac{\text{١}}{\text{٢}} (\text{٤٫٣٦})$$

$$= \pm \text{٢٫١٨}$$

وقّع على المنحنى النقطتين اللتين ± ٢٫١٨ من الوحدات مقيسة على محور الصادات ، − ٤ ½ على محور السينات ، وبالمثل لجميع النقط الأخرى فى الجدول ثم إرسم المستقيم المار بين هذه النقط .

١ — يتحرك مصعد فى بناء مكون من ستين طابقاً ومبتدئا من الطابق السفلى كالآتى : يصعد عشرين طابقاً وينزل أربعة طبقات وبعد ذلك يتحرك إلى أعلى ثمانية طبقات وإلى أسفل ثلاث طبقات ثم سبعة عشر طبقة وبعد ذلك يصعد عشرة ويهبط واحدة ثم يصعد خمسة ، وإحدى عشر ثم يهبط أربعة وعشرين . فما موضعه الآن فى نهاية هذه الفترة .

٢ — إرسم منحنى دائرة نصف قطرها ٤ سم ومركزها يقع

(ا) عند نقطة الأصل (ب) عند النقطة س = ٢ ، ص = ٣

ما هى المعادلة الكرتيزية فى كل حالة ؟

٣ — برهن على أن الزاوية التى يضعها المماس لدائرة عند أية نقطة مع محور السينات هى $- \frac{\text{س}_{\text{٠}}}{\text{ص}_{\text{٠}}}$ حيث $\text{س}_{\text{٠}}$ ، $\text{ص}_{\text{٠}}$ إحداثيات النقطة .

بين من الرسم الذى رسمته الآن أنه إذا كانت زاوية α موجبة ومقاسة بالتقدير الدائرى فإن حا α أقل من α وظا α أكبر من α .

٤ — إذا كان س أى طول مقيس بالبوصات ، ص أى طول مقيس بالأقدام ، فإن ١٢ ص = س

إرسم منحنى مكونا من خمسة نقط ويربط العلاقة بين البوصات والأقدام ثم أقرأ من المنحنى عدد البوصات فى ١ ¾ قدماً ، ٣٫٦ قدما ، ٤٫١ قدماً .

٥ — كون منحنيات مماثلة للتحويل من سنتيمترات إلى بوصات ومن جنيهات إلى دولارات ومن بنتات إلى أرطال للماء .

٦ — ارسم المنحنى ص = ٣ س + ٤
ثم ارسم بعد ذلك (دون استخدام جدول)

$$\text{٣ ص = ٥ س + ٦} \qquad \left(\text{أى ص} = \frac{\text{٥ س}}{\text{٣}} + \text{٢}\right)$$

$$\text{ص = ٣٢ س + ٤٠}$$

٧ — يتجمد الماء عند درجة ٣٢ فهرنهيتية ويغلى عند درجة ٢١٢ فهرنهيتية . وحسب المقياس المئوى فيتجمد عند الصفر ويغلى عند ١٠٠° . إثبت أن العلاقة بين المقياس الفهرنهيتى والمقياس المئوى تتعين بالمعادلة

$$\text{ف} = \frac{\text{٣ م}}{\text{٥}} + \text{٣٢}$$

إرسم منحنى هذه المعادلة ومنه عين الدرجة المئوية المناظرة لدرجة حرارة الدم العادية (٩٨٫٤° ف)

٨ — ما هى زاويتا ميل المستقيمين
(أ) ص = س + ٣
(ب) ص = $\sqrt{\text{٣}}$ س + ٢
على محور السينات ؟

٩ — إذا مثلت مجموعة من المستقيمات بالمعادلات
ص = م س + ١
ص = م س + ٢
ص = م س + ٣ الخ
فماذا تعرفه عن هذه المستقيمات ؟

١٠ — ماذا يمثل المقدار ح فى المعادلة ص = م س + ح بيانيا ؟

١١ — ما هى معادلة المستقيم الموازى لمحور السينات ؟

١٢ — خرج مستر إقانس للسير ، فقطع ثلاثة أميال فى الساعة الأولى ، ٢½ ميلا فى الساعة التى تليها ، ٢ ميلا بعد ذلك ثم أخذ بعد ذلك راحة قدرها ثلاثة أرباع ساعة وسار بعد ذلك بمعدل منتظم قدره ٢ ½ ميلا فى الساعة وذلك لمدة ثلاث ساعات . إوجد بواسطة الرسم البيانى المسافة التى قطعها مستر إقانس فى ساعة ونصف وثلاثة ساعات ونصف وخمسة ساعات ونصف .

وإذا بدأ مستر ديفس من نفس النقطة بعد مستر إقانس بساعتين مستخدما دراجة يسير بها بسرعة منتظمة قدرها ستة أميال فى الساعة ، فوضح رحلة مستر ديفس على الرسم السابق ثم عين المسافة من نقطة الابتداء فى اللحظة التى لحق فيها مستر ديفس بمستر إقانس .

١٣ — إرسم المستقيمين
٢ ص + ٣ س = ٣١
٣ ص + ٢ س = ٣٩
فى شكل واحد ، ثم عين نقطة تقاطعهما . (انظر الباب السابع لكى ترى الطريقة البيانية لحل المعادلات الآتية :)

١٤ — حل المسائل الموجودة فى تمرين ١٤ ، الباب السابع ، بيانيا ثم قارن بين النتائج التى تحصل عليها والنتائج السابقة .

١٥ — إرسم باعتناء منحنى المعادلة ص = س$^{\text{٢}}$ لقيم س الواقعة بين — ١٠ ، ١٠ وحيث وحدة ص تساوى وحدة س استخدم المنحنى الآتى :
(أ) كون جدولا للجذور التربيعية للأعداد من ١ إلى ١٠٠
(ب) كون جدولا لمربعات الأعداد من ١ إلى ١٠٠

١٦ — إرسم المنحنيات الآتية :
(أ) منحنى للعلاقة بين مساحة المثلث المتساوى الأضلاع وقاعدته
(ب) منحنى للعلاقة بين مساحة المثلث المتساوى الساقين وكل من زاويتى قاعدته تساوى ٤٥° ، والقاعدة .

(حـ) منحنى العلاقة بين مساحة المثلث القائم الزاوية وإحـــدى زواياه ٣٠° وقاعدته .

١٧ — إذا علم القيم الآتية لطول البندول وزمن الذبذبة

زمن الذبذبة بالثوانى	٧و	٨و	٩و	٥و	٦و	٤و
الطول بالسنتيمترات	٤٩	٦٤	٨١	٢٥	٣٦	١٦

فارسم المنحنى . ماهى معادلته ؟

١٨ — إوجد الصيغة التى تربط المساحة (ص) ونصف القطر (س) لدائرة وذلك برسم منحن فيه قيم المساحة معينة بطريقة عد المربعات فإذا كانت الصيغة الصحيحة هى

ص = حـ س^٢

فعين قيمة حـ من المنحنى

١٩ — حل المعادلات الآنية الآتية باستخدام الرسم البيانى .

(١) س ص = صفراً (ب) س^٢ + ص^٢ = ٢٥ (حـ) (س — ص)^٢ = ١
٣س + ٤ص = ١٢ س + ص = ٧ (٣س — ٥ص)^٢ = ١

٢٠ — ماهما المنحنيان اللذان تمثلهما المعادلتان

ص = ± ٥/٣ √(١٦ — س^٢)

ص = ± ٤/٧ √(٤٩ — س^٢)

إلى أى نوع من المقاييس تشير إليها الأعداد ؟

٢١ — إرسم المعادلة الكرتيزية والقطبيـــة للقطع الناقص الذى محوره الأكبر ٣ ومحوره الأصغر ٢ من وحدات الطول .

٢٢ — باستخدام الصيغ حا (ا + ب) ، جتا (ا + ب) فى ص وبوضع حا ١٨٠° = حا (٩٠° + ٩٠°) ، جتا (١٨٠°) = جتا (٩٠° + ٩٠°) ، حا ٢٧٠° = حا (١٨٠° + ٩٠°) الخ ؛ برهن على أن :

(١) حا ١٨٠° = صفراً حا ٢٧٠° = — ١ حا ٣٦٠° = صفراً
(ب) جتا ١٨٠° = — ١ جتا ٢٧٠° = صفراً جتا ٣٦٠° = ١

باستعمال هذه الصيغ إثبت أن

حا (٩٠° + ا) = + جتا ا ، جتا (٩٠° + ا) = — حا ا ،
طا (٩٠° + ا) = — ظتا ا ، حا (١٨٠° + ا) = — حا ا ،
جتا (١٨٠° + ا) = — جتا ا ، طا (١٨٠° + ا) = ظا ا ،
حا (٢٧٠° + ا) = — جتا ا ، جتا (٢٧٠° + ا) = حا ا ،
طا (٢٧٠° + ا) = — ظتا ا ، حا (٣٦٠° + ا) = حا ا ،
جتا (٣٦٠° + ا) = + حتا ا ، ظا (٣٦٠° + ا) = + طا ا ،

٢٣ — باستخدام صيغتى حا (ا — ب) ، جتا (ا — ب) فى الباب العاشر ص ، ص ،
برهن على أن

حا (٩٠° — ا) = جتا ا جتا (٩٠° — ا) = حا ا طا (٩٠° — ا) = ظتا ا
حا (١٨٠° — ا) = حا ا جتا (١٨٠° — ا) = — جتا ا طا (١٨٠° — ا) = — ظا ا
حا (٢٧٠° — ا) = — جتا ا جتا (٢٧٠° — ا) = — حا ا طا (٢٧٠° — ا) = ظتا ا
حا (٣٦٠° — ا) = — حا ا جتا (٣٦٠° — ا) = جتا ا طا (٣٦٠° — ا) = — طا ا

٢٤ — فسر بالرسم معنى الآتى وحقق نتائجك بوضع حا (— ا) = حا (٠ — ا) الخ
حا (— ا) = — حا ا جتا (— ا) = جتا ا طا (— ا) = — طا ا

٢٥ — حا (١٣٠°) = حا (٢ ن × ٩٠° — ٥٠°) [حيث ن = ١]
= حا (١٨٠° — ٥٠°)
= حا ٥٠°

، حا ١٣٠° = حا (٢ن + ١ × ٩٠° + ٤٠°) [حيث ن = صفرا]
= جتا ٤٠°
= حا ٥٠°

وبنفس الطريقة ، إوجد بطريقتين متعاقبتين قيم
طا ٢١٠° حا ٢٣٠° جتا ٢٣٠°
طا ١٢٠° حا ١٥٠° جتا ١٠٠°

٢٦ — حل معادلات الدرجة الثانية الآتية بالطريقة الموجودة فى ص
وحقق النتائج بطريقة ص

(ا) ٥ س^{٢} + ٢ س = ٧

(ب) ٨ س^{٢} − ٢ س − ٣ = صفر

(ح) ٥ س^{٢} − س − ٦ = صفر

٢٧ — إرسم منحنى حا س ومنحنى طا س مستخدما القيم س = صفر° ، ٣٠° ، ٤٥° ، ٦٠° ، ٩٠° ثم عين من المنحنى القيم التقريبية لكل من

حا ١٥°   حا ٣٥°   حا ٧٥°

طا ١٥°   طا ٣٥°   طا ٧٥°

ثم قارن هذه القيم بالجداول .

٢٨ — إرسم المنحنى ص = س^{٣} ثم كون جدول مكعبات الأعداد من ١ إلى ٢٠

٢٩ — إرسم منحنيات

٢^{س} (١,٥)^{س} ٣^{س} (١,١)^{س}

ثم عين منها قيم

٢^{٣,٥} ، (١,٥)^{١,٥} ، ٣^{٢,٥} ، (١,١)^{٠,٥}

٣٠ — إرسم منحنيات

ص = س^{٤} ، ص = س^{٥} ، ص = س^{٦} ، ص = س^{٧}

٣١ — إرسم المنحنيين

س ص = ٤ ، س^{٢} − ص^{٢} = ٨   (يسمى هذا المنحنى القطع الزائد)

٣٢ — بين بالرسم أن المعادلة س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} = نق^{٢} تمثل معادلة كرة مركزها عند نقطة الأصل .

٣٣ — إوجد باستخدام الجداول ، جيوب وجيوب تمام وظلال الزوايا الآتية : − ٢٠° ، − ١٠٨° ، ٤٠٠° ، − ٥٠٠° .

٣٤ — إرسم منحنى يبين الكمية (ص) التي يصل إليها ١٠٠ جنيه أو ١٠٠ دولار في س من السنين بمعدل ٢ ، ٢½ ، ٣ ، ٣½ ، ٤ ، ٥ في المائة إذا كان (ا) الربح بسيطاً (ب) الربح مركباً .

بعض الصيغ الهامة

١ — معادلة الدائرة   س^{٢} = (س − ا)^{٢} + (ص − ب)^{٢}

٢ — معادلة الخط المستقيم   ص = (طا ا) س + ب

٣ — معادلة القطع المكافئ   ص = ا س^{٢}

٤ — معادلة القطع الناقص $\frac{\text{س}^2}{\text{م}^2} + \frac{\text{ص}^2}{\text{م}^2} = ١$

٥ — حا (− θ) = − حا θ   حتا (− θ) = حتا θ

حا (٩٠° − θ) = حتا θ   حتا (٩٠° − θ) = حا θ

حا (٩٠° + θ) = حتا θ   حتا (٩٠° + θ) = − حا θ

حا (١٨٠° − θ) = حا θ   حتا (١٨٠° − θ) = − حتا θ

حا (١٨٠° + θ) = − حا θ   حتا (١٨٠° + θ) = − حتا θ

٦ — حا (ن ط + (−١)^{ن} α) = حا α

حتا (٢ ن ط ± α) = حتا α

طا (ن ط + α) = طا α

حا $\left[\frac{٢\text{ن} + ١}{٢} \text{ط} \pm \alpha \right]$ = (−١)^{ن} حتا α   الخ

من المهم جداً أن تكون قيم الزوايا العامة مألوفة لك وليس هناك داع لحفظها بل يمكن بسهولة استنتاجها من الشكل .

لاحظ أنه استعمل α ، θ في صيغ ٥ ، ٦ للدلالة على زاوية وهما حرفان إغريقيان لهما استعمال شائع في الرياضة للدلالة ، على كمية مجهولة كمعنى س في معادلة ، أو كميات معلومة مثل ا ، ب ، ح .

الباب العاشر

التطبيقات الاجتماعية لعلم الحساب

أو

اكتشاف اللوغاريتمات

منذ ١٥٠٠ عام سبقت الثقافة الاسكندرية فى التنبؤ بالتطورات الثلاثة الهامة فى النهضة الرياضية التى صحبت ظهور الديموقراطيات البروتستانتيــة فخرائط بطليموس ومنحنيات أبولونيوس هى أساس الهندسة التحليلية التى بحثناها فى الباب السابق .

أما طريقة أرشميدس فى إيجاد مساحة الدائرة ، وطريقة ڤيون لاستخراج الجذور التربيعية فقد أوحيا بعمليتين أساسيتين سنستفيد منهما فى باب آخر عند دراسة حساب التفاضل والتكامل وقد عثر أرشميدس أيضا على القاعدة التى بنيت عليها اللوغاريتمات وسنحول اهتمامنا الآن إلى بحث اكتشاف اللوغاريتمات والنشاط الجديد فى دراسة المتسلسلات الذى نتج عنها نتيجة لزيادة التجارة وتحسن وسائل الملاحة ، نشأت عمليات حسابية أكثر تعقيداً من التى كان يحتاج إليها الرياضيون الاسكندريون وأصبحت الحاجة ملحة إلى طرق حسابية جديدة أفضل وتحتاج إلى مجهود أقل من التى علمها لنا العرب أساتذة الحضارة الغربية ونتج عن هذا خطوة كبيرة إلى الامام فى سبيل جعل الحساب علما اجتماعيا .

إذا قارن القارىء قاعدة ضرب عددين ٣٢٤ × ٢٤٥ مثلا) بطريقة جمع نفس العددين ، نلاحظ أن عدد العمليات التى تلزم للضرب أكبر دائما من عدد التى تلزم للجمع (إلا طبعا إذا وقع أحد العددين بين ١ ، ١٠ أو كان مكرراً بسيطاً للعدد ١٠) ، كما يتضح مما يأتى :

٣٢٤
٢٤٥
——
٥٦٩ (عملية واحدة)

٣٢٤
٢٤٥
——
٦٤٨
١٢٩٦
١٦٢٠
——
٧٩٣٨٠ (أربع عمليات)

وإذا كانت الأعداد المستعملة كبيرة فإن المجهود الذى يلزم لعملية الضرب (أو القسمة) يصبح أكبر بكثير جداً من ذلك اللازم لعملية الجمع أو الطرح وعلى ذلك فإننا نقتصد كثيراً من الجهد إذا استطعنا أن نستغنى عن عمليـــة الضرب بعملية جمع أخرى وقد جعـــل اكتشاف اللوغاريتمات هذا ممكنا .

والعبارة الآتية مأخوذة من « حساب اللوغاريتمات » طبعة ١٦٣١ لمؤلفه بريجز الذى كان أول من حسب الجداول التى نستعملها الان « اللوغاريتمات اعداد اكتشفت لتسهيل حل المسائل الحسابية والهندسية بواسطتهما نتجنب عمليات الضرب والقسمة المتعبة ونحصل على نتيجتها باجراء عمليتى جمع وطرح بدلا منها على الترتيب . وأيضا يمكن استخراج الجذر التربيعى ، تلك العملية المرهقة بسهولة كبيرة وبالاختصار نحصل على إجابة جميع المسائل سواء منها الحسابية والهندسية أو الفلكية بسهولة ووضوح ..... »

لقد جاء التفكير فى امكان ابدال عملية الضرب المتعبة بعملية جمع اعداد معينة يمكن الحصول عليها من جدول عن طريقين . وكان يظن أولا أن هذين الطريقين مستقلين تماما ، وسنرى فيما بعد كيف يمكن الربط بينهما باستعمال العدد التخيلى « ى » أو $\sqrt{-1}$. ولقد قامت الطريقة الأولى عند ما حسبت جداول حساب المثلثات المستعملة فى الملاحة أما الثانية فنشأت نتيجة للعمليات الحسابية المعقدة التى تظهر عند حساب الفائدة المركبة .

فى أواخر القرن السادس عشر ، أصبحت الدانمرك مركزاً هاما للبحث فى المسائل المتعلقة بالملاحة ففى الدانمرك قام تيشو براهى الفلكى بأبحاثه التى

خلدت عصره . واقترح اثنان من الرياضيين الدانمركيين هما ويتش (١٥٨٤) وكلاڤيوس (وقد نشر كتابه « دى استرو لبيو » سنة ١٥٩٣) استعمال الجداول المثلثية لاختصار العمليات الحسابية . ويجد القارئ فى البـاب السادس المتطابقة الآتية :

حا (ا + ب) = حا ا حتا ب + حا ب حتا ا   (١)

ويمكن الحصول على عبارة شبيهة بهذه لجيب الفرق بين زاويتين بطريقة مماثلة (شكل ١٦٤) وهى

حا (ا — ب) = حا ا حتا ب — حا ب حتا ا   (٢)

وبجمع طرفى هاتين المعادلتين نجد أن

حا (ا + ب) + حا (ا — ب) = ٢ حا ا حتا ب

أو

حا ا حتا ب = ½ حا (ا + ب) + ½ حا (ا — ب)

بمساعدة جداول الجيب وجيب التمام يمكن استعمال هـذه المعادلة لايجـاد حاصل ضرب عددين معينين . فمثلا لايجاد

٫١٧٣٦٥ × ٫٩٩٠٢٧

نجد من الجدول أن

حا ١٠° = ٫١٧٣٦٥

حتا ٨° = ٫٩٩٢٠٧

ونعلم من المعادلة السابقة أن

حا ١٠° حتا ٨° = ½ (حا ١٨° + حا ٢°)

وبالبحث فى الجدول نجد أن

حا ١٨° = ٫٣٠٩٠٢

حا ٢° = ٫٠٣٤٩٠

حا ١٨° + حا ٢° = ٫٣٤٣٩٢

½ (حا ١٨° + حا ٢°) = ٫١٧١٩٦

وعلى ذلك يكون ٫١٧٣٦٥ × ٫٩٩٠٢٧ = ٫١٧١٩٦

وهذه النتيجة صحيحة إلى خمسة أرقام عشرية ويمكن التأكد من ذلك بإجراء عملية الضرب العادية

٫١٧٣٦٥
٫٩٩٢٠٧
———
٫١٥٦٢٨٥
١٥٦٢٨٥
٣٤٧٣٠
١٢١٥٥٥
———
٫١٧١٩٦٠٠٠

وتعتمد دقة النتيجة على الجـداول المستعملة . وفى هـذه الحالة استعملنا جداول ذات خمسة أرقام

وهذه لا تضمن الدقة التامة بعد الرقم الرابع . وللحصول على النتيجة صحيحة إلى سبعة أرقام معنوية يلزم استعمال جداول ذات ثمانية أرقام .

من هندسة شكل ١٦٤ ، يمكنك أن تبرهن أيضاً أن

حتا (ا — ب) = حتا ا حتا ب + حا ا حا ب   (١)

وقد رأينا من قبل (ص ٢٥) أن

حتا (ا + ب) = حتا ا حتا ب — حا ا حا ب   (٢)

ينتج من هاتين المعادلتين أن

½ حتا (ا + ب) + ½ حتا (ا — ب) = حتا ا حتا ب

ويمكن استعمال المعادلة الأخيرة فى اجراء عمليات الضرب بنفس الطريقة السابقة .

وربما تكون نفس هـذه الحيلة هى التى أوحت إلى نابير ، الذى يسمى عادة مكتشف اللوغاريتمات بالطريقة البسيطة التى يحصل بها على حاصل ضرب

جيوب الزوايا باجراء عملية جمع عادية . وقد رحب كل من تيشو براهى وكپلر باكتشاف نابير . كما ترجم ادوارد رايت ، أحد رياضى كمبردج ومؤلف كتاب «اكتشاف وتصحيح أخطاء ملاحية معينة » (١٥٩٩) . النسخة اللاتينية سنة ١٦١٤ .

ومع ذلك ، فيندر ، إن لم يستحل ، فى تاريخ العلم أن ينفرد شخص واحد بالقيام باكتشاف علمى عظيم . والظروف الاجتماعية التى تطلبت طرقا أسرع لتعيين مواضع النجوم فى السماء ، هى نفسها التى دعت إلى البحث عن طرق أسرع لحساب الثروة التى تراكمت نتيجة للرحلات البحرية التى كان يستحيل القيام بها دون الإستعانة بعلم الفلك الذى يعين مواضع السفن فى البحار . وكان تحضير الجداول المستعملة فى حساب الفائدة أحد الأمور التى قادت إلى اكتشاف اللوغاريتمات وحساب الفائدة المركبة هو أحد التطبيقات العملية للمتسلسلة الهندسية .

إذا كانت ر هى الفائدة عن كل جنيه مستثمر فإن الجنيه الواحد يزداد إلى (١ + ر) من الجنيهات بعد سنة واحدة . فمثلا إذا كانت ر تساوى خمسة فى المائة ($\frac{٥}{١٠٠}$) فإن الجنيه يزداد إلى ١٫٠٥ جنيه . وإذا لم تصرف الفائدة عن السنة الأولى يصبح رأس المال فى بدء السنة الثانية ١٫٠٥ مرة من قيمته الأصلية وعلى ذلك يزيد كل جنيه من رأس المال الأصلى إلى (١٫٠٥) × (١٫٠٥) = $(١٫٠٥)^{٢}$ جنيه فى نهاية السنة الثانية بالمثل يصبح $(١٫٠٥)^{٣}$ جنيه فى نهاية السنة الثالثة . وعلى ذلك يمكننا وضع معدل زيادة الجنيه فى جدول كما يأتى :

فى نهاية	٠	١	٢	٣	٤	سنة
	١	١+ر	$(١+ر)^{٢}$	$(١+ر)^{٣}$	$(١+ر)^{٤}$	

المتسلسلة العليا متسلسلة حسابية والسفلى هندسية . وإذا كان المطلوب حساب الفائدة المركبة كل ثلاثة أشهر فيكون من اللازم ملء الجدول بقيم جديدة وذلك باستعمال القوى الكسرية كما يأتى :

٠	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٢}$	$\frac{٣}{٤}$	١	١$\frac{١}{٤}$	١$\frac{١}{٢}$	١$\frac{٣}{٤}$	الخ
١	$(١+ر)^{\frac{١}{٤}}$	$(١+ر)^{\frac{١}{٢}}$	$(١+ر)^{\frac{٣}{٤}}$	١+ر	$(١+ر)^{\frac{٥}{٤}}$	$(١+ر)^{\frac{٣}{٢}}$	$(١+ر)^{\frac{٧}{٤}}$	

ولتعيين جملة مبلغ ١٥٦ جنيه نهاية ٢$\frac{٣}{٤}$ السنة بفائدة مركبة ٣٪ لا يلزمنا إلا إجراء عملية الضرب

$$١٥٦ \times (١٫٠٣)^{٢\frac{٣}{٤}} = ١٥٦ \times (١٫٠٣)^{\frac{١١}{٤}}$$

وقد نشر ستيفنس الذى أشرنا إليه أكثر من مرة فيما قبل ، جداول مشابهة لاستعمالها فى الحساب التجارى .

وإذا جعلنا الفائدة مائة فى المائة (أى ر = ١) فإن حدود المتسلسلتين الموجودتين فيما قبل تناظر الإحداثيات السينية والصادية للمنحنى الموجود فى ص ٤٣٥ ، ذلك لأن ١ + ر = ٢ عندما ر = ١ وقد رأينا كيف نحصل على القيم المناظرة لأرباع الأيام أى س = $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٢}$ . . الخ . ويجب علينا الآن أن نبحث معنى القوة الكسرية بطريقة أكثر دقة . لقد كانت الفكرة الأساسية لجدول اللوغاريتمات مفهومة لأرشميدس . دعنا الآن نعود القهقرى مترسمين خطوات هذا الإكتشاف ، أولا نضع أى متسلسلة هندسية تحت متسلسلة الأعداد الطبيعية المولدة لها مثلا

١	٢	٣	٤	٥	٦	٧
$٢^{١}$	$٢^{٢}$	$٢^{٣}$	$٢^{٤}$	$٢^{٥}$	$٢^{٦}$	$٢^{٧}$
٢	٤	٨	١٦	٣٢	٦٤	١٢٨

وسنتبع طريقة نابير ونسمى الأعداد الموجودة فى المتسلسلة الحسابية العليا لوغاريتمات والأعداد الموجودة أسفلها ، أى المتسلسلة الهندسية أعداد مقابلة للوغاريتمات : وتتلخص قاعدة أرشميدس فى أنه إذا أردنا

ضرب أى عددين موجودين فى المتسلسلة السفلى نجمع العددين المناظرين لهما فى السلسلة العليا ونبحث عن العدد المناظر لهذا المجموع فى المتسلسلة السفلى .

ويمكن وضع هذه القاعدة كتابة كما يأتى :

$$أ^{م} \times أ^{ن} = أ^{م+ن}$$

فمثلا

$$٢^{٣} \times ٢^{٤} = ٢^{٧}$$

$$(٨ \times ١٦ = ١٢٨)$$

ومعنى المؤثر « لو » الموجود إلى يمين عدد ما هو « إبحث فى الجدول عن الأس الذى يجب رفع أ إليه لتحصل على العدد » .

وإذا وجدنا « عدد مقابل » أو مقلو على يمين عدد ما فمعناها « إبحث فى الجدول عن الأساس مرفوعا إلى القوة التى يمثلها العدد » . فمثلا إذا كان

$$ن = أ^{م}$$

$$م = لو_{أ}\, ن$$

$$ن = عدد\ مقابل_{أ}(م)\ أو\ مقلو_{أ}(م)$$

تستطيع بذلك أن تكتب قاعدة الضرب بطريقة أخرى بوضع

$$ك = أ^{ن}\quad أى\ أن\ ن = لو_{أ}\, ك$$

$$ن \times ك = أ^{م+ن}\quad أى\ أن\ م + ن = لو_{أ}(ن \times ك)$$

$$أو\ ن \times ك = مقلو_{أ}(م + ن)$$

$$= مقلو_{أ}(لو_{أ}\, ن + لو_{أ}\, ك)$$

وباستعمال هذه الرموز الجديدة يكتب المثال العددى السابق كما يأتى :

$$٨ \times ١٦ = مقلو_{٢}(لو_{٢}\, ٨ + لو_{٢}\, ١٦)$$

$$= مقلو_{٢}(٣ + ٤)$$

$$= مقلو_{٢}\, ٧$$

والخطوة الأخيرة معناها « إبحث فى صف الأعداد المقابلة للوغاريتمات (السفلى) عن العدد الذى يناظر ٧ فى صف اللوغاريتمات (العلوى) . وبالبحث نجد أن العدد المطلوب هو ١٢٨ .

وطبعا لا يكون الجدول السابق صالحا لاستعماله فى إجراء عمليات الضرب إلا إذا احتوى على جميع الأعداد التى قد نستعملها . لقد بدأنا باستعمال المؤثر $س\ فى_{أ}$ لنفيد ضرب أ فى نفسها س مرة . ثم لاحظنا إمكان النظر إلى العلاقة بين أ ، س من زاوية أخرى . إذا نظرنا إلى المتسلسلتين السابقتين من اليسار إلى اليمين نرى أن نقص س بمقدار الوحدة معناه ضرورة قسمة العدد الموجود فى الصف السفلى على أ . فمثلا إذا كانت $٢^{٤} = ١٦$ فإن $٢^{٣} = \frac{١٦}{٢}$

وعلى ذلك نرى أنه إذا كانت أ هى الأساس الموضعى فى لوح العد فان قيمة الحززة فى العمود الـ (ن + ١) هى $أ^{ن}$ وإذن تناظر $أ^{٠}$ قيمة حززة فى عمود الوحدة ، أى أنه لجميع قيم أ

$$أ^{٠} = ١$$

والقوة التى تنقص عن الصفر بمقدار الوحدة هى — ١ ،

$$\therefore أ^{-١} = \frac{أ^{٠}}{أ} = \frac{١}{أ}$$

$$بالمثل\ أ^{-٢} = \frac{١}{أ} \div أ = \frac{١}{أ^{٢}}$$

$$وعلى\ العمود\ أ^{-ن} = \frac{١}{أ^{ن}}$$

أى أن $أ^{ن}$ تناظر قيمة كل من حززة فى العمود النونى عن يسار عمود الوحدة ، $أ^{-ن}$ تناظر قيمة كل حززة فى العمود النونى عن يمينه أو تناظر قسمه

رقم موجود فى المكان العشرى النونى من ذلك يمكننا كتـــابة اللوغاريتمات والأعداد المقابلة لها الآتية المبنية على المتوالية الهندسية $٣^{س}$

لو	٣—	٢—	١—	٠	١	٢	٣	٤
مقلو	$٣^{-٣}$	$٣^{-٢}$	$٣^{-١}$	$٣^{٠}$	$٣^{١}$	$٣^{٢}$	$٣^{٣}$	$٣^{٤}$
	٠,٣٠٦	٠,١	٠,٣	١	٣	٩	٢٧	٨١

وإذا رسمنا منحنى يمر بالنقط التى تمثل هذه الأعداد احداثياتها (ص = $٣^{س}$ أو ص = مقلو س) يصبح فى استطاعتنا إيجاد قيمة المناظرة لأى قيمة من قيم س صحيحة أم كسرية: أى أن قاعدة أرشميدس تظل صحيحة عند ماتكون م ، ن أعداداً كسرية فى المعادلة :

$$أ^{م} × أ^{ن} = أ^{م+ن}$$

ولاختبار صحة هذه القاعدة عدديا يلزم تعريف $أ^{م}$ ، $أ^{ن}$ عندما لاتكون م ، ن أعداداً صحيحة . إذا كانت قاعدة أرشميدس صحيحة فإن :

$$\sqrt{أ} = \sqrt{أ^{\frac{١}{٢}+\frac{١}{٢}}} = \sqrt{أ^{\frac{١}{٢}} × أ^{\frac{١}{٢}}} = أ^{\frac{١}{٢}}$$

بالمثل $\sqrt[٣]{أ} = \sqrt[٣]{أ^{\frac{١}{٣}+\frac{١}{٣}+\frac{١}{٣}}} = \sqrt[٣]{أ^{\frac{١}{٣}}×أ^{\frac{١}{٣}}×أ^{\frac{١}{٣}}} = أ^{\frac{١}{٣}}$

أى أن $أ^{\frac{١}{٣}} = \sqrt[٣]{أ}$

وفى الحالة العامة :

$$أ^{\frac{١}{ن}} = \sqrt[ن]{أ}$$

وعلى ذلك تكون قيمة $٣^{٢٫٥}$

$$٣^{٢+\frac{١}{٢}} = ٣^{٢} × ٣^{\frac{١}{٢}} = ٩\sqrt{٣}$$

بالمثل قيمته $٢^{\frac{٣}{٢}}$

$$٢^{١+\frac{١}{٢}} = ٢ × ٢^{\frac{١}{٢}} = ٢\sqrt{٢}$$

ويمكن التعبير عن أية كمية مثل $٢^{\frac{٤}{٣}}$ ، $٣^{٢٫٥}$ أو فى الحالة العامة $أ^{\frac{م}{ن}}$ بطريقة أخرى وذلك باستعمال العلاقات

$$\sqrt{أ} × \sqrt{ب} = \sqrt{أ ب}$$

$$\sqrt[٣]{أ} × \sqrt[٣]{ب} = \sqrt[٣]{أ ب}$$

فيمكننا كتابة

$$٣^{٢٫٥} = ٣^{\frac{٥}{٢}} = ٣^{٢} × \sqrt{٣} = \sqrt{٣^{٤}} × \sqrt{٣} = \sqrt{٣^{٥}}$$

$$٢^{\frac{٤}{٣}} = ٢\sqrt[٣]{٢} = \sqrt[٣]{٢^{٤}}$$

والقاعدة العامة هى

$$أ^{\frac{ن}{ك}} = \sqrt[ك]{أ^{ن}}$$

وأول من ذكر قاعدتى القوى الكسرية والسالبة التى اعطيناهما هو اورسموس فى كتاب اسمه « الجورسموس بروبوشينم » نشر حوالى ١٢٥٠ م . أى أن الجنس البشرى احتاج إلى ألف عام لينتقل من قاعدة ارشميدس إلى الخطوة التالية فى تطور جدول اللوغاريتمات وعلى ذلك يجب ألا يشعر القارئ بالضيق إذا اضطر إلى انفاق بضع ساعات أو بضع أيام لكى يتعود استعمال القوى الكسرية والسالبة

يمكننا الآن جعل جدول اللوغاريتمات يحتوى أى عدد مطلوب فمثلا فى حالة اللوغاريتمات المبنية على المتسلسلة الهندسية $٢^{ن}$ ، يمكننا عمل جدول كالآتى صحيحا إلى ثلاثة أرقام عشرية :

ن = لو$_{٢}$ ص	ص = مقلو$_{٢}$ ن	
—	١	١,٠٠٠
,٥	$\sqrt{٢}$	١,٤١٤
١,٠	٢	٢,٠٠٠
١,٥	$\sqrt{٢^{٣}}$	٢,٨٢٨
٢,٠	٤	٤,٠٠٠
٢,٥	$\sqrt{٢^{٥}}$	٥,٦٥٧
٣,٠	٨	٨,٠٠٠
٣,٥	$\sqrt{٢^{٧}}$	١١,٣١٤
٤,٠	١٦	١٦,٠٠٠
...	...	...

اللوغاريتمات هى أعداد المتسلسلة الحسابية ن المولدة للمتسلسلة الهندسية $ا^{ن}$. وللتفريق بين اللوغاريتمات المناظرة لحدود متسلسلة هندسية معينة وبين اللوغاريتمات المناظرة لحدود متسلسلة هندسية اخرى ، تسمى ا أساس المتسلسلة ونكتب ا كصفة رياضية فى الركن الأسفل على اليسار وذلك لإيضاح نوع جدول اللوغاريتمات المستعمل ، كما يأتى

لو$_{٢}$ ٢,٨٢٨ = ١,٥ أو
مقلو$_{٢}$ ١,٥ = ٢,٨٢٨

وطبعا يمكننا الاستمرار فى ملء جدول اللوغاريتمات السابق إلى أن نستوفى حاجتنا . فمثلا يمكننا أن نكتب

ن	مقلو$_{٢}$ ن
,٢٥ ($\frac{١}{٤}$)	$\sqrt[٤]{٢}$
,٧٥ ($\frac{٣}{٤}$)	$\sqrt[٤]{٢^{٣}}$

وبعد الحصول على جدول مثل هذا يمكننا استعماله فى ايجاد حاصل ضرب الأعداد كما يأتى .

نفرض أن المطلوب ايجاد حاصل ضرب ٢,٨٢٨ × ٥,٦٥٧ . نعلم من الجدول أن

لو$_{٢}$ ٢,٨٢٨ = ١,٥ أو $٢^{١,٥}$ = ٢,٨٢٨

لو$_{٢}$ ٥,٦٥٧ = ٢,٥ أو $٢^{٢,٥}$ = ٥,٦٥٧

باستعمال قاعدة أرشميدس يكون

$$٢,٨٢٨ \times ٥,٦٥٧ = ٢^{١,٥} \times ٢^{٢,٥} = ٢^{٢,٥+١,٥} = ٢^{٤}$$

ويكون حاصل الضرب الذى نبحث عنه هو العدد الذى لوغاريتمه ٤ ، أى

مقلو$_{٢}$ ٤ = مقلو$_{٢}$ (١,٥ + ٢,٥) F
= مقلو$_{٢}$ (لو ٢,٨٢٨ + لو ٥,٦٥٧)

ومن الجدول نرى أن مقلو$_{٢}$ ٤ هو ١٦ . واختبار صحة هذه النتيجة عملية الضرب :

```
   ٢,٨٢٨
   ٥,٦٥٧
  ١٤,١٤٠
  ١,٦٩٦٨
   ١٤١٤٠٠
   ١٩٧٩٦
١٥,٩٩٧٩٩٦ = ١٦   لأربعة أرقام معنوية .
```

الفرق هو ٢ فى ١٦٠٠٠ وهو خطأ يزيد قليلا عن ١ فى ١٠٠٠٠ . وطبعاً كان يمكن الحصول على نتيجة أفضل باستعمال جدول أعداده صحيحة إلى خمسة ، سبعة ، تسعة أو أكثر من الأرقام المعنوية . ويمكن ذكر قاعدة الضرب استعمال اللوغاريتمات باختصار كما يأتى ، لإيجاد حاصل ضرب عددين ابحث

عنهما فى عمود الأعداد المقابلة للوغاريتمات ٤ ثم اجمع العددين المناظرين لهما فى عمود اللوغاريتمات ثم اوجد العدد المناظر لحاصل الجمع فى عمود الأعداد المقابلة للوغاريتمات » .

وقد أشير إلى إمكان عمل مثل هذا الجدول فى كثير من مؤلفات الحساب التجارى فى القرن السادس عشر . وكان ستيفل متأكداً من فائدة مثل هذا الجدول . واقترح سيمون يعقوب عمله مرة ثانية . ولم تمض سنوات قليلة على نشر جداول نابير للوغاريتمات الجيوب حتى نشر جوبست بيرجى من براج جداول المتواليات الحسابية والهندسية لتبسيط العمليات الحسابية باستخدام اللوغاريتمات لإيجاد حاصل الضرب . ولا تختلف جدول بيرجى عن الجدول الذى أعطيناه إلا فى أخذه العدد ١,٠٠٠١ كأساس . وقد اختير هذا العدد بالذات لسبب معين سنشرحه فيما بعد . ورغم أن كبلر قد أشار إلى جدول بيرجى كأداة مفيدة فى حسابات الفلك فإن نشأة هذا الجدول لم تكن لها علاقة مباشرة بالحاجة إلى وجود جداول محسوبة لتعيين مواضع السفن كما فى حالة جدول نابير للجيوب . والنتيجة الوحيدة لهذا الجدول هى زيادة استعمال جداول ستيفنس للفائدة المركبة .

ولم يستعمل نابير أو بيرجى اللذان اكتشفا اللوغاريتمات بطريقة مستقلة كل على حدة فى فترة سنوات قليلة ، لم يستعملا كأساس أحد العددين المستعملين كأساس للوغاريتمات الحديثة .

وقد رأينا أن هناك وحدتان لقياس الزوايا فى حساب المثلثات . ولا نزال نستعمل الدرجة البابلية فى حل المسائل العملية . أما فى المسائل النظرية فنستعمل التقدير الدائرى وذلك للارتباط البسيط للغاية بين هذا التقدير وبين محيط الدائرة . وسترى مزايا استعمال التقدير الدائرى بطريقة أكثر وضوحا فيما بعد ، وكما فى حالة الزاوية ، نستعمل فى اللوغاريتمات نوعين مختلفين من الجداول ، الأول لأنه يناسب الأغراض العملية ، والآخر لأن له خواص رياضية بسيطة نسبيا وتسمى اللوغاريتمات المحسوبة بالطريقة الأخيرة « اللوغاريتمات الطبيعية » .

وكما سترى فيما بعد ، تحسب أول حساب المثلثات الحديثة أولا بالتقدير الدائرى ثم تحول إلى درجات لاستعمالها فى المسائل العملية . ونستعمل المعادلة الآتية للتحويل .

$$\text{١ دائرية} = \frac{١٨٠}{\text{ط}}\ \text{درجة}$$

هناك طريقة بسيطة لتحويل اللوغاريتمات المحسوبة لأساس معين إلى لوغاريتمات محسوبة لأساس آخر . وهذه الطريقة تعتمد على المطابقة .

$(\text{ن}^{\text{ا}})^{\text{ب}} = (\text{ن}^{\text{ب}})^{\text{ا}}$ فمثلا $٨^{٢} = (٢^{٣})^{٢} = ٢^{٦}$ كما يمكنك أن ترى باجراء عملية الضرب والمثال الآتى يوضح هذه القاعدة لنفرض أننا حسبنا جدولا للوغاريتمات والأعداد المقابلة لها بالنسبة للأساس ٢ .

من هذا الجدول ترى أن $\text{لو}_{٢}\,١٠ = ٣,٣٢٢$ ، أى أن $٢^{٣,٣٢٢} = ١٠$

فاذا كان

$$\text{م} = ١٠^{\text{م}_١} \quad \text{أو} \quad \text{م}_١ = \text{لو}_{١٠}\,\text{م}$$

$$\text{فإن} \quad \text{م} = ٢^{٣,٣٢٢\,\text{م}_١} \quad \text{أو} \quad ٣,٣٢٢\,\text{م}_١ = \text{لو}_{٢}\,\text{م}$$

$$\therefore ٣,٣٢٢\,\text{لو}_{١٠}\,\text{م} = \text{لو}_{٢}\,\text{م}$$

$$\therefore \text{لو}_{١٠}\,\text{م} = \frac{\text{لو}_{٢}\,\text{م}}{\text{لو}_{٢}\,١٠}$$

والصورة العامة لهذه القاعدة هى :

$$\text{لو}_{\text{ا}}\,\text{م} = \frac{\text{لو}_{\text{ب}}\,\text{م}}{\text{لو}_{\text{ب}}\,\text{ا}}$$

$$\text{مثلا} \quad \text{لو}_{٢}\,٨ = ٣$$

$$\therefore \text{لو}_{١٠}\,٨ = \frac{٢}{٣,٣٢٢} = ,٩٠٣$$

وقد اختير العدد ١٠ أساسا للوغاريتمات المستعملة فى الأغراض العملية وذلك لأنه أساس النظام العددى أيضا . وهذا يبسط حساب جـــــداول اللوغاريتمات للأسباب الآتية إذا أخذنا ١٠ كأساس للجدول تكون متسلسلتاه الأساسيتان هما

لو　—٢　—١　٠　١　٢　٣　٤

مقلو　٠١و　١و　١　١٠　١٠٠٠　١٠٠　١٠٠٠٠

وعلى ذلك يكون　لو١٠ ١ = ٠ ، لو١٠ ١٠ = ١

لو١٠ $\sqrt{١٠}$ = لو١٠ $١٠^{\frac{١}{٢}}$ = ٥و٠

وحيث أن الجذر التربيعى للعدد ١٠ (لثلاثة أرقام عشرية) هو ١٦٢و٣ يكون لو١٠ ١٦٢و٣ = ٥٠و٠

ولكن ٦٢و١٣ = ١٠ × ١٦٢و٣

∴ لو١٠ ٦٢و٣١ = لو١٠ (١٠ × ١٦٢و٣)

= لو١٠ ١٦٢و٣ + لو١٠ ١٠

= ٥٠و٠ + ٠٠و١ = ٥٠و١

بالمثل لو١٠ ٢و٣١٦ = لو١٠ (١٦٢و٣ × ١٠٠)

= لو١٠ ١٦٢و٣ + لو١٠ ١٠٠

= ٥٠٠و + ٠٠و٢

= ٥٠٠و٢

أى أن تغيير موضع العلامة العشرية فى عدد ما لا يؤثر مطلقاً على العدد الموجود على يمين العلامة العشرية فى لوغاريتم ، كما يمكن استنتاج الرقم الموجود على يسار العلامة العشرية (فى اللوغاريتم) بسهولة . فحيث أن $١٠^{٠}$ = ١ ، $١٠^{١}$ = ١٠ فإن هذا الرقم يكون صفراً فى لوغاريتم جميع الأعداد الواقعة بين ١ ، ١٠ وحيث أن $١٠^{١}$ = ١٠ ، $١٠^{٢}$ = ١٠٠ فإن هذا الرقم يكون ١ لجميع الأعداد بين ١٠ ، ١٠٠ . وبما أن $١٠^{٢}$ = ١٠٠ ، $١٠^{٣}$ = ١٠٠٠ فإنه يساوى ٢ لجميع الأعداد بين ١٠٠ ، ١٠٠٠ . بالمثل وجود الرقم الصحيح ١ على يسار كسر عشرى نبحث عن العدد المقابل له (كلوغاريتم) معناه « اضرب العدد المقابل للكسر فى ١٠ » . ووجود العدد ٢ معناه « اضرب العدد المقابل للكسر فى ١٠٠ » وهكذا. أى أنه

يكفينا لإجراء عمليـــات الضرب أن يكون لدينا لوغاريتمات جميع الأعداد الواقعة بين ١ ، ١٠ على فترات مناسبة . فمثلا ليكن المطلوب حاصل ضرب ٥٣٦و١ × ٠٠و٧٧ . من الجدول نرى أن

لو١٠ ٥٣٦و١ = ١٨٦٤و

لو١٠ ٧و٧ = ٨٨٦٥و

∴ لو١٠ ٧٧ = ٨٨٦٥و١

وعلى ذلك يكون

٥٣٦و١ × ٧٧ = مقلو١٠ (١٨٦٤و + ٨٨٦٥و١)

= مقلو١٠ ٠٧٢٩و٢

= ١٠٠ × مقلو١٠ ٠٧٢٩و

= ١٠٠ × ١٨٣و١

= ٣و١١٨

وبإجراء عملية الضرب العادية نجد أن النتيجة صحيحة لأربعة أرقام معنوية وهذا طبعاً هو أقصى ما نأمله من الدقة لأننا استعملنا جداول ذات أربعة أرقام

وقد نشر بريجز بالتعاون مع نابير أول جدول للوغاريتمات ذات الأساس ١٠ وقد أعطى بريجز لوغاريتمات جميع الأعداد الواقعة بين ١ ، ١٠٠٠ صحيحة لأربعة أرقام عشرية وبعد ذلك بقليل (١٦٢٨) نشر ادريان ڤلاك فى هولندا لوغاريتمات الأعداد بين ١ ، ١٠٠٫٠٠٠ صحيحة لعشرة أرقام عشرية. ولاستعمال اللوغاريتمات لا يلزمنا إلا جدول ذو عمودين يحتوى الأول على ه (= لو ه) والآخر على ه (= مقلو ه) . ولكن يكون من الأنسب فى أغلب الأحيان وجود جدولين منفصلين لأعداد الفرق بين كل اثنين متتاليين منها ثابت . مع لوغاريتماتها (فى الجدول الأول) ، والأعداد المقابلة لها (فى الجدول الثانى) وهذا يجعل عملية الحصول على أيهما (اللوغاريتم أو العدد المقابل للوغاريتم) لعدد معين أسرع . والجدول الذى يحتوى عموده الأيمن على أعـــداد (ن) على فترات متساوية وعموده الأيسر على لوغاريتمات هذه الأعداد (لون) يسمى جدول لوغاريتمات . والجدول الذى يحتوى عموده الأيمن على أعداد

(ن) على فترات متساوية وعموده الأيسر على الأعداد المقابلة لهذه اللوغاريتمات (مفلو ن) يسمى جدول أعداد مقابلة للوغاريتمات. وعلى حسب هذا التقسيم تكون الجداول التي أعطاها بيرجي جداول أعداد مقابلة للوغاريتمات. أما جداول بريجز فهي جداول لوغاريتمات. ولعمل جدول لوغاريتمات يجب أن نبدأ بعمل جدول للأعداد المقابلة للوغاريتمات. ويمكنك عمل جدول للوغاريتمات بسيط بطريقة تقريبية كما يأتي. نعلم أن

$١ = ١٠^{٠}$

لو$_{١٠}$ ١ = ٠

وأيضاً بالضرب نعلم أن

$٢^{١٠} = ١٠٢٤$

وهذا العدد يزيد عن ١٠٠٠ بمقدار ٢½٪ تقريباً

$٢^{١٠} = ١٠^{٣}$ تقريباً

$٢ = \sqrt[١٠]{١٠^{٣}}$ تقريباً

$= ١٠^{\frac{٣}{١٠}} = ١٠^{٠٫٣}$ تقريباً

لو$_{١٠}$ ٢ = ٠٫٣ تقريباً.

بالمثل بإجراء عملية الضرب نجد أن

$٣^{٩} = ١٩٦٨٣$

$= ٢٠٠٠٠$ تقريباً

$= ٢ \times ١٠٠٠٠$ تقريبا

$= ١٠^{٠٫٣} \times ١٠^{٤}$ «

$= ١٠^{٤٫٣}$ «

$٣ = \sqrt[٩]{١٠^{٤٫٣}}$ «

$= ١٠^{\frac{٤٫٣}{٩}} = ١٠^{٠٫٤٨}$ تقريباً

∴ لو$_{١٠}$ ٣ = ٠٫٤٨ تقريباً

أيضا

$٤ = ٢^{٢} = ١٠^{٠٫٣} \times ١٠^{٠٫٣}$ تقريباً

$= ١٠^{٠٫٦}$ «

لو$_{١٠}$ ٤ = ٠٫٦ «

بالمثل $٢ \times ٥ = ١٠$

لو$_{١٠}$ ٢ + لو$_{١٠}$ ٥ = لو$_{١٠}$ ١٠ = ١

∴ لو$_{١٠}$ ٥ = ١ − ٠٫٣٠ تقريباً

= ٠٫٧٠ «

و $٦ = ٢ \times ٣ = ١٠^{٠٫٣} \times ١٠^{٠٫٤٨}$ تقريباً

$= ١٠^{٠٫٧٨}$ تقريباً

لو$_{١٠}$ ٦ = ٠٫٧٨ «

و $٧^{٢} = ٤٩ = ٥٠$ تقريباً

لو$_{١٠}$ (٧×٧) = لو$_{١٠}$ ٧ + لو$_{١٠}$ ٧ = لو$_{١٠}$ ٥ + لو$_{١٠}$ ١٠

∴ ٢ لو$_{١٠}$ ن = ١٫٧ تقريبا

لو$_{١٠}$ ٧ = ٠٫٨٥ تقريبا

$٨ = ٢^{٣} = (١٠^{٠٫٣})^{٣} = ١٠^{٠٫٩}$ تقريبا

∴ لو$_{١٠}$ ٨ = ٠٫٩٠ تقريبا

$٩ = ٣^{٢} = (١٠^{٠٫٤٨})^{٢} = ١٠^{٠٫٩٦}$ تقريبا

∴ لو$_{١٠}$ ٩ = ٠٫٩٦ تقريبا

وبذلك نحصل على جدول اللوغاريتمات التقريبى الآتى :

ه	لو ه	ه	لو ه
١	٠	١٠	١,٠٠
٢	,٣٠	٢٠	١,٣٠
٣	,٤٨	٣٠	١,٤٨
٤	,٦٠	٤٠	١,٦٠
٥	,٧٠	٥٠	١,٧٠
٦	,٧٨	٦٠	١,٧٨
٧	,٨٥	٧٠	١,٨٥
٨	,٩٠	٨٠	١,٩٠
٩	,٩٦	٩٠	١,٩٦
مقلو ه	ه	مقلو ه	ه

ويمكن اختبار صحة الجدول التقريبى السابق كما يأتى فى :

٦ × ٨ = مقلو$_{١٠}$ (لو$_{١٠}$ ٦ + لو$_{١٠}$ ٨)

= مقلو$_{١٠}$ (,٧٨ + ,٩٠)

= مقلو$_{١٠}$ ١,٦٨

العدد المقابل للوغاريتم ١,٦٨ يقع بين ٤٠ ، ٥٠ والعدد ١,٦٨ يناطر فى الفترة بين ١,٦٠ ، أى لوغاريتم ٤٠ ، ١,٧٠ أى لوغاريتم ٥٠ . وإذا اعتبرنا أن مقلو ١,٦٨ هو العدد المناظر لأربعة أخماس الفترة بين ٤٠ ، ٥٠ نحصل على ٤٨ ، أى أن النتيجة صحيحة . ويمكن للقارىء أن يستعمل هذا الجدول التقريبى ليتعود إجراء عملية القسمة . وعملية استخراج الجـــــذر التربيعى باستخدام اللوغاريتمات وبالجمع بين قاعدة أوريسمسوس للقوى السالبة وقاعدة ارشميدس نجد أن :

١٠^ه / ١٠^م = ١٠^ه × ١٠^-م

∴ ١٠^ه / ١٠^م = ١٠^(ه-م)

وإذا كان ١٠^ه = ن أى لو$_{١٠}$ ن = ه

، ١٠^م = م أى لو$_{١٠}$ م = م

فإن :

ن / م = ١٠^(ه-م) ، لو$_{١٠}$ ن / م = ه − م

∴ لو$_{١٠}$ ن / م = (لو$_{١٠}$ ن − لو$_{١٠}$ م)

أو ن / م = مقلو$_{١٠}$ (لو$_{١٠}$ ن − لو$_{١٠}$ م)

نفرض مثلا أن المطلوب إيجاد قيمة ٢٠ ÷ ٥ نكتب

٢٠ ÷ ٥ = مقلو$_{١٠}$ (لو$_{١٠}$ ٢٠ − لو$_{١٠}$ ٥)

وبالبحث فى الجدول التقريبى السابق نجد أن :

٢٠ ÷ ٥ = مقلو$_{١٠}$ (١,٣٠ − ,٧٠)

= مقلو$_{١٠}$,٦

= ٤

وتعتمد عملية استخراج الجذر على القانون

ه√١٠ = ١٠^(١/ه)

فإذا كان ن = ١٠^م

يكون $\text{م} = \text{لو}_{١٠}\ \text{ن}$ ،

$$\sqrt[\text{ه}]{\text{ن}} = \text{ن}^{\frac{١}{\text{ه}}} = ١٠^{\frac{\text{م}}{\text{ه}}}$$

$$\therefore \text{لو}_{١٠} \sqrt[\text{ه}]{\text{ن}} = \frac{\text{م}}{\text{ه}}$$

$$\therefore \text{لو}_{١٠} \sqrt[\text{ه}]{\text{ن}} = \frac{١}{\text{ه}}\ \text{لو}_{١٠}\ \text{ن}$$

للحصول على الجذر التكعيبي للعدد ٨ يكتب

$$\sqrt[٣]{٨} = \text{مقلو}_{١٠} \left(\frac{١}{٣}\ \text{لو}_{١٠}\ ٨ \right)$$

ومن الجدول التقريبي السابق نجد أن

$$\sqrt[٣]{٨} = \text{مقلو}_{١٠} \left(\frac{٠,٩٠}{٣} \right)$$

$$= \text{مقلو}_{١٠}\ ٠,٣٠$$

$$= ٢$$

وسيتمكن القارىء بسهولة من استنتاج القاعدة المناظرة

$$\text{ن}^{\text{ه}} = \text{مقلو}_{١٠} \left(\text{ه}\ \text{لو}_{١٠}\ \text{ن} \right)$$

اختبر هذا القانون بإيجاد قيمة $٢^{٣}$ باستعمال الجدول التقريبي السابق.

وكانت قواعد الضرب والقسمة واستخراج الجذور والرفع إلى القوى التي درسناها من بين « الخواص العجيبة لهذه الأعداد » التي سجلها ستيفل. وقد وضع ستيفل المتوالية العددية إلى جانب المتوالية الهندسية ولاحظ ما يأتى :

(ا) جمع الحدود فى المتوالية العددية يناظر ضرب الحدود المناظرة فى المتوالية الهندسية.

(ب) طرح الحدود فى المتوالية العددية يناظر قسمة الحدود المناظرة فى المتوالية الهندسية.

(ح) ضرب أحد حدود المتوالية العددية فى عدد ثابت يناظر رفع الحد المناظر فى المتوالية الهندسية إلى قوة معينة.

(ى) قسمة أحد حدود المتوالية العددية على عدد ثابت يناظر استخراج جذر ذو درجة معينة للحد المناظر فى المتوالية الهندسية.

يظهر لنا من ذلك أنه لما يدعو إلى أشد الأسف أن يصرف المتحول إلى مذهب لوثر ذلك الوقت العظيم فى العمليات الحسابية فى إثبات أن البابا ليو العاشر هو وحسن أبو كالبيس بدلا من أن يقوم بعمل اجتماعى مفيد هو عمل جداول بيرجى وبريجز

وعندما أراد بريجز عمل جدول دقيق للوغاريتمات ، بدأ بعمل جدول للأعداد المقابلة ، وبالاستعانة بالمعادلات

$$١٠^{\frac{\text{ى}}{\text{ك}}} = \sqrt[\text{ك}]{١٠^{\text{ى}}}$$

$$\text{لو}_{١٠} \sqrt[\text{ك}]{١٠^{\text{ى}}} = \frac{\text{ى}}{\text{ك}}$$

$$\text{أو مقلو}_{١٠} \frac{\text{ى}}{\text{ك}} = \sqrt[\text{ك}]{١٠^{\text{ى}}}$$

نحصل على

$\text{ه} = \text{لو}_{١٠}\ \text{ن}$		$\text{ن} = \text{مقلو}_{١٠}\ \text{ه}$	
١,٠٠٠		١٠,٠٠٠	(١٠,٠)
٠,٨٧٥	($\frac{٧}{٨}$)	٧,٤٩٨٩	($\sqrt[٨]{١٠^{٧}}$)
,٧٥٠	($\frac{٣}{٤}$)	٥,٦٢٣٤	($\sqrt[٤]{١٠^{٣}}$)
,٦٢٥	($\frac{٥}{٨}$)	٤,٢١٧٠	($\sqrt[٨]{١٠^{٥}}$)
,٥٠٠	($\frac{١}{٢}$)	٣,١٦٢٣	($\sqrt{١٠}$)
,٣٧٥	($\frac{٣}{٨}$)	٢,٣٧١٤	($\sqrt[٨]{١٠^{٣}}$)
,٢٥٠	($\frac{١}{٤}$)	١,٧٧٨٣	($\sqrt[٤]{١٠}$)
,١٢٥	($\frac{١}{٨}$)	١,٢٣٣٥	($\sqrt[٨]{١٠}$)
٠,٠٠٠		١,٠٠٠٠	(١)

وباستخراج جذور ذات درجات أعلى ، يمكن جعل الفترة بين كل عددين

متتاليين فى العمود الأيمن (ﻫ) صغير ، بأية درجة مطلوبة . وللحصول على جدول لوغاريتمات ، أى على جدول يحتوى عموده الأيمن على أعداد ن على فترات متساوية وفى العمود الأيسر على لوغاريتمات هذه الأعداد ، استعمل بريجز القاعدة التى يرجع إلى ستيفل فضل اكتشافها . نكتب أى متوالية عددية (لوغاريتمات) مبتدئين بالوحدة ، وأى متوالية هندسية (أعداد مقابلة للوغاريتمات) مبتدئين بأساس المتوالية ، مثل

١	٢	٣	٤	٥	....	متوالية عددية (لوغاريتمات)
٢	٤	٨	١٦	٣٢	....	متوالية هندسية (أعداد مقابلة للوغاريتمات)

قد يتذكر القارئ (ص ١٥٥) أن الوسط الحسابى لعددين ا ، ب هو $\left(\frac{\text{ا}+\text{ب}}{2}\right)$ والوسط الهندسى لعددين ل ، م هو $\sqrt{\text{ل م}}$. إذا أخذت ثلاثة أعداد متتالية فى الصف العلوى فإن العدد الأوسط يكون هو الوسط الحسابى للعددين الآخرين . مثلا إذا كانت ٢ ، ٣ ، ٤ هى الأعداد فإن $3 = \frac{1}{2}(2+4)$. بالمثل لأى ثلاثة أعداد متتالية فى المتوالية السفلى يكون الأوسط هو الوسط الهندسى للعددين الآخرين . فمثلا إذا كانت ٤ ، ٨ ، ١٦ هى الأعداد فإن $8 = \sqrt{64} = \sqrt{4 \times 16}$. ويبقى ما سبق صحيحا إذا كان أساس المتوالية الحسابية أقل من الوحدة مثل

٢	$2\frac{1}{2}$	٣
٤	$2^{2,5}$	٨

الحد الأوسط فى الصف السفلى هو $2^{2\frac{1}{2}} = \sqrt{2^5}$ والوسط الهندسى للحدين الآخرين هو $\sqrt{4 \times 8} = \sqrt{32} = \sqrt{2^5}$

استعمل بريجز هذه الحقيقة لتحويل جدول أعداد مقابلة للوغاريتمات (أى جدول ذى لوغاريتمات معطاة على فترات متساوية فى العمود الأيمن ، إلى جدول لوغاريتمات ، أى جدول توجد الأعداد المقابلة للوغاريتمات فيه على فترات متساوية فى العمود الأيمن . وسنوضح هذه العملية الشاقة بتقريبات متتالية لقيمة $\text{لو}_{10}\ 5$ كما فى الجدول الآتى :

$\text{ن} = \text{مقلو}_{10}\ \text{ﻫ}$		$\text{ﻫ} = \text{لو}_{10}\ \text{ن}$	
ا = ١		$\bar{\text{ا}}$ =	= ٠,٠٠٠
ب = ١٠		$\bar{\text{ب}}$ =	= ١,٠٠٠
ح = $\sqrt{\text{ا ب}}$	= ٣,١٦٢٢٧٧	$\bar{\text{ح}} = \frac{1}{2}(\bar{\text{ا}} + \bar{\text{ب}})$	= ٠,٥٠٠
ى = $\sqrt{\text{ب ح}}$	= ٥,٦٢٣٤١٣	$\bar{\text{ى}} = \frac{1}{2}(\bar{\text{ب}} + \bar{\text{ح}})$	= ٠,٧٥٠
ﻫ = $\sqrt{\text{ح ى}}$	= ٤,٢١٦٩٦٤	$\bar{\text{ﻫ}} = \frac{1}{2}(\bar{\text{ح}} + \bar{\text{ى}})$	= ٠,٦٢٥
و = $\sqrt{\text{ى ﻫ}}$	= ٤,٨٦٩٦٧٤	$\bar{\text{و}} = \frac{1}{2}(\bar{\text{ى}} + \bar{\text{ﻫ}})$	= ٠,٦٨٧٥
ل = $\sqrt{\text{ى و}}$	= ٥,٢٣٢٩٩١	$\bar{\text{ل}} = \frac{1}{2}(\bar{\text{ى}} + \bar{\text{و}})$	= ٠,٧١٨٧٥
م = $\sqrt{\text{و ل}}$	= ٥,٠٤٨٠٦٥	$\bar{\text{م}} = \frac{1}{2}(\bar{\text{و}} + \bar{\text{ل}})$	= ٠,٧٠٣١٢٥
ن = $\sqrt{\text{و م}}$	= ٤,٩٥٨٠٦٧	$\bar{\text{ن}} = \frac{1}{2}(\bar{\text{و}} + \bar{\text{م}})$	= ٠,٦٩٥٣١٢٥
ى = $\sqrt{\text{م ن}}$	= ٥,٠٠٢٨٦٥	$\bar{\text{ى}} = \frac{1}{2}(\bar{\text{م}} + \bar{\text{ن}})$	= ٠,٦٩٩٢١٨٧

يمكننا أن نستمر فى هذه العملية حتى نحصل على النتيجة صحيحة لأى عدد مطلوب من الأرقام العشرية ، ولكن يكفى ما سبق لتوضيح الطريقة التى استعملها بريجز ، ويمكن للقارئ أن يجرى بعض الأمثلة لنفسه وأن يختبر صحة النتيجة بإجراء العمليات الحسابية المناظرة مباشرة . ونظن أن القارئ قد تحقق الآن من ضخامة الدين الذى تدين به الثقافة الاجتماعية التى أوجدها النظام البروتستانتى الجديد إلى حكمة أمثال بريجز وفلاك من الرجال .

لقد رأينا فى باب سابق كيف أن اقتراح ستيفنس استعمال النظام العشرى للموازين والمقاييس قوبل بفتور وقلة اعتناء ، رغم موافقته للحاجيات المادية للديموقراطيات التجارية الجديدة . وكان سبب ذلك انصراف قادة المذاهب الفكرية إلى الجدل حول مسألتى خلود القديسين والحضور الحقيقى . ولمثل هذا السبب كادت لوغاريتمات نابير تلقى نفس هذا المصير . إذ يعود الفضل فى ترحيب رياضيو ذلك الوقت بهذه اللوغاريتمات إلى تفكير إدوار رايت العملى السليم وإلى المجهود العظيم الذى بذله بريجز فى الموضوع . وفى العام الذى نشرت فيه هذه اللوغاريتمات كتب بريجز إلى الأسقف أشر يقول « لم أر فى حياتى كتاباً سرنى أكثر من هذا » . وكان أشر يتسلى فى هذا الوقت بأحد فروع

الحساب الأخرى وفى نهاية سنين من البحث المضنى فى مسائل النسب الموجودة فى العهد القديم من الانجيل نجح أخيراً فى تقرير أن الانسان قد خلق فى الساعة التاسعة صباحا من ٢٣ أكتوبر سنة ٤١١٤ قبل الميلاد . وكان لنابير هواية مشابهة . ففى أثناء دراسته الجامعية وبين الأعجاب هاجم نابير قصور الباباستين عن سهولة الاعتراف بأن مدينتهم روما (ذات السبعة تلال والمملوءة جيوبه بوجود القديس جون) هى أم العالم الروحانى .

ومنذ ذلك الوقت عزمت بمعونة الله أن ستخدام دراستى وعوايتى فى البحث عن أسرار هذا الكتاب المقدس وقد فعلت ذلك فى كل فرصة ووقت أتيحا لى . ومن حسن الحظ أنه أسرع فى ذلك وانتهى من نشر « اكتشاف سانت جون سنة ١٥٩٤ » . وفى نفس هذا العام سر تيشو براهى أن يعلم من شاب اسكتلندى كان يزوره الأخبار الأولى عن التبسيط الجديد فى فن الحساب ، ويبدو أنه مقدر لعصور الثورات أن يخرج منها الجذوة المتقدة والرماد المنطفىء بكميات متساوية

ولكى نضع أساس المجتمع الذى ليس فيه نظام للطبقات والذى يجد فيه كل أنسان ما يكفيه ولا يترك أحد فقيراً ستحتاج إلى كثير من دروس تاريخ الانسان القديم . فمن السهل أن نقدر ستيفل دنابير ولكن من الصعب أن نفهم لماذا يشغلنا كثير من الاشتراكيين ذوى المواهب العظيمة بمناقشاتهم المتعبة حول جدلية هيجل .

المتسلسلات المستخدمة فى عمل الجداول

لقد احتوت جداول اللوغاريتمات الأولى على بعض الأخطاء . وقد لوحظت هذه الاخطاء وصححت من وقت لآخر . وقد بذل فى انشاء هذه الجداول مجهود هائل . ولم يكن غريبا إذن أن يحفز ذلك على البحث عن طرق أخرى مناسبة لحساب اللوغاريتمات . ونتيجة لهذا البحث ظهر حافز جديد لدراسة ما يسميه الرياضيون . المتسلسلات اللانهائية . لقد استعملنا فى أول هذا الكتاب الكسر الدائرى ! و . لتوضيح أن مجموع أى عدد من حدود متسلسلة معينة لا يتجاوز حداً معياً . ثم أمكننا بعد ذلك أن نثبت أن أية

متسلسلة هندسية أساسها أقل من الوحدة لها نفس هـذه الخاصية المفيدة (ص ١٩،١٨،٢٢٠) . وقد تلى اكتشاف اللوغاريتمات اكتشاف عدد كبير من المتسلسلات التى تشترك فى هذه الخاصية .

وأول مثال سنبحثه هو متسلسلة ذات الحدين عندما يكون الأس كسراً . إذا رجعت إلى الباب السابع ص ٢٢٥ ستتذكر أن

$$(\text{ا}+\text{ب})^{\text{ن}} = \text{ا}^{\text{ن}} + \text{م}\,\text{ا}^{\text{ن}-1}\,\text{ب}^{1} + \frac{\text{م}(\text{م}-1)}{2!}\,\text{ا}^{\text{ن}-2}\,\text{ب}^{2} + \frac{\text{م}(\text{م}-1)(\text{م}-2)}{3!}\,\text{ا}^{\text{ن}-3}\,\text{ب}^{3} + \dots$$

وإذا كانت م عدداً صحيحاً موجبا فإن المتسلسلة التى فى الطرف الأيسر تتكون من (م + ١) حداً . ولقد وجدنا معنى معقولا للقوى الكسرية والسالبة .

وهذا يجعلنا نتساءل : هل تبقى نظرية ذات الحدين صحيحة عند ما تكون م عددا سالبا أو كسرياً ؟ والجواب هو أنها تبقى صحيحة فى أغلب الأحيان . ويصبح المفكوك فى هذه الحالة لانهائيا مثل الكسور الدائرية ، ويكون مجموعه محدودا (مثل المتسلسلة الهندسية التى أساسها أصغر من الواحد الصحيح) إذا أخذت ا ، ب قيما معينة . وللبرهنة على صحة ذلك ، نستخدم مفكوك ذات الحدين للحصول على قيمة كميتين احتجنا لهما فعلا عند عمل الجداول المثلثية فى ص ٢٣٩ . وأولى هاتين الكميتين هى $\sqrt{\frac{3}{4}}$ ويمكن كتابتها على الصورة $(1-\frac{1}{4})^{\frac{1}{2}}$ والأخرى هى $\sqrt{2}$ ويمكن كتابتها $\sqrt{2} = (\frac{1}{2})^{-\frac{1}{2}} = (1-\frac{1}{2})^{-\frac{1}{2}}$ فى كل من هذين المقدارين ا = ١ وعلى ذلك يأخذ مفكوك ذات الحدين الصورة

$$(1-\text{ب})^{\text{ن}} = 1 + \text{ن}(-\text{ب}) + \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)}{2!}(-\text{ب})^{2} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)(\text{ن}-2)}{3!}(-\text{ب})^{3} + \text{— —}$$

$$= ١ - ن ب + \frac{ن(ن-١)}{٢!} ب^{٢} - \frac{ن(ن-١)(ن-٢)}{٣!} ب^{٣} + \ldots\ldots$$

وللبحث عن متسلسلات لتمثيل $\sqrt{\frac{٣}{٤}}$ ، $\sqrt{٢}$ باستعمال نظرية ذات الحدين يلزمنا أولا إيجاد قيم معاملات مفكوك ذات الحدين عند ما تأخذ ن القيم ½ (٫٥) ، − ½ (− ٫٥) فمثلا عند ما

$$ن = \frac{١}{٢}$$

$$\frac{ن(ن-١)}{٢!} = \frac{١}{٢} \frac{(\frac{١}{٢} - ١)}{٢} = - \frac{١}{٨} = - ٫١٢٥$$

وعند ما ن = − ½

$$\frac{ن(ن-١)}{٢!} = - \frac{١}{٢} \frac{\times(- \frac{١}{٢} - ١)}{٢} = + \frac{٣}{٨}$$

$$= + ٠٫٣٧٥$$

الحد				
ب١ = ن	+	٫٥	+	−٫٥
ب٢ = $\frac{ن(ن-١)}{٢!}$	−	٫١٢٥	+	٫٣٧٥
ب٣ = $\frac{ن(ن-١)(ن-٢)}{٣!}$	+	٫٠٦٢٥	−	٫٣١٢٥
ب٤ = $\frac{ن(ن-١)(ن-٢)(ن-٣)}{٤!}$	−	٫٠٣٩٠٦٢٥	+	٫٢٧٣٤٣٧٥
ب٥ =	+	٫٠٢٧٣٤٣٧٥	−	٫٢٤٦٠٩٣٧٥
ب٦ =	−	٫٠٢٠٥٠٧٨١٢٥	+	٫٢٢٥٥٨٥٩٣٧٥
ب٧ =	+	٫٠١٦١١٣٢٨١٢٥	−	٫٢٠٩٤٧٢٦٥٦٢٥
ب٨ =	−	٫٠١٣٠٩٢٠٤١٠١٦	+	٫١٩٦٣٨٠٦١٥٢٣٤
ب٩ =	+	٫٠١٠٩١٠٠٣٤١٨٠	−	٫١٨٥٤٧٠٥٨١٠٥٤
ب١٠ =	−	٫٠٠٩٢٧٣٥٢٩٠٥٣	+	٫١٧٦١٩٧٠٥٢٠٠١
ب١١ =	+	٫٠٠٨٠٠٨٩٥٦٩٠٩	−	٫١٦٨١٨٨٠٩٥٠٩٢
ب١٢ =	−	٫٠٠٧٠٠٧٨٣٧٢٩٥	+	٫١٦١١٨٠٢٥٧٧٩٧

ولحساب قيمة $\sqrt{\frac{٣}{٤}}$ يلزمنا إيجاد قيمة $(١ + ب)^{ن}$ عند ما ب = − ¼ ، ن = ½ فى هذه الحالة يصبح مفكوك ذات الحدين

$$١ - ٫٥ \times \frac{١}{٤} - ٫١٢٥ \times \frac{١}{١٦} - ٫٠٦٢٥ \times \frac{١}{٦٤} - ٫٠٣٩٠٦٢٥ \times (\frac{١}{٢٥٦})$$
$$- ٫٠٢٧٣٤٣٧٥ \times (\frac{١}{١٠٢٤})$$

إذا أخذنا الحدين الأول والثانى فقط من هذه المتسلسلة تحصل على القيمة

$$١ - \frac{١}{٨} = ٫٨٧٥$$

ويمكننا عمل جدول بسيط يبين القيم التى تحصل عليها إذا أخذنا مجموع عدد قليل من الحدود الأولى كما يأتى

الحدود	المجموع
١	١
٢	٠٫٨٧٥
٣	٠٫٨٦٧١٨٧٥
٤	٠٫٨٦٦٢١٠٩٣٧٥
٥	٠٫٨٦٦٠٥٨٣٤٩٦٠٩٣٥٧
٦	٠٫٨٦٦٠٣١٦٤٦٧٢٨٥١٥٦٢٥
٧	٠٫٨٦٦٠٢٦٦٣٩٩٢٨٣٥٤٤٩٢٢

وإذا أخذنا أى عدد من الحدود فإن مجموع هذه المتسلسلة لا يكون أصغر من ٠٫٨٦٦٠٢٥ مطلقا وهى قيمة $\sqrt{\frac{٣}{٤}}$ صحيحة إلى ستة أرقام عشرية وإذا أردنا عمل جدول جيوب وجيوب تمام صحيح إلى خمسة أرقام فلا يلزمنا لتعيين قيمة $\sqrt{\frac{٣}{٤}}$ إلا السبعة الحدود الأولى من المتسلسلة السابقة (أنظر الجدول فى ص٢٣٩ فى الباب السادس)

أما المتسلسلة التى تمثل $\sqrt{٢}$ فلا تصل إلى حدها الذى لا تتعداه بهذه السرعة وقد يذكر القارئ أن قيمة $\sqrt{٢}$ صحيحة إلى أربعة أرقام معنوية هى ١٫٤١٤ وتحصل على متسلسلة ذات الحدين التى تمثل $\sqrt{٢}$ بوضع ب = ½ ، ن = − ½ ويكون

$$(1-ب)^{ن} = 1 + (-0{,}5)(-\tfrac{1}{2}) + (0{,}375)(-\tfrac{1}{2})^2 + (-0{,}3125)(-\tfrac{1}{2})^3 \ldots$$

وبعمل جدول لمجموع الحدود الأولى كما فى الحالة السابقة نحصل على النتيجة صحيحة إلى أربعة أرقام معنوية

الحدود	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
المجموع ١	١,٢٥٠	١,٣٤٤	١,٣٨٣	١,٤٠٠	١,٤٠٨	١,٤١١	١,٤١٣	١,٤١٤

ولا يتعدى مجموع المتسلسلة ١,٤١٤٣ مهما كان عدد الحدود المجموعة .

كاختبار آخر لاستعمال نظرية ذات الحدين للأسس السالبة سنحصل على النتيجة الآتية التى ستستعمل فيما بعد عند إيجاد متسلسلة لانهائية لتمثيل النسبة التقريبية ط . يمكننا كتابة المقدار $\frac{1}{س+1}$ على الصورة

$$(س+1)^{-1}$$

بالقسمة المباشرة نجد :

$$1 \div (س+1) = 1 - س + س^2 - س^3 + س^4 - س^5$$

$$\begin{array}{l} 1 \\ \underline{س+1} \\ -س \\ \underline{-س-س^2} \\ س^2 \\ \underline{س^2+س^3} \\ -س^3 \\ \underline{-س^3-س^4} \\ س^4 \\ \underline{س^4+س^5} \\ -س^5 \ldots \end{array}$$

وباستعمال نظرية ذات الحدين نحصل على

$$(1+س)^{-1} = 1 + (-1)س + \frac{(-1)(-1-1)}{2}س^2 + \frac{(-1)(-1-1)(-1-2)}{3\times 2}س^3 + (-1)\frac{(-1-1)(-1-2)(-1-3)}{4\times 3\times 2}س^4 \ldots$$

$$= 1 - س + س^2 - س^3 + س^4 \ldots\ldots$$

وهى نفس النتيجة التى حصلنا عليها عند إجراء عملية القسمة المباشرة

ومن الطبيعى أن يتساءل القارئ كيف نعلم أن مجموع متسلسلة معينة لا يتعدى حدا معينا ؟ لم يشغل الرياضيون الأوائل الذين استعملوا متسلسلات لانهائية أنفسهم بالبحث عن اختبار دقيق لمعرفة ما إذا كانت المتسلسلة لها حد لا تتعداه أم لا . وكانوا راضين ومكتفين بأن هذه المتسلسلات تؤدى إلى نتائج مفيدة .

وانه لمما يعزينا أن نتذكر الاخطاء التى وقع فيها بعض العباقرة من رياضى القرن السابع عشر . فقد أخطأ ليبنتز الذى سنبحث إضافته العظيمة للرياضة فيما بعد عندما وضع س = ١ فى مفكوك $(1+س)^{-1}$

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 \ldots$$

هذه هى المتسلسلة الهندسية $(-1)^{ن}$ عندما تأخذ ن القيم ٠، ١، ٢، ٣، ... على التوالى بشرط أن نستمر فى العملية وحاصل جمع الـ ن حدا الأولى هو

الحدود	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	.....	الخ
المجموع	١	٠	١	٠	١	٠	١	.....	

وهذا المجموع لا يقترب تدريجيا من حد معين وظن ليبنتز أن مجموع هذه المتسلسلة يساوى ½ وذلك لأن $2^{-1} = 0{,}5$ وفى الواقع لاتوجد أية قيمة نهائية

لهذة المتسلسلة أى أن $(١+١)^{-\frac{١}{٢}}$ لا يمكن التعبير عنها بهذه الطريقة وحتى القرن التاسع عشر ، ولم نحصل على اختبارات تكفى لبحث اقتراب مجموع المتسلسلات إلى نهاية معينة مثل القيمة النهائية $\frac{١}{٩}$ التى يقترب بمجموع المتسلسلة :

$$٠٫١ + ٠٫٠١ + ٠٫٠٠١ + ٠٫٠٠٠١ + \cdots$$

تدريجيا منها ولا يتعداها .

وربما وجد القارىء نفسه أكثر استعداداً لغفران ذنب لبنتز إذا تذكر أن رياضى القرن السابع عشر برهنوا على أن الله خلق الدنيا من لاشىء ، وكان برهانهم يعتمد على أمور استنتجوها من سلوك هذه المتسلسلات

وأبسط الاختبارات التى تساعدنا على معرفة ما إذا كانت المتسلسلة اللانهائية تقترب من حد معين أم لا ، هو مقارنتها بمتسلسلة لا نهائية أخرى تفعل ذلك . ويمكن استعمال هذا الاختبار للبرهنة على أن مفكوك ذات الحدين

$$(\text{١}+\text{ب})^{\text{ن}} = \text{١} + \text{ن ب} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-\text{١})}{\text{٢}!}\,\text{ب}^{\text{٢}} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-\text{١})(\text{ن}-\text{٢})}{\text{٣}!}\,\text{ب}^{\text{٣}} + \cdots$$

له نهاية معينة بشرط أن تقع ب بين −١ ، +١ .

ويمكن للقارىء ملاحظة كيفية استعمال هذا الاختبار فى حالة المتسلسلة

$$\text{١} + \text{س} + \frac{\text{س}^{\text{٢}}}{\text{٢}!} + \frac{\text{س}^{\text{٣}}}{\text{٣}!} + \frac{\text{س}^{\text{٤}}}{\text{٤}!} + \cdots\cdots$$

والسبب فى وجود نهاية لهذه المتسلسلة الأخيرة هو وجود العامل ر١ فى مقام الحد الـ (ر + ١) الذى سنسميه $\text{ع}_{\text{ر}}$. نلاحظ أن $\text{ع}_{\text{ر}+\text{١}}$

$$= \frac{\text{س}^{\text{ر}+\text{١}}}{(\text{ر}+\text{١})!} = \text{ع}_{\text{ر}} \times \left\{ \frac{\text{س}}{\text{ر}+\text{١}} \right\}$$

(أنظر ص ٢١٧) بأخذ عدد كاف من

الحدود تصل إلى حد معين يكون عنده ر أكبر من ١٠ س مهما كانت قيمة س ولكننا نعلم فعلا أن المتسلسلة التى يساوى كل حد فيها عشر الحد الذى قبله تماما تمثل كسراً دائريا له قيمة نهائية يشابه الكسر أو ذى القيمة النهائية $\frac{١}{٩}$ أ ٧و٠ ذى القيمة النهائية $\frac{٧}{٩}$. وحيث أن المتسلسلة التى كل حد فيها يساوى عشر الحد الذى قبله مباشرة لا يمكن أن تتعدى نهايه معينة فمن باب أولى لا تتعدى المتسلسلة التى كل حد من حدودها أصغر من عشر الحد الذى قبله نهاية معينة أيضا وعلى ذلك تكون المتسلسلة

$$\text{١} + \frac{\text{م}^{\text{١}}}{\text{١}} + \frac{\text{م}^{\text{٢}}}{\text{٢}!} + \frac{\text{م}^{\text{٣}}}{\text{٣}!} + \frac{\text{م}^{\text{٤}}}{\text{٤}!} + \cdots$$

تقاربية (كما يقول الرياضيون) دائما إذا كان $\text{م}_{\text{ر}}$ أصغر من $\text{س}^{\text{ر}}$ (س أى عدد ثابت)

وإذا كان البسط كسراً صغيراً فى متسلسلة من هذا النوع ، يكون من الممكن الحصول على نتيجة دقيقة جداً من عدد قليل من الحدود فمثلا إذا أردنا إيجاد قيمة المقدار ١٫٠٠١ (أساس لوغاريتمات بيرجى) مرفوعا للقوة الخامسة ، نكتب :

$$(١٫٠٠١)^{٥} = (١ + ٠٫٠٠١)^{٥} = ١ + ٥\,(٠٫٠٠١)$$

$$+ \frac{٥ \times ٤}{١ \times ٢}(٠٫٠٠١)^{٢} + \frac{٥ \times ٤ \times ٣}{١ \times ٢ \times ٣}(٠٫٠٠١)^{٣} + \cdots\cdots$$

وهى متسلسلة من النوع السابق لأن $\text{م}_{\text{٦}} = \text{م}_{\text{٧}} = \cdots = ٠$ ،
وحاصل جمع الحدين الأول والثانى ١٫٠٠٥ ، والثلاثة الحدود الأولى ١٫٠٠٥٠٠١ ، والأربعة الأولى ١٫٠٠٥٠٠١٠٠٠١ وكل حد فى هذه المتسلسلة أصغر من جزء من الألف من الحد الذى قبله مباشرة وعلى ذلك تكون النتيجة صحيحة إلى عشرة أرقام عشرية رغم أننا لم نستعمل إلا ثلاثة حدود فقط من المتسلسلة.

واحدى متسلسلات هذه المجموعة لها أهمية عظيمة فى الرياضة الحديثة . وهى تؤدى بنا إلى العدد الضميرهـ الذى ذكرناه فى ص ٧٧ ، وهو أساس ما يسمى

باللوغاريتمات « الطبيعية » . إن أفضل اللوغاريتمات الحديثة محسوبة إلى أكثر من عشرين رقماً . وإذا أردنا الحصول على درجة من الدقة تماثل ذلك باستعمال طريقة بريجز فإن المجهود اللازم يكون فوق طاقة البشر . ويمكن اقتصاد جزء كبير من هـــذا المجهود إذا حسبنا أولا اللوغاريتمات الطبيعية للأساس هـ ثم استعملنا القانون

$$\text{لو}_{١٠}\,\text{ا} = \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{ا}}{\text{لو}_{\text{هـ}}\,١٠}$$

وتسمى المتسلسلة التي تؤدي للأساس هـ بالمتسلسلة الأسية وهي

$$١ + \text{س} + \frac{\text{س}^{٢}}{٢!} + \frac{\text{س}^{٣}}{٣!} + \frac{\text{س}^{٤}}{٤!} + \frac{\text{س}^{٥}}{٥!} + \cdots$$

بوضع س = ١ نحصل على قيمة هـ ، أي أن

$$\text{هـ} = ١ + ١ + \frac{١}{٢!} + \frac{١}{٣!} + \frac{١}{٤!} + \frac{١}{٥!} + \cdots$$

وبعد الحدود العشرة الأولى من هذه المتسلسلة يصبح كل حد أصغر من عشر الذي قبله مباشرة . وعلى ذلك لا تؤثر إضافة هذا الحد إلى مجموع ما قبله من الحدود إلا في الرقم العشري التالي لآخر رقم عشري في هذا المجموع . ومهما أخذنا من الحدود فإن مجموعها لا يتعدى ٢,٧١٨٢٨١٨٢٨٥ صحيحة لعشرة أرقام عشرية . وتكون النتيجة السابقة صحيحة لخمسة أرقام عشرية إذا أخذنا مجموع التسعة حدود الأولى فقط . ولا يمكن تمثيل هـ بعدد واحد وهي تشبه في ذلك النسبة التقريبية ط . ويمكن استنتاج الخواص المفيدة لهذه المتسلسلة بطرق كثيرة ، تعتمد احداهما على نظرية ذات الحدين . وسنصل لهذه الطريقة أولا بطريق التجربة . والمتسلسلة التي تمثل هـ ذات فائدة عظيمة . والسبب في ذلك هو أنه يمكن رفع هـ إلى أية قوة بقاعدة بسيطة (انظر ملحق ٣).

وهذه القاعدة هي

$$(\text{هـ})^{\text{س}} = ١ + \text{س} + \frac{\text{س}^{٢}}{٢!} + \frac{\text{س}^{٣}}{٣!} + \frac{\text{س}^{٤}}{٤!} + \cdots$$

فمثلا

$$\text{هـ}^{\frac{١}{٥}} = (٢,٧١٨٢٨٠٠)^{\frac{١}{٥}} \ \text{يساوى}$$

$$١ + \frac{١}{٥} + \frac{١}{٢٥} \times \frac{١}{٢!} + \frac{١}{١٢٥} \times \frac{١}{٣!} + \frac{١}{٦٢٥} \times \frac{١}{٤!} + \cdots$$

ويمكن أن يرى القارئ بنفسه سرعة تقارب هذه المتسلسلة إذا حصل على مجموع الحدود الأولى التي عددها ن عندما ن = ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ وهي ١ ، ١,٢ ، ١,٢٢ ، ١,٢٢١٣ ، ١,٢٢١٣٩ على الترتيب . واضافة حد جديد في هذه الحالة لا يؤثر مطلقا في الرقم العشري الناتج عن اضافة الحد السابق . وعلى ذلك يكفي أن نأخذ الحدود الستة الأولى من المتسلسلة الأسية لنحصل على الجذر الخامس للمقدار ٢,٧١٨٢٨ صحيحا إلى ستة أرقام معنوية وباستعمال النظرية الأسية في حساب اللوغاريتمات نقتصد كثيراً من الجهد وسنقابل فيما بعد متسلسلة أخرى يصبح بواسطتها حساب اللوغاريتمات بسيطا للغاية . وتسمى هذه الأخيرة بالمتسلسلة اللوغاريتمية وسنستخدمها لإيجاد متسلسلة تقاربية لتمثيل ط .

لقد أوحت الينا نظرية ذات الحدين بالمتسلسلة الأسية . فمثلا

$$(١ + \text{س})^{٢} = ١ + ٢\,\text{س} + \text{س}^{٢}$$

$$(١ + \text{س})^{٣} = ١ + ٣\,\text{س} + ٣\,\text{س}^{٢} + \text{س}^{٣}$$

$$(١ + \text{س})^{٤} = ١ + ٤\,\text{س} + ٦\,\text{س}^{٢} + ٤\,\text{س}^{٣} + \text{س}^{٤}$$

وعندما تكون س صغيرة جداً في المقادير السابقة ، تصبح س^٢ ، س^٣ .... الخ اصغر بكثير جداً من س ، فمثلا

$$\text{س} = \frac{١}{١٠٠} = ٠,٠١ \qquad \text{س}^{٢} = \frac{١}{١٠٠٠٠} = ٠,٠٠٠١$$

$$\text{س}^{٣} = ٠,٠٠٠٠٠١ \ ، \qquad \text{س}^{٤} = ٠,٠٠٠٠٠٠٠١ \ \text{وهكذا .}$$

وعلى ذلك نحصل على تقريب جيد جدا عندما تكون س صغيرة إذا أخذنا

$$(\text{١} + \text{س})^{\text{٢}} = \text{١} + \text{٢ س}$$

$$(\text{١} + \text{س})^{\text{٣}} = \text{١} + \text{٣ س}$$

$$(\text{١} + \text{س})^{\text{٤}} = \text{١} + \text{٤ س}$$

وجودة التقريب فى النتيجة العامة

$$(\text{١} + \text{س})^{\text{ن}} = \text{١} + \text{ن س}$$

تتوقف على مقدار صغر س وكبر ن

فمثلا إذا كانت س = ٠٫١ فإن $(\text{١} + \text{س})^{\text{٢}} = (\text{١٫١})^{\text{٢}} = \text{١٫٢١}$
والتقريب الأول يعطى ١٫٢ وهى قيمة أصغر من النتيجة الصحيحة باقل من ١٪

ومن المفيد للقارىء أن يختبر القيم الآتية للمقدار $(\text{١} + \text{س})^{\text{ن}}$ بنفسه

س	ن	$(\text{١} + \text{س})^{\text{ن}}$	١ + ن س	النسبة المئوية للخطأ
٫٠١	٢	١٫٢١	١٫٢	٫٨
٫١	٣	١٫٣٣١	١٫٣	٢٫٣
٫١	٤	١٫٤٦٤١	١٫٤	٤٫٤
٫٠١	٢	١٫٠٢٠١	١٫٠٢	٫٠١
٫٠١	٣	١٫٠٣٠٣٠١	١٫٠٣	٫٠٣
٫٠١	٤	١٫٠٤٠٦٠٤٠١	١٫٠٤	٫٠٦

ويلاحظ القارىء من الجدول السابق أن الخطأ الناتج من استعمال هذا القانون الرياضى التقريبى يكون أكبر دائما فى حالة القوى الكبيرة منه فى حالة القوى الصغيرة إذا أخذت س نفس القيمة فى الحالتين فمثلا الخطأ فى قيمة $(\text{١} + \text{س})^{\text{٤}}$ باستعمال القانون التقريبى يساوى تقريبا ستة أمثال الخطأ فى قيمة $(\text{١} + \text{س})^{\text{٢}}$ عندما تأخذ س القيمة ٫١ فى كل من الحالتين . وإذا كانت س تساوى عشر هذه القيمة أى ٫٠١ فإن الخطأ فى التقريب ١ + ن س للمقدار $(\text{١} + \text{س})^{\text{٤}}$

يكون أقل من عشر الخطأ فى قيمة $(\text{١} + \text{س})^{\text{٢}}$ عندما تساوى س قيمتها الأصلية أى ٫١ . نلاحظ أننا بأخذنا ١ + ن س كتقريب أول للمقدار $(\text{١} + \text{س})^{\text{ن}}$ نكون قد أهملنا جميع قوى س التى ليست بين القوسين . إذا أجرينا نفس العملية للمقدار

$$\left(\text{١} + \text{س} + \frac{\text{س}^{\text{٢}}}{\text{٢}!}\right)^{\text{ن}}$$

نحصل بوضع ن = ٢ على $\left(\text{١} + \text{س} + \frac{\text{س}^{\text{٢}}}{\text{٢}!}\right)$

$$= \text{١} + \text{س} + \frac{\text{س}^{\text{٢}}}{\text{٢}!}$$

$$+ \text{س} + \text{س}^{\text{٢}} + \left[\frac{\text{س}^{\text{٣}}}{\text{٢}!}\right]$$

$$+ \frac{\text{س}^{\text{٢}}}{\text{٢}!} + \left[\frac{\text{س}^{\text{٣}}}{\text{٢}!} + \frac{\text{س}^{\text{٤}}}{\text{٤}}\right]$$

وباهمال جميع الحدود التى تحتوى على س بقوة أكبر من أعلى قوة لها فى المقدار الأصلى نحصل على

$$\text{١} + \text{٢س} + \text{س}^{\text{٢}}\left(\tfrac{\text{١}}{\text{٢}} + \text{١} + \tfrac{\text{١}}{\text{٢}}\right) = \text{١} + \text{٢ س} + \text{٢ س}^{\text{٢}}$$

$$= \text{١} + \text{٢ س} + \frac{(\text{٢ س})^{\text{٢}}}{\text{٢}!}$$

وإذا أجرى القارىء نفس العملية للمقدار

$$\left(\text{١} + \text{س} + \frac{\text{س}^{\text{٢}}}{\text{٢}!}\right)^{\text{٣}}$$

فإنه يجد بعد حذف جميع قوى س ، س٢ أن من الممكن اختصار المقدار الى

$$1 + 3س + \frac{(3س)^2}{2!}$$

بالمثل يكون تقريب المقدار

$$(1 + س + \frac{س^2}{2!})^4$$

هو

$$1 + 4س + \frac{(4س)^2}{2!}$$

وفى الحالة العامة / بحذف جميع قوى س الأعلى من الموجودة داخل القوسين، تحصل على التقريب الثانى الآتى

$$(1 + س + \frac{س^2}{2!})^ن = 1 + ن س + \frac{(ن س)^2}{2!}$$

وهذا التقريب أدق بكثير جداً من التقريب الأول

$$(1 + س)^ن = 1 + ن س$$

وللتأكد من ذلك نجرى عملية الضرب عندما س = ,1 فنحصل على

$$(1 + ,1 + \frac{(,1)^2}{2!})^2 = (1,105)^2 = 1,221025$$

وبتعويض س = ,1 فى المقدار التقريبى

$$1 + 2س + \frac{(2س)^2}{2!} = 1,22$$

وهذه النتيجة أقل من القيمة الصحيحة بأقل من ١ ٪ . ويمكن عمل جدول لبيان قيم خاصة بهذا التقريب الجديد مثل الجدول السابق كما يأتى :

س	ن	$(1+س+\frac{س^2}{2!})^ن$	$1+ن س+\frac{(ن س)^2}{2!}$	الخطأ المئوى
,١	٢	١,٢٢١٠٢٥	١,٢٢٠	,١
,١	٣	١,٣٤٩٢٣٢٦٢٥	١,٣٤٥	,٣
,١	٤	١,٤٩٠٩٠٢٠٥	١,٤٨٠	,٧
,٠١	٢	١,٠٢٠٢٠١٠٠٢٥	١,٠٢٠٢	٠,٠٠٠١
,٠١	٣	١,٠٣٠٤٥٤٠٢٢٦	١,٠٢٠٤٥	٠,٠٠٠٤
,٠١	٤	١,٠٤٠٨١٠٠٨٥٥	١,٠٤٠٨٠	٠,٠٠١٠

ويشجعنا هذا على المضى فى البحث عن تقريب أفضل ومن نفس النوع لرفع عدد ما إلى أية قوة مطلوبة وبالضرب المباشر تجد أن

$$(1 + س + \frac{س^2}{2!} + \frac{س^3}{3!})^2$$

$$= 1 + س + \frac{س^2}{2!} + \frac{س^3}{3!}$$

$$+ س + س^2 + \frac{س^3}{2!} + \left[\frac{س^4}{3!}\right]$$

$$+ \frac{س^2}{2!} + \frac{س^3}{2!} + \left[\frac{س^4}{2! \times 2!} + \frac{س^5}{3! \times 2!}\right]$$

$$+ \frac{س^3}{3!} + \left[\frac{س^4}{3!} + \frac{س^5}{2! \times 3!} + \frac{س^6}{3! \times 3!}\right]$$

وباهمال قوى س الاعلى من س³ ، نحصل على

$$1 + 2س + 2س^2 + \frac{4س^3}{3!} = 1 + 2س + \frac{(2س)^2}{2!} + \frac{(2س)^3}{3!}$$

بالمثل نحصل على النتائج التقريبية الآتية عند ما تكون س صغيرة

$$\left(1+\text{س}+\frac{\text{س}^{2}}{2!}+\frac{\text{س}^{3}}{3!}\right)^{3}=1+3\text{س}+\frac{(3\text{س})^{2}}{2!}+\frac{(3\text{س})^{3}}{3!}$$

$$\left(1+\text{س}+\frac{\text{س}^{2}}{2!}+\frac{\text{س}^{3}}{3!}\right)^{4}=1+4\text{س}+\frac{(4\text{س})^{2}}{2!}+\frac{(4\text{س})^{3}}{3!}$$

وفى الحالة العامة

$$\left(1+\text{س}+\frac{\text{س}^{2}}{2!}+\frac{\text{س}^{3}}{3!}\right)^{\text{ن}}=1+\text{ن س}+\frac{(\text{ن س})^{2}}{2!}+\frac{(\text{ن س})^{3}}{3!}$$

وكما فعلنا من قبل ، يمكن وضع القيم العددية التى تحصل عليها بتطبيق هذا القانون التقريبي فى الجدول الآتى :

س	ن	$\left(1+\text{س}+\frac{\text{س}^{2}}{2!}+\frac{\text{س}^{3}}{3!}\right)^{\text{ن}}$	$1+\text{س ن}+\frac{(\text{س ن})^{2}}{2!}+\frac{(\text{س ن})^{3}}{3!}$	الخطأ المئوى
و١	٢	١,٢٢١٣٩٣٣٦	١,٢٢١٣	و٠٠٥
و١	٣	١,٣٤٩٨٤٣٢٣	١,٣٤٩٥	و٠٢٥
و١	٤	١,٤٩١٨٠١٧٤	١,٤٩٠٦	و٠٧٦
و٠١	٢	١,٠٢٠٢٠١٣٣٩٢	١,٠٢٠٢٠١٣	و٠٠٠٠٦
و٠١	٣	١,٠٣٠٤٥٤٥٣٢٧	١,٠٣٠٤٥٤٥	و٠٠٠٠٣
و٠١	٤	١,٠٤٠٨١٠٧٧٢٥	١,٠٤٠٨١٠٦	و٠٠٠٠١

ويمكن للقارئ أن يتنبأ بما سيحصل عليه عند ما يجرى عمليـــة الضرب المباشرة ويحذف قوى س الأعلى من س^{4} باعتبارها كميات يمكن اهمالها إذا قورنت بقيم س^{4} ، س^{3} ، س^{2} عندما تكون س أصغر من الوحدة

$$\left(1+\text{س}+\frac{\text{س}^{2}}{2!}+\frac{\text{س}^{3}}{3!}+\frac{\text{س}^{4}}{4!}\right)^{\text{ن}}=1+\text{س ن}+\frac{(\text{س ن})^{2}}{2!}+\frac{(\text{س ن})^{3}}{3!}+\frac{(\text{س ن})^{4}}{4!}$$

والجدول الآتى يبين النتائج العددية التى نحصل عليها باستعمال هذا القانون

س	ه	$\left(1+\text{س}+\frac{\text{س}^{2}}{2!}+\frac{\text{س}^{3}}{3!}+\frac{\text{س}^{4}}{4!}\right)^{\text{ه}}$	$1+\text{س ه}+\frac{(\text{س ه})^{2}}{2!}+\frac{(\text{س ه})^{3}}{3!}+\frac{(\text{س ه})^{4}}{4!}$	الخطأ المئوى
و١	٢	١,٢٢١٤٠٢٥٧	١,٢٢١٤	٠و٠٠٢
و١	٣	١,٣٤٩٨٥٨٥٠	١,٣٤٩٨٣٧٥	٠و٠١٥
و١	٤	١,٤٩١٨٢٤٢٤	١,٤٩١٧٣	٠و٠٦
و٠١	٢	١,٠٢٠٢٠١٣٤٠٠٢٥	١,٠٢٠٢٠١٣٤	٠و٠٠٠٠٠٠٠٠٢٥
و٠١	٣	١,٠٣٠٤٥٤٥٣٣٩٥١	١,٠٠٤٥٤٥٣٣٧٥	٠و٠٠٠٠٠٠٠٢
و٠١	٤	١,٠٤٠٨١٠٧٧٤١٨٩	١,٠٤٠٨١٠٧٧٣	٠و٠٠٠٠٠٠٠٩

وسيرى القارئ أننا نحصل على خطأ أقل كلما أضفنا حدا جديدا $\frac{\text{س}^{\text{ر}}}{\text{ر}!}$ إلى الطرف الأيمن ، $\frac{(\text{س ه})^{\text{ر}}}{\text{ر}!}$ للطرف الأيسر من المعادلة

$$\left(1+\text{س}+\frac{\text{س}^{2}}{2!}+\frac{\text{س}^{3}}{3!}+\dots\right)^{\text{ه}}=1+\text{ه س}+\frac{(\text{س ه})^{2}}{2!}+\frac{(\text{س ه})^{3}}{3!}+\frac{(\text{س ه})^{4}}{4!}+\dots$$

وعلى ذلك لن يدهش القارىء إذا وجد أن من الممكن ، باضافة عدد كاف من هذه الحدود أن نجعل س تقترب بأية درجة من الواحد الصحيح وأن نحصل بالرغم من ذلك على نتيجة جيدة . وعندما تكون س = ١ ، تأخذ المتسلسلة الأسية اللانهائية

$$1 + \text{س} + \frac{\text{س}^2}{2!} + \frac{\text{س}^3}{3!} + \cdots$$

الصورة

$$1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots$$

وكما لاحظنا ، لايمكن أن يتعدى مجموع هذه السلسلة الأخيرة قيمة نهائية معينة هى ٢,٧١٨٢٨ صحيحة إلى ستة أرقام معنوية وبفرض صحة النتيجة عند س = ١ فإن :

$$(2{,}7182800)^{\text{ن}} = 1 + \text{ن} + \frac{\text{ن}^2}{2!} + \frac{\text{ن}^3}{3!} + \frac{\text{ن}^4}{4!} + \cdots$$

وسنوضح أن فى الامكان جعل قيمتى طرفى المعادلة السابقة تقتربان من بعضهما بأية درجة مطلوبة نتيجة لاضافة أرقام عشرية جديدة إلى المقدار الأيمن وحدود جديدة على الصورة $\frac{\text{س}^{\text{ر}}}{\text{ر}!}$ إلى الأيسر كما يأتى :

اعتبر حدين فقط أى

$$1 + \text{س} = 1 + 1 = 2$$

فيكون ....

$$(1 + \text{س})^2 = 2^2 = 4$$

$$\text{و } 1 + 2\text{س} = 3$$

الفرق بين $(1 + \text{س})^2$ و $1 + 2\text{س}$ هو ٢٥ ٪ . بنفس الطريقة يمكننا عمل الجدول الآتى :

القيمة الحقيقية	المجموع	القيمة المقربة	المجموع	الخطأ النسبى
$(1+1)^2$	٤	$1 + 2$	٣	٢٥
$(1+1+\frac{1}{2!})^2$	٦,٢٥	$1 + 2 + \frac{2^2}{2!}$	٥	٢٠
$(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!})^2$	٧,١̇	$1 + 2 + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!}$	٦,٣̇	١١
$(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!})^2$	٧,٣٣٥٠٧	$1 + 2 + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{4!}$	٧	٤,٦
$(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!})^2$	٧,٣٨٠٢٨	$1 + 2 + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{4!} + \frac{2^5}{5!}$	٧,٢٦	١,٥

وعلى ذلك نستنتج أنه إذا كان

$$\text{هـ} = ١ + ١ + \frac{١}{٢!} + \frac{١}{٣!} + \frac{١}{٤!} + \frac{١}{٥!} + \ldots$$

فإن

$$\text{هـ}^{\text{س}} = ١ + \text{س} + \frac{\text{س}^{٢}}{٢!} + \frac{\text{س}^{٣}}{٣!} + \frac{\text{س}^{٤}}{٤!} + \frac{\text{س}^{٥}}{٥!} + \ldots$$

ويمكن إختبار صحة هذه النتيجة عندما يكون الأس كسرياً ، بوضع س = ½ وإيجاد حاصل جمع الحدود الست الأولى من المتسلسلة الأسية :

$$\text{هـ}^{\frac{١}{٢}} = \sqrt{٢٫٧١٨٢٨٠٠} = ١٫٦٤٩ \text{ (صحيحا إلى ثلاثة أرقام عشرية)}$$

$$\therefore ١ + \frac{١}{٢} + \frac{١}{٢^{٢} \times ٢!} + \frac{١}{٢^{٣} \times ٣!} + \frac{١}{٢^{٤} \times ٤!} + \frac{١}{٢^{٥} \times ٥!} + \ldots$$

$$= ١ + ٠٫٥ + ٠٫١٢٥ + ٠٫٠٢٠٨٣ + ٠٫٠٠٢٦٠ + ٠٫٠٠٠٢٦$$

$$= ١٫٦٤٩ \text{ (صحيحاً إلى ثلاثة أوقام عشرية)}$$

ولاختبار صحة النتيجة عندما يكون الأس سالباً ، نضع س = − ١ بجمع الحدود الثمانية الأولى من المتسلسلة الأسية فى هذه الحالة نحصل على :

$$\text{هـ}^{-١} = \frac{١}{٢٫٧١٨٢٨} = ٠٫٣٦٨ \text{ (صحيحاً إلى ثلاثة أرقام عشرية)}$$

$$\therefore ١ - ١ + \frac{١}{٢!} - \frac{١}{٣!} + \frac{١}{٤!} - \frac{١}{٥!} + \frac{١}{٦!} - \frac{١}{٧!} \ldots$$

$$= (١ - ١) + \frac{١}{٢}(١ - \frac{١}{٣}) + \frac{١}{٢٤}(١ - \frac{١}{٥}) + \frac{١}{٧٢٠}(١ - \frac{١}{٧})$$

$$= ٠ + \frac{١}{٣} + \frac{١}{٣٠} + \frac{١}{٨٤٠} = ٠٫٣٦٨ \text{ (صحيحا إلى ثلاثة أرقام عشرية)}$$

وعند حساب اللوغاريتمات لأى أساس آخر غير هـ باستعمال الطرق الأصلية ، يلزمنا الاستمرار فى عملية استخراج الجذر التربيعى أو التكعيبي وذلك لعمل جدول أعداد مقابلة للوغاريتمات . وعند إيجاد الجذر الثامن للعدد ١٠ يلزم إجراء عملية استخراج الجذر التربيعى ثلاثة مرات متتالية .

وللحصول على الجذر السادس يلزمنا استخراج الجذر التربيعى للجذر التكعيبي أو العكس . وفيما عدا الجذر التكعيبي ، لا توجد طريقة رياضية لاستخراج الجذور الفردية . ويمكن الحصول على أى جذر من جذور هـ بالتعويض عن س بقيمة كسرية فى المتسلسلة الأسية ، والحصول على جذور هـ ذات الرتب العالية أسهل من الحصول على الجذور ذات الرتب الصغيرة . والسبب فى ذلك أن المتسلسلة تكون أسرع فى التقارب فى الحالة الأولى ؛

ويرى القارىء ذلك إذا حسب قيمة $\sqrt[٥]{\text{هـ}}$ أو $\text{هـ}^{\frac{١}{٥}}$ وقد أعطينا قيمتها من قبل .

وقد نشر سبيدل سنة ١٦١٩ أول لوغاريتمات محسوبة للأساس هـ . وليست السهولة التى تحصل بها على جذور العدد هـ إلا إحدى الخواص الهامة التى يمتاز بها هذا العدد الغريب . فمثلا يوجد ارتباط قوى بين هذا العدد وبين متسلسلة لا نهائية تمثل النسبة التقريبية ط .

كما يساعدنا هذا العدد فى إيجاد متسلسلات لا نهائية لتمثيل جيب وجيب تمام أى زاوية . وهذا يبسط عمل جداول دقيقة للنسب المثلثية التى تستعمل فى علم الفلك والمساحة وفى الملاحة .

استعمال العدد التخيلى

إن الإنسان ليدهش فى البداية عند معرفته بعلاقة العدد هـ الوثيقة بحساب المثلثات . والواقع أن هذه العلاقة تثير أعظم الاهتمام . وقد بدأ نابير ، أثناء قيامه بعمل جداول لوغاريتمات الجيوب ، فى البحث عن كيفية تغيير نصف الوتر (أنظر شكل ١٢٩) عندما يتحرك عمودياً على قطر دائرة حركة تناظر انتقال طرفيه فترات متساوية على محيط الدائرة . إذا كان نصف قطر الدائرة يساوى الوحدة (ص ٣٨٥) فإن نصف الوتر يساوى جيب الزاوية التى يقابلها القوس . وكان المطلوب عملياً هو إيجاد كميات لها علاقة بنصف الوتر ويكون جمعها مناظرا لإيجاد حاصل ضرب الجيوب . وبلغة الرياضة الحديثة يكون المطلوب هو حساب لوغاريتمات الجيوب للأساس $\text{هـ}^{-١} = (٠٫٣٦٨)$. ولم تكن السلسلة الأسية التى أعطيناها فيما سبق معروفة لنابير ، ولم يتضح السبب فى العلاقة بين هـ وبين سلوك الجيوب إلا بعد اكتشاف دى موافر لأول استعمال ذى أهمية حقيقية للمقدار التخيلى ت .

فى نحو منتصف القرن السادس عشر كانت حركة الاصلاح تتمكن فى فرنسا كما كانت الاشتراكية تتمكن فى ألمانيا والنمسا فى السنوات الأخيرة من القرن التاسع عشر والسنوات الأولى من القرن العشرين . ثم أتى بعد ذلك عهد أرهاب سانت بارثلوميو فى أغسطس سنة ١٥٧٢ . ووصل رد فعل المفكرين إلى أوجه كما يحدث فى ألمانيا والنمسا اليوم وحتى الأفراد الذين لم يظهروا ولاءهم للنظام القديم مثل ديكارت ، لجأوا إلى هولندا وانجلترا ومستعمراتها . وعلى ذلك فقد زادت ثروة الحياة الفكرية للديموقراطيات البروتستانتينية الناشئة وذلك بامتصاصها زهرة المفكرين الفرنسيين فى القرن السابع عشر . وربما تكون روسيا السوفيتية ستزيد من ثروتها بنفس الطريقة على حساب النظام الاجتماعى المتداعى . وبدون شك لم تكن انجلترا وهولندا أومستعمراتها الأمريكية بلاداً مثالية للحياة . والشيء المهم هو أن النظام الاجتماعى الجديد كان قادراً على جلب الفرص للأعمال الفكرية الممتازة وعلى استعمالها . ويماثل ذلك تماما استطاعة روسيا استيعاب الفنون والصناعات الهندسية بينما الدول الرأسمالية تحدد الإنتاج وتقلل من الأموال التى تنفق على الأبحاث إلا إذا ساعدت هذه الأبحاث على هلاك المجموعات البشرية . وكان أبوى دى موافر من بين الذين لجأوا إلى انجلترا واستقروا فيها فى القرن السابع عشر . وينطق الانجليز إسمه نطقاً انجليزياً لا فرنسياً ، ويحق لهم أن يفخروا بأن وطنهم كان فى وقت ما يقود الجنس البشرى نحو المعرفة المشتركة .

اكتشف دى موافر مجالا جديداً من الطرق الحسابية باستعمال الرمز الرياضى ى أو $\sqrt{-1}$ كما استعمل ديوفانتس الرمز « − ١ » من قبل . وكانت النظرية التى تحمل إسمه « نظرية دى موافر » فاتحة باب جديد فى علم الجبر الحديث مثلها فى ذلك مثل قانون الإشارات الذى بدأ عهداً جديداً فى علم الجبر القديم وقواعد استعمال $\sqrt{-1}$ الأساسية مبنية على قانون الإشارات نفسه . فإذا كان

$$ى = \sqrt{-1}$$

$$\text{فإن } ى^{2} = \left(\sqrt{-1}\right)^{2} = -1$$

$$ى^{3} = \left(\sqrt{-1}\right)^{2} \times ى = -ى$$

$$ى^{4} = \left(\sqrt{-1}\right)^{3} \times ى = -ى$$

$$ى^{5} = \left(\sqrt{-1}\right)^{4} \times ى =$$

وهكذا

ى ... ى ... ى^{3} ... ى^{6} ... ى^{7} ... ى^{8} ... ى

$+$ ى $-$ ١ ... $-$ ى $+$ ١ $+$ ى ... $-$ ١ $-$ ى $+$ ١ $+$ ى

... الحدين لعمر الخيام فى أنها قاعدة ... المؤثر الموجود فى الركن العلوى

... وتسمى نظرية دى موافر نظرية ذات ... كمية معينة إلى أس معين يرمز له ... النظرية هى

... (... ى حا ا)^{ن} ... حتا ن ا ... ى حا ن ا

... ويستحسن ألا يشغل القارئ نفسه فى الوقت الحاضر بمعنى هذا القانون . ... عبارة تبين اتفاقها مع قواعد أخرى . أو ... معينة فى الرياضة هو ... أن هذا القانون يتفق مع ما ... الطبيعية والقوى ... الباب السادس

... ص ٢٥١ وهو

$$\text{حتا}^{2}\,\text{ا} + \text{حا}^{2}\,\text{ا} = 1$$

$$\text{أو حا}^{2}\,\text{ا} = 1 - \text{حتا}^{2}\,\text{ا}$$

... الأمثلة ... ذلك ثم اجر ... ضرب العدد ... القول ... (حتا ا ... ى حا ا)^{2}

نجد أن

$$\begin{array}{l} \text{حتا ا} + \text{ى حا ا} \\ \text{حتا ا} + \text{ى حا ا} \\ \hline \text{حتا}^{2}\,\text{ا} + \text{ى حتا ا حا ا} \\ \quad + \text{ى حتا ا حا ا} + \text{ى}^{2}\,\text{حا}^{2}\,\text{ا} \\ \hline \text{حتا}^{2}\,\text{ا} + 2\,\text{ى حتا ا حا ا} + \text{ى}^{2}\,\text{حا}^{2}\,\text{ا} \end{array}$$

فى نحو منتصف القرن السادس عشر كانت حركة الاصلاح تتمكن فى فرنسا كما كانت الاشتراكية تتمكن فى ألمانيا والنمسا فى السنوات الأخيرة من القرن التاسع عشر والسنوات الأولى من القرن العشرين. ثم أتى بعد ذلك عهد أرهاب سانت بارثلوميو فى أغسطس سنة ١٥٧٢. ووصل رد فعل المفكرين إلى أوجه كما يحدث فى ألمانيا والنمسا اليوم وحتى الأفراد الذين لم يظهروا ولاءهم للنظام القديم مثل ديكارت، لجأوا إلى هولندا وانجلترا ومستعمراتها. وعلى ذلك فقد زادت ثروة الحياة الفكرية للديموقراطيات البروتستانتينية الناشئة وذلك بامتصاصها زهرة المفكرين الفرنسيين فى القرن السابع عشر. وربما تكون روسيا السوفيتية ستزيد من ثروتها بنفس الطريقة على حساب النظام الاجتماعى المتداعى. وبدون شك لم تكن انجلترا وهولندا أو مستعمراتها الأمريكية بلاداً مثالية للحياة. والشىء المهم هو أن النظام الاجتماعى الجديد كان قادراً على جلب الفرص للأعمال الفكرية الممتازة وعلى استعمالها. ويماثل ذلك تماما استطاعة روسيا استيعاب الفنون والصناعات الهندسية بينما الدول الرأسمالية تحدد الإنتاج وتقلل من الأموال التى تنفق على الأبحاث إلا إذا ساعدت هذه الأبحاث على هلاك المجموعات البشرية. وكان أبوى دى موافر من بين الذين لجأوا إلى انجلترا واستقروا فيها فى القرن السابع عشر. وينطق الانجليز إسمه نطقاً انجليزياً لا فرنسياً، ويحق لهم أن يفخروا بأن وطنهم كان فى وقت ما يقود الجنس البشرى نحو المعرفة المشتركة.

اكتشف دى موافر مجالا جديداً من الطرق الحسابية باستعمال الرمز الرياضى ى أو $\sqrt{-1}$ كما استعمل ديوفانتس الرمز « − ا » من قبل. وكانت النظرية التى تحمل إسمه « نظرية دى موافر » فاتحة باب جديد فى علم الجبر الحديث مثلها فى ذلك مثل قانون الإشارات الذى بدأ عهداً جديداً فى علم الجبر القديم وقواعد استعمال $\sqrt{-1}$ الأساسية مبنية على قانون الإشارات نفسه. فإذا كان

ى = $\sqrt{1 - }$

فإن ى^{2} = $(\sqrt{1 - })^{2}$ = − ١

ى^{3} = $(\sqrt{1 - })^{2}$ × ى = − ى

ى^{4} = $(\sqrt{1 - })^{3}$ × ى = − ى^{2} = + ١

ى^{5} = $(\sqrt{1 - })^{4}$ × ى = + ى

وهكذا.

ى ، ى^{2} ، ى^{3} ، ى^{4} ، ى^{5} ، ى^{6} ، ى^{7} ، ى^{8} ، ى^{9} ....

+ ى ، − ١ ، − ى ، + ١ ، + ى ، − ١ ، − ى ، + ١ ، + ى ....

وتشبه نظرية دى موافر نظرية ذات الحدين لعمر الخيام فى أنها قاعدة لرفع كمية معينة إلى أس معين يرمز له بالمؤثر ن الموجود فى الركن العلوى الأيسر من القوسين. وهذه النظرية هى

(حتا ا + ى حا ا)^{ن} = حتا ن ا + ى حا ن ا

ويستحسن ألا يشغل القارئ نفسه فى الوقت الحاضر بمعنى هذا القانون. ومعنى قاعدة معينة فى الرياضة هو إما عبارة تبين اتفاقها مع قواعد أخرى، أو عبارة تبين كيفية استعمالها. فأولا اقنع نفسك بأن هذا القانون يتفق مع ما تعلمه عن الجيوب، جيوب التمام، الكميات السالبة، الجذور التربيعية والقوى. ومن الضرورى للقارئ أن يتذكر التوضيح الذى أعطيناه فى الباب السادس ص ٢٥١ وهو

حتا^{2} ا + حا^{2} ا = ١

أو حا^{2} ا = ١ − حتا^{2} ا.

لاحظ ذلك ثم أجر عملية الضرب العادية للمقدار (حتا ا + ى حا ا)^{2}

نجد أن

حتا ا + ى حا ا

حتا ا + ى حا ا

حتا^{2} ا + ى حتا ا حا ا

\+ ى حتا ا حا ا + ى^{2} حا^{2} ا

حتا^{2} ا + ٢ ى حتا ا حا ا + ى^{2} حا^{2} ا

ولكننا نعلم أن :

$$\text{جا } ٢\text{ ا} = \text{جا }(\text{ا} + \text{ا})$$

$$= ٢\text{ جا ا جتا ا} \quad (\text{ص } ٢٥١)$$

$$\therefore ٢\text{ ى جا ا جتا ا} = \text{ى جا } ٢\text{ ا}$$

يمكن بعد ذلك كتابة النتيجة على الصورة

$$\text{جتا}^{٢}\text{ ا} + \text{ى جا } ٢\text{ ا} + \text{ى}^{٢}\text{ جا}^{٢}\text{ ا}$$

وحيث أن $\text{ى} = \sqrt{-١}$ ، يمكن كتابة هذا

$$\text{جتا}^{٢}\text{ ا} - \text{جا}^{٢}\text{ ا} + \text{ى جا } ٢\text{ ا}$$

ولكننا نعلم أن :

$$\text{جتا } ٢\text{ ا} = \text{جتا }(\text{ا} + \text{ا})$$

وعلى ذلك يكون

$$(\text{جتا ا} + \text{ى جا ا})^{٢} = \text{جتا } ٢\text{ ا} + \text{ى جا } ٢\text{ ا}$$

أى أن النظرية صحيحة عندما $\text{ن} = ٢$ وبإجراء عملية الضرب نجد أن

$$(\text{جتا ا} + \text{ى جا ا})^{٣} = \text{جتا}^{٣}\text{ ا} + ٣\text{ى جا ا جتا}^{٢}\text{ ا} + ٣\text{ ى}^{٢}\text{ جا}^{٢}\text{ ا جتا ا} + \text{ى}^{٣}\text{ جا}^{٣}\text{ ا} .$$

$$= \text{جتا}^{٣}\text{ ا} + ٣\text{ ى جا ا جتا}^{٢}\text{ ا} - ٣\text{ جا}^{٢}\text{ ا جتا ا} - \text{ى جا}^{٣}\text{ ا}$$

وباستعمال القاعدة الموجودة على ص ٢٥٠ نجد أن :

$$\text{جتا } ٣\text{ ا} = \text{جتا }(٢\text{ ا} + \text{ا})$$

$$= \text{جتا } ٢\text{ ا جتا ا} - \text{جا } ٢\text{ ا جا ا}$$

$$= \text{جتا ا }(\text{جتا}^{٢}\text{ ا} - \text{جا}^{٢}\text{ ا}) - \text{جا ا }(٢\text{ جا ا جتا ا})$$

$$= \text{جتا}^{٣}\text{ ا} - ٣\text{ جا}^{٢}\text{ ا جتا ا}$$

وبالمثل

$$\text{جا } ٣\text{ ا} = \text{جا }(٢\text{ ا} + \text{ا})$$

$$= \text{جا } ٢\text{ ا جتا ا} + \text{جتا } ٢\text{ ا جا ا}$$

$$= \text{جا ا }(\text{جتا}^{٢}\text{ ا} - \text{جا}^{٢}\text{ ا}) + \text{جتا ا }(٢\text{ جا ا جتا ا})$$

$$= ٣\text{ جتا}^{٢}\text{ ا جا ا} - \text{جا}^{٣}\text{ ا}$$

وعلى ذلك يمكننا أن نكتب

$$(\text{جتا ا} + \text{ى جا ا})^{٣} = \text{جتا}^{٣}\text{ ا} + ٣\text{ ى جا ا جتا}^{٢}\text{ ا} - ٣\text{ جا}^{٢}\text{ ا جتا ا} - \text{ى جا}^{٣}\text{ ا}$$

$$= (\text{جتا}^{٣}\text{ ا} - ٣\text{ جا}^{٢}\text{ ا جتا ا}) + \text{ى }(٣\text{ جتا}^{٢}\text{ ا جا ا} - \text{جا}^{٣}\text{ ا})$$

$$= \text{جتا } ٣\text{ ا} + \text{ى جا } ٣\text{ ا}$$

أى أن النظرية صحيحة عندما $\text{ن} = ٣$. وبنفس الطريقة نصل إلى النتيجتين

$$(\text{جتا ا} + \text{ى جا ا})^{٤} = \text{جتا } ٤\text{ ا} + \text{ى جا } ٤\text{ ا}$$

$$(\text{جتا ا} + \text{ى جا ا})^{٥} = \text{جتا } ٥\text{ ا} + \text{ى جا } ٥\text{ ا}$$

وهذه القاعدة ، التى تسمى نظرية دى موافر : تكون صحيحة أيضا للقوى الكسرية والسالبة إذ أن :

$$(\text{جتا ا} + \text{ى جا ا})^{-\text{ن}} = \frac{١}{\text{جتا ن ا} + \text{ى جا ن ا}}$$

$$= \frac{١}{\text{جتا ن ا} + \text{ى جا ن ا}} \times \frac{\text{جتا ن ا} - \text{ى جا ن ا}}{\text{جتا ن ا} - \text{ى جا ن ا}}$$

ولكننا نعلم أن :

$$(\text{ا} + \text{ب})(\text{ا} - \text{ب}) = \text{ا}^{٢} - \text{ب}^{٢}$$

$$\therefore (\text{جتا ن ا} + \text{ى جا ن ا})(\text{جتا ن ا} - \text{ى جا ن ا}) = \text{جتا}^{٢}\text{ ن ا} - \text{ى}^{٢}\text{ جا}^{٢}\text{ ن ا}$$

$$= \text{جتا}^{٢}\text{ ن ا} + \text{جا}^{٢}\text{ ن ا}$$

$$= ١$$

$$\therefore \frac{\text{جتا ن ا} - \text{ى جا ن ا}}{(\text{جتا ن ا} + \text{ى جا ن ا})(\text{جتا ن ا} - \text{ى جا ن ا})} = \text{جتا ن ا} - \text{ى جا ن ا}$$

وفى حالة القوى الكسرية ، نفرض أن $\text{ا} = \frac{\text{ب}}{\text{ن}}$ (ن عدد صحيح)

فيكون

$$\left(\text{حتا}\,\frac{\text{ب}}{\text{ن}} + \text{ى حا}\,\frac{\text{ب}}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}} = \text{حتا ن}\,\frac{\text{ب}}{\text{ن}} + \text{ب حا}\,\frac{\text{ب ن}}{\text{ن}}$$

$$= \text{حتا ب} + \text{ى حا ب}$$

ويجب أن نكون حريصين هنا لأن :

$$\left(\text{حتا}\,\frac{\text{ب} + \text{٢ط}}{\text{ن}} + \text{ى حا}\,\frac{\text{ب} + \text{٢ط}}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}} = \text{حتا}\,(\text{ب} + \text{٢ ط}) + \text{ى حا}\,(\text{ب} + \text{٢ ط})$$

$$= \text{حتا ب} + \text{ى حا ب}$$

ويمكن للقارئ أن يتحقق بسهولة من أن

$$\text{حتا}\,\frac{\text{ب}}{\text{ن}} + \text{ى حا}\,\frac{\text{ب}}{\text{ن}} \text{ لا تساوى } \text{حتا}\,\frac{\text{ب} + \text{٢ ط}}{\text{ن}} + \text{ى حا}\,\frac{\text{ب} + \text{٢ط}}{\text{ن}}$$

وعلى ذلك نكتفى بأن نقول أن إحدى قيم المقدار $\sqrt[\text{ن}]{\text{حتا ب} + \text{ى حا ب}}$

هى $\text{حتا}\,\frac{\text{ب}}{\text{ن}} + \text{ى حا}\,\frac{\text{ب}}{\text{ن}}$

وإذا كانت ن عدداً صحيحاً فإنه توجد (ن — ١) قيمة أخرى

$$\text{حتا}\,\frac{\text{ب} + \text{٢ ر ط}}{\text{ن}} + \text{ى حا}\,\frac{\text{ب} + \text{٢ ر ط}}{\text{ن}}$$

حيث

$$\text{ر} = \text{١ ، ٢ ، ٣ . . إلى ن} - \text{١}$$

لقد تساءل الطفل الذى يعيش على الإحسان فى إحدى روايات ديكنز ، بعد أن انتهى من حفظ الحروف الأبجدية ما إذا كان من الحكمة تجشم كل هذا التعب للحصول على هذه المكافأة البسيطة . وربما طرأ نفس السؤال على ذهن القارئ . ولذلك سنبدأ الآن فى توضيح كيف نستفيد من نظرية دى موافر فى اختصار المجهود اللازم لعمل جدول نسب مثلثية . ويستحسن لهذا الغرض أن نقتفى أثر خطواتنا السابقة . لقد وجدنا أن

$$\text{حتا ٣ا} = \text{حتا}^{\text{٣}}\,\text{ا} - \text{٣ حتا ا حا}^{\text{٢}}\,\text{ا}$$

ويمكن كتابة ذلك

$$\text{حتا ٣ا} = \text{حتا}^{\text{٣}}\,\text{ا} - \text{٣ حتا ا}\,(\text{١} - \text{حتا}^{\text{٢}}\,\text{ا})$$

$$= \text{حتا}^{\text{٣}}\,\text{ا} - \text{٣ حتا ا} + \text{٣ حتا}^{\text{٣}}\,\text{ا}$$

$$= \text{٤ حتا}^{\text{٣}}\,\text{ا} - \text{٣ حتا ا}$$

وطبعا يمكننا الحصول على هذه النتيجة ، التى استعملت فى إثبات نظرية دى موافر ، باستعمال هذه النظرية . إذا كان

$$\text{س} = \text{حتا ا} + \text{ى حا ا}$$

$$\text{س}^{-\text{١}} = (\text{حتا ا} + \text{ى حا ا})^{-\text{١}}$$

$$\therefore \frac{\text{١}}{\text{س}} = \text{حتا ا} - \text{ى حا ا}$$

$$\therefore \text{س} + \frac{\text{١}}{\text{س}} = \text{٢ حتا ا}$$

$$\text{٢ ى حا ا} = \text{س} - \frac{\text{١}}{\text{س}} \text{ ،}$$

بالمثل يمكننا أن نكتب

$$\text{س}^{\text{ن}} = \text{حتا ن ا} + \text{ى حا ن ا}$$

$$\frac{\text{١}}{\text{س}^{\text{ن}}} = \text{حتا ن ا} - \text{ى حا ن ا}$$

$$\therefore \text{س}^{\text{ن}} + \frac{\text{١}}{\text{س}^{\text{ن}}} = \text{٢ حتا ن ا}$$

و $\text{س}^{ن} - \frac{١}{\text{س}^{ن}} = ٢ \text{ى جا } ن \text{ ا}$

أى أنه إذا كان

$$\text{س} + \frac{١}{\text{س}} = ٢ \text{ جتا ا}$$

فإن

$$\text{س}^{ن} + \frac{١}{\text{س}^{ن}} = ٢ \text{ جتا } ن \text{ ا}$$

فإذا أردنا قيمة جتا ٣ ا بدلالة جتا ا ، نضع

$$٢ \text{ جتا ٣ ا} = \text{س}^{٣} + \frac{١}{\text{س}^{٣}}$$

$$\therefore ٢ \text{ جتا ا} = \text{س} + \frac{١}{\text{س}}$$

$$\therefore (٢ \text{ جتا ا})^{٣} = (\text{س} + \frac{١}{\text{س}})^{٣}$$

$$\therefore ٨ \text{ جتا}^{٣} \text{ ا} = \text{س}^{٣} + ٣ \text{س}^{٢} \times \frac{١}{\text{س}} + ٣ \text{س} \times \frac{١}{\text{س}^{٢}} + \frac{١}{\text{س}^{٣}}$$

$$= (\text{س}^{٣} + \frac{١}{\text{س}^{٣}}) + ٣ (\text{س} + \frac{١}{\text{س}})$$

$$= ٢ \text{ جتا ٣ ا} + ٦ \text{ جتا ا}$$

$$\therefore ٤ \text{ جتا}^{٢} \text{ ا} = \text{جتا ٣ ا} + ٣ \text{ جتا ا}$$

أو $\text{جتا ٣ ا} = ٤ \text{ جتا}^{٣} \text{ ا} - ٣ \text{ جتا ا}$

وهى نفس النتيجة التى استعملت من قبل . ولكى يقتنع القارىء بأمكان استعمال الكميات التخيلية فى الحسابات ، نكتب

$$(٢ \text{ جتا ا})^{٦} = (\text{س} + \frac{١}{\text{س}})^{٦}$$

$$٦٤ \text{ جتا}^{٦} \text{ ا} = \text{س}^{٦} + ٦ \text{س}^{٥} \times \frac{١}{\text{س}} + ١٥ \text{س}^{٤} \times \frac{١}{\text{س}^{٢}} + ٢٠ \text{س}^{٣} \times$$

$$\frac{١}{\text{س}^{٣}} + ١٥ \text{س}^{٢} \times \frac{١}{\text{س}^{٤}} + ٦ \text{س} \times \frac{١}{\text{س}^{٥}} + \frac{١}{\text{س}^{٦}}$$

$$= (\text{س}^{٦} + \frac{١}{\text{س}^{٦}}) + ٦ (\text{س}^{٤} + \frac{١}{\text{س}^{٤}})$$

$$+ ١٥ (\text{س}^{٢} + \frac{١}{\text{س}^{٢}}) + ٢٠$$

$$= ٢ \text{ جتا ٦ ا} + ١٢ \text{ جتا ٤ ا} + ٣٠ \text{ جتا ٢ ا} + ٢٠$$

$$\text{جتا ٦ ا} = ٣٢ \text{ جتا}^{٦} \text{ ا} - ٦ \text{ جتا ٤ ا} - ١٥ \text{ جتا ٢ ا} - ١٠$$

ويمكن للقارىء اختبار صحة هذه النتيجة باستعمال قيمتين معلومتين للمقدار جتا ا وهما (ا) $\text{جتا } ٩٠ = ٠$ (ب) $\text{جتا } ٦٠^{\circ} = \frac{١}{٢}$.

(ا) $\text{جتا } ٥٤٠^{\circ} = ٣٢ \text{ جتا}^{٦} ٩٠^{\circ} - ٦ \text{ جتا } ٣٦٠^{\circ} - ١٥ \text{ جتا } ١٨٠^{\circ} - ١٠$

$$\therefore \text{جتا } (١٨٠ + ٣٦٠) = ٠ - ٦ - ١٥ (-١) - ١٠$$

$$\therefore \text{جتا } ١٨٠ = -١$$

(ث) $\text{جتا } ٣٦٠ = ٣٢ \text{ جتا}^{٦} ٦٠^{\circ} - ٦ \text{ جتا } ٢٤٠^{\circ} - ١٥ \text{ جتا } ١٢٠^{\circ} - ١٠$

$$= ٣٢ \text{ جتا}^{٦} ٦٠^{\circ} - ٦ \text{ جتا } (١٨٠ + ٦٠)^{\circ}$$

$$- ١٥ \text{ جتا } (١٨٠ - ٦٠)^{\circ} - ١٠$$

$$= ٣٢ \times (\frac{١}{٦٤}) - ٦ \times (\frac{١}{٢}) + ١٥ \times (\frac{١}{٢}) - ١٠$$

$$= ١$$

وحيث أن لدينا الآن من الأسباب ما يجعلنا نأمل فى إمكان اختبار العمليات الحسابية التى تحتوى على $\sqrt{-١}$ أو ى عدديا ، سنستعمل هذا العدد التخيلى

للحصول على المتسلسلتين المستعملتين فى إيجاد قيمة جيب وجيب تمام أية زاوية بأية درجة مطلوبة من الدقة . لقد رأينا كيف أن دراسة حساب المثلثات التى نشأت عن الحاجة للجداول الملاحية ، أثارت البحث عن طرق حسابية سريعة وكيف أن اكتشاف اللوغاريتمات قادنا إلى دراسة المتسلسلات اللانهائية مثل المتسلسلة الأسية مثلا . وقد توجت الاكتشافات التى تلت الملاحات الكبرى باكتشاف ارتباط بسيط بين السلسلة الأسية ونظرية دى موافر .

وكانت نتيجة هذا الاكتشاف تبسيطاً جديداً فى المجهود الذى يبذل فى عمل جداول النسب المثلثية ، تلك الجداول التى بنيت على الهندسة الأغريقية والتى كانت تستعمل فى تعيين مواضع السفن وفى انشاء الخرائط . وتتضح العلاقة بين نظرية دى موافر والمتسلسلة الأسية كما يأتى : ضع

$$س = \text{حتا}\,١ + ى\,\text{حا}\,١$$

وهو نفس ما نحصل عليه إذا وضعنا ا = ١ فى نظرية دى موافر . وإذا كتبنا ا بدلا من ن لتدل على أى عدد ، فإن

$$س^{ا} = \text{حتا}\,ا + ى\,\text{حا}\,ا \qquad (١)$$

$$س^{-ا} = \text{حتا}\,ا - ى\,\text{حا}\,ا$$

وكما سبق يمكننا أن نكتب

$$س^{ا} - س^{-ا} = ٢ى\,\text{حا}\,ا$$

ويمكننا أيضا أن نضع س على هيئة إحدى قوى هـ مثل

$$س = هـ^{ص}$$

$$\text{أو} \quad ص = \text{لو}_{هـ}\,س \qquad (٢)$$

باستعمال المتسلسلة الأسية نجد أن

$$س^{ا} = هـ^{اص} = ١ + اص + \frac{ا^{٢}ص^{٢}}{٢!} + \frac{ا^{٣}ص^{٣}}{٣!} + \frac{ا^{٤}ص^{٤}}{٤!} + \dots$$

$$س^{-ا} = هـ^{-اص} = ١ - اص + \frac{ا^{٢}ص^{٢}}{٢!} - \frac{ا^{٣}ص^{٣}}{٣!} + \frac{ا^{٤}ص^{٤}}{٤!} + \dots$$

وبطرح السفلى من العليا نجد أن :

$$س^{ا} - س^{-ا} = ٢اص + ٢\frac{ا^{٣}ص^{٣}}{٣!} + ٢\frac{ا^{٥}ص^{٥}}{٥!} + ٢\frac{ا^{٧}ص^{٧}}{٧!} \dots$$

أو

$$٢ى\,\text{حا}\,ا = ٢اص + ٢\frac{ص^{٣}ا^{٣}}{٣!} + ٢\frac{ص^{٥}ا^{٥}}{٥!} + \dots$$

$$\therefore ى\frac{\text{حا}\,ا}{ا} = ص + \frac{ص^{٣}ا^{٢}}{٣!} + \frac{ص^{٥}ا^{٤}}{٥!} + \frac{ص^{٧}ا^{٦}}{٧!} \dots \qquad (٣)$$

وحيث أن ا زاوية اختيارية ، فإن هذه المعادلة تبقى صحيحة عندما تكون ا صغيرة بحيث يمكن اهمال أى حد تكون ا إحدى عوامله ، أى أن

$$ص + \frac{ص^{٣}ا^{٢}}{٣!} + \frac{ص^{٥}ا^{٤}}{٥!} + \frac{ص^{٧}ا^{٦}}{٧!} \dots = ص$$

ولكننا نعلم أنه إذا دلت ا على نصف القطر (أنظر الباب السادس ص ٢٦٠) وكانت ا صغيرة جداً فإن

$$\frac{\text{حا}\,ا}{ا} = ١$$

$$\therefore ى\frac{\text{حا}\,ا}{ا} = ى$$

فيكون :

$$ى = ص$$

$$\therefore س = هـ^{ى}$$

$$\therefore \text{س}^{\text{ا}} = \text{هـ}^{\text{ا ى}}$$

وبوضع قيمة س ا فى (١) نجد أن

$$\text{هـ}^{\text{ى ا}} = \text{حتا ا} + \text{ى حا ا} \quad ،$$

بشرط أن تكون ا مقيسة بالتقدير الدائرى .

وحيث أن ى٢ = −١ ، ى٣ = − ى ، ى٤ = +١ .... الخ ، فإن

$$\text{هـ}^{\text{ى ا}} = ١ + \text{ى ا} - \frac{\text{ا}^{٢}}{١٢} - \frac{\text{ى ا}^{٣}}{١٣} + \frac{\text{ا}^{٤}}{١٤} + \frac{\text{ى ا}^{٥}}{١٥} - \frac{\text{ا}^{٦}}{١٦} \ldots\ldots$$

$$\therefore \text{حتا ا} + \text{ى حا ا} = \left(١ - \frac{\text{ا}^{٢}}{١٢} + \frac{\text{ا}^{٤}}{١٤} - \frac{\text{ا}^{٦}}{١٦} \ldots\ldots \right)$$

$$+ \text{ى} \left(١ - \frac{\text{ا}^{٣}}{١٣} + \frac{\text{ا}^{٥}}{١٥} - \ldots\ldots \right)$$

ونرجو ألا يرتكب القارئ الآن نفس الخطأ الذى يرتكبه الذين يرتكبون الناس بالأرقام القياسية للأسعار التى تختلط فيها جميع أنواع الكميات دون تمييز . والنتيجة النهائية لمجهودهم هذا هى حيرة تصور بحق النظام الذى هم مأجورين للدفاع عنه . وقبل أن نخطو الخطوة الثانية ، يجب أن نتذكر أن الرياضيين لايخلطوا الأعداد التى تدل على شىء معين بالأعداد التى تدل على شىء آخر مختلف عنه . إن الرجل الذى لم يذهب إلى الكنيسة بعد أن ترك الفندق (ص٣٩٩) قد علمنا أن الكميات التى يوجد الحرف ى بجانبها لا تمثل نفس النوع من المقاييس مثل التى تمثلها الكميات التى لا يوجد هذا الرمز بجانبها وهذه الكميات تمثل فى الهندسة المعدلة مقاييس فى اتجاه مختلف . فكما نقول أنه إذا كان :

ا تفاحة و ب برتقالة = ٣٠ تفاحة وبرتقالتين

فإن

$$\text{ا} = ٣٠$$

$$\text{ب} = ٢$$

يتحتم علينا أن نقول أنه إذا كان

$$\text{حتا ا} + \text{ى حا ا} = \text{م} + \text{ى ك}$$

فإن

$$\text{م} = \text{حتا ا}$$

$$\text{ك} = \text{حا ا}$$

بالمثل فى المعادلة

$$\text{حتا ا} + \text{ى حا ا} = \left(١ - \frac{\text{ا}^{٢}}{١٢} + \frac{\text{ا}^{٤}}{١٤} \ldots \right)$$

$$+ \text{ى} \left(١ - \frac{\text{ا}^{٣}}{١٣} + \frac{\text{ا}^{٥}}{١٥} - \ldots \right)$$

فإن

$$\text{حتا ا} = ١ - \frac{\text{ا}^{٢}}{١٢} + \frac{\text{ا}^{٤}}{١٤} - \frac{\text{ا}^{٦}}{١٦} + \frac{\text{ا}^{٨}}{١٨} \ldots$$

$$،\ \text{حا ا} = \text{ا} - \frac{\text{ا}^{٣}}{١٣} + \frac{\text{ا}^{٥}}{١٥} - \frac{\text{ا}^{٧}}{١٧} \ldots\ldots$$

بشرط أن تكون ا مقيسة بالتقدير الدائرى .

وهذا يعنى أن من الممكن حساب قيمة جيب أو جيب تمام الزوايا ١ ، ٥ر، ، ا و زاوية دائرية مباشرة بالتعويض عن ا بالمقادير ١ ، ٥ر ، ١ر٠٠٠ فى المتسلسلتين اللانهائيتين السابقتين . ويلاحظ القارئ أن هاتين المتسلسلتين تتقاربان بسرعة إذا كانت ا أقل من الوحدة . ولكى يثق القارئ بهذ

النتيجة نعود به إلى الباب السادس ص ٢٢٢ . حصلنا باستعمال هندسة إقليدس على القيم

$$\text{حتا } ١٥^\circ = ٩٦٦,$$
$$\text{حا } ١٥^\circ = ٢٥٩,$$

لكى نتمكن من استعمال المتسلسلات التى وجدناها يلزمنا إيجاد قيمة ١٥° بالتقدير الدائرى

$$١٥^\circ = \frac{١}{٦} \times ٩٠^\circ = \frac{١}{٦} \times \frac{\text{ط}}{٢} \text{ دائرية}$$

وإذا أخذنا ط = ٣,١٤١٦ فإن ١٥° = ٠,٢٦١٨ دائرية .

بوضع ا = ٠,٢٦١٨ يكون

$$\text{ا}^٢ = ٠,٠٦٨٥$$
$$\text{ا}^٣ = ٠,٠١٧٩$$
$$\text{ا}^٤ = ٠,٠٠٥$$
... الخ

ويكون

$$\text{حتا } ١٥^\circ = ١ - \frac{٠,٠٦٨٥}{٢} + \frac{٠,٠٠٥}{٢٤} \ldots$$

$$\text{، حا } ١٥^\circ = ٠,٢٦١٨ - \frac{٠,٠١٧٩}{٦} \ldots$$

وتتقارب هذه المتسلسلات بسرعة عظيمة لدرجة أنه لا يلزمنا إلا الحدين الأول والثانى لنحصل على النتيجة

$$\text{حتا } ١٥^\circ = ٩٦٦,$$
$$\text{حا } ١٥^\circ = ٢٥٩,$$

يرى القارىء الآن أن العدد التخيلى ى ليس إلا شىء من ابتداع الخيال بمساعدته يمكننا عمل جداول تستخدم فى إيجاد خطوط عرض وطول البواخر وتظهر المعادلة .

$$\text{هـ}^{\text{ى ا}} = \text{حتا ا} + \text{ى حا ا}$$

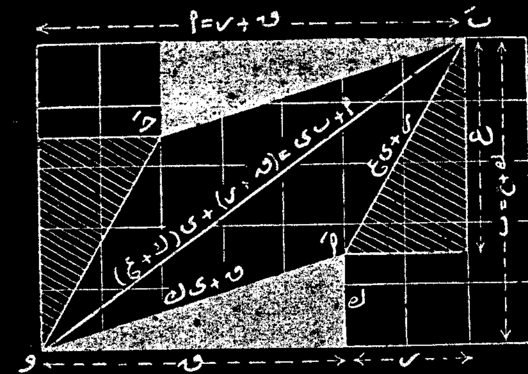
التى تحتوى على هذا العدد التخيلى فى حسابات التيار المنقطع الذى هو أساس الإضاءة والطاقة الحديثة .

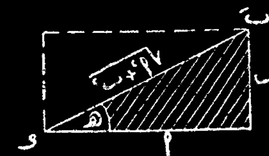
منذ عهد ى موافر ظهر فرع جديد من فروع الرياضة هو التحليل الرياضى للمتجهات . وقد تكون هذا الفرع على الخصوص لعلاقته بالظواهر الكهربائية التى اكتشفها لأول مرة فاراداى فى أوائل القرن التاسع عشر . « المتجه » هو كمية لها اتجاه معين من نقطة ثابتة فضلا عن بعد معين من هذه النقطة . يمكن تمثيل درجات الحرارة والقوى والجذب المغناطيسى والكهرباء وما شابهها بأبعاد . بالمثل يمكن تمثيل كل من الحرارة والقوة التى تعمل على إزاحة جسم فى إتجاه معين والمجال المغناطيسى والكهربائى بمتجه . وقد يوضح استعمال المتجهات ضربا له أهميته الكبرى فى تاريخ الرياضة . إن الزمن الطويل الذى مضى على إبتكار قواعد الهندسة والجبر يجعلنا معرضين أن ننسى أنها قد ابتكرت لتناول البحث فى مسائل حقيقية فى الحياة الاجتماعية والعملية . وجبر المتجهات لم يبتدع إلا ليسد حاجة الحياة الاجتماعية إلى قياس ظواهر جديدة ولذا يصعب إخفاء أن المتجهات ماهى إلا اصطلاحات نحوية تستعمل الحاجات الجنس الانسانى المنظم إجتماعياً .

فى الباب الأول إستعملنا جهازاً صغيراً مكوناً من خزان ومكبس أوتوماتيكى لنوضح أن قاعدة الجمع العادية لا تسرى دائماً فى الحياة الحقيقية . فى الشكل الموجود على ص٢٩ ، لا تساعدنا قواعد الحساب البسيط على معرفة ما يحويه الخزان إذا أضيفت كمية معلومة من الماء إلى ما فيه فعلا . ولو نستمر على استعمال الإشارة + للدلالة على الإضافة فى الحياة الواقعية ، سيلزم إيجاد قوانين جديدة مختلفة مثل

$$٢ + ٢ = ٢ \quad ، \quad ٣ + ١ = ٢$$

لقد أسست قواعد جمع ، طرح وضرب المتجهات بحيث تتفق مع كيفية تفاعل القوى الميكانيكية . وحيث أن السبب المباشر لنشأة هذا الفرع من الرياضة هو علاقته بالمسائل الطبيعية ، لا يمكننا بيان مدى استخدامه بغير الرجوع إلى التوضيحات الفنية . ومع ذلك فإن من الممكن توضيح القواعد الأساسية بطريقة عامة بشرح ما يسمى جمع المتجهات . فى شكل ١٦٥ و اَ متجه يمثل إزاحة معينة من النقطة وفى الاتجاه المبين . و حَ متجه آخر يمثل بعداً مقيساً من نفس النقطة فى اتجاه أقرب إلى الشمال من اتجاه المتجه الأول وإضافة المتجه و اَ إلى المتجه و حَ يعنى إيجاد البعد عن و الاتجاه من النقطة





شكل ١٦٥ — جمع متجهين

الثابتة و إذا أجرينا أولا الإزاحة الممثلة بالمتجه و اَ ثم أجرينا إزاحة ثانية من اَ على اَ بَ تساوى فى المقدار وتتفق فى قراءة البوصلة مع المتجه و حَ ، أو وهو نفس الشىء إزاحة من و إلى حَ متبوعة بإزاحة من حَ إلى بَ تكافئ فى المقدار وقراءة البوصلة المتجه و اَ . ونستعين فى كتابة هذا بالإشارة القديمة رغم أنها تفيد معنى جديداً :

و اَ + و حَ = و بَ

والمتجه و بَ الذى يمثل نتيجة إضافة سير يوم ممثلا بالمتجه و حَ إلى نزهة مشى بدأت بالمتجه و اَ أو العكس ، يمثل البعد والاتجاه النهائيين من المكان الذى بدأت الحركة منه . ويمكن اعتبار المتجه و بَ ذى القيمة العددية التى تساوى البعد من بَ إلى و والذى اتجاهه يساوى الزاوية التى يصنعها و بَ مع الخط الأصلى أى اتجاه الشرق والغرب ، كنتيجة إضافة سير يوم (عدد معين من وحدات الطول) فى اتجاه الشرق إلى سير يوم (عدد معين آخر من وحدات الطول) فى اتجاه الشمال ، أو العكس . بمساعدة شكل ١٣٣ وجدنا أن حاصل ضرب بعد قدره س وحدة فى ى يكافئ البعد س مقيساً فى اتجاه عمودى على الاتجاه الأول . وتستعمل ى كعلاقة للتفريق بين الوحدات ب المقيسة فى الشمال والوحدات ا المقيسة فى اتجاه الشرق ، وتوضع هذه العلاقة قبل الأولى فنكتب

و بَ = ا + ى ب

وبالمثل إذا كان و اَ يكافئ ك وحدة فى اتجاه الشمال ، ه وحدة فى اتجاه الشرق نكتب

و اَ = ه + ى ك

أيضاً إذا كان و حَ يكافئ ع وحدة فى اتجاه الشمال ، ر وحدة فى اتجاه الشرق

و حَ = ر + ى ع

ويلاحظ القارئ من الشكل العلوى أن

ا = ه + ى

ب = ك + ع

ومن الشكل السفلى أن المسافة الممثلة بالمتجه و بَ تساوى

√(ا^٢ + ب^٢)

وظل الزاوية ى التى تمثل اتجاه المتجه يساوى ب/ا . وإذا علمت قيمة [illegible] ب نستطيع إيجاد قيمة هذه الزاوية باستعمال جداول الظلال . وعلى ذلك تكون

قاعدة جمع المتجهات هى : إذا كنا فى رحلة معينة وغيرنا اتجاهنا يوميا فيمكننا معرفة اتجاهنا النهائى وبعدنا عن نقطة الابتداء إذا أضفنا جميع الازاحات الشمالية إلى جميع الازاحات الشرقية . ولهذا الغرض نستعمل الكمية التخيلية ى كعلامة فقط تحذرنا من الوقوع فى نفس الأشكال الذى يقع فيه رجال الاقتصاد السياسى

لقد عرفنا عملية جمع المتجهات بأنها تناظر عمل واقعى هو سير مسافة معينة فى اتجاه معين ثم مسافة أخرى فى اتجاه معين آخر . ويمكننا أن نتلو هذا التعريف بتعريفات لعمليات أخرى نستعمل فيها الكمية التخيلية ى بنفس الطريقة التى استعملت بها فى نظرية دى موافر . وهذا يؤدى بنا إلى اختصارات كبيرة فى كثير من عمليات القياس الطبيعية . وقد أسست هذه العمليات لتتفق مع نتائج التجارب العملية ، وهى تناسب نوع الظواهر الطبيعية التى أوحت بها فيها أصبح العلم مضبوطا فهو ليس مجموعة من الرموز وتقرر القواعد التى تتبعها هذه الرموز بالعمل الذى يكون موضوع بحث العالم .

تمارين على الباب العاشر

يستحسن ملاحظة التفصيلات الآتية بطريقة استعمال جداول اللوغاريتمات يمكن تمثيل أى عدد كحاصل ضرب عدد واقع بين ١ ، ١٠ والعدد ١٠ مرفوعا إلى قوة معينة . فمثلا يمكن كتابة ٩٨٧٦ ، ٩٫٨٧٦ × ١٠٣ ولكننا نعلم أن لوغاريتم أى عدد واقع بين ١ ، ١٠ هو كمية موجبة أقل من الوحدة وأن لوغاريتم ١٠٣ هو ٣ . وإذن فمن السهل أن نرى أن لوغاريتم أى عدد يتكون من رقم صحيح يمكن كتابته بالنظر وكسر عشرى تكون قيمته هى نفسها لجميع الأعداد التى تشترك فى نفس أرقام العدد ، وبنفس الترتيب مهما اختلف موضع العلامة العشرية فيها .

أى أن :

لو ٩٫٨٧٦ = ٠٫٩٩٤٦

لو ٩٨٫٧٦ = لو ١٠ + لو ٩٫٨٧٦

= ١٫٩٩٤٦

لو ٩٨٧٫٦ = لو ١٠٢ + لو ٩٫٨٧٦

= ٢٫٩٩٤٦

وهكذا

، لو ٠٫٩٨٧٦ = لو ١٠-١ + لو ٩٫٨٧٦

= — ١ + ٠٫٩٩٤٦

لو ٠٫٠٩٨٧٦ = لو ١٠-٢ + لو ٩٫٨٧٦

ويكتب هذان اللوغاريتمان الأخيران كما يأتى :

لو ٠٫٩٨٧٦ = ١̅٫٩٩٤٦

لو ٠٫٠٩٨٧٦ = ٢̅٫٩٩٤٦

وهى طريقة لتسهيل العمليات الحسابية . فمثلا :

لو (١٨٢٫٣ / ٠٫٠٢١) = لو ١٨٢٫٣ — لو ٠٫٠٢١

= ٢٫٢٦٠٨ — (٢̅٫٣٢٢٢)

= ٢ + ٠٫٢٦٠٨ — (— ٢ + ٠٫٣٢٢٢)

= ٤ — ٠٫٠٦١٤

= ٣٫٩٣٨٦

١٨٢٫٣ / ٠٫٠٢١ = ٢٦٨٢ .

ويتكون لوغاريتم أى عدد من جزء عشرى موجب وعدد صحيح قد يكون موجبا أو سالباً يسمى العدد البيانى وطريقة البحث عن لوغاريتم ٩٫٨٧٦ فى الجدول هى كما يأتى : فى أقصى اليمين من الجدول يوجد عمود يحتوى على أعداد يتكون كل منها من رقمين وأول هذه الأعداد هو ١٠ نبحث فى هذا العمود حتى نجد ٩٨ ، وبالنظر فى أعلى الصفحة نجد أعمدة فى أعلاها الأرقام

من ٠ إلى ٩ . نبحث فى الصف الأفقى المار بالعدد ٩٨ حتى تصل إلى العمود الموجود تحت الرقم ٠٧ العدد الموجود فى هذا المكان هو ٩٩٤٣ وهذا هو الجزء العشرى فى لوغاريتم ٩٫٨٧ . ولوجود الرقم الأخير ٦ ننظر فى الجانب الأيسر من الجدول حيث توجد عدة أعمدة توجد فى أعلاها أرقام بين ١ و٩ والأعداد الموجودة فى هذه الأعمدة تدلنا على ما يجب إضافتـــه إلى الجزء العشرى نظراً لوجود الرقم الرابع فى العدد الأصلى. فى الحالة التى نبحثها وجدنا الجزء العشرى للوغاريتم العدد ٩٫٨٧ ونريد أن نعلم ماذا نضيف إليه لنحصل على الجزء العشرى للوغاريتم العـدد ٩٫٨٧٦ . وبالنظر فى أقصى يسار الصف الأفقى المار بالعدد ٩٨ نجد أن العدد الموجود فى العمود الذى أعلاه الرقم ٦ هو ٣ . وعلى ذلك يكون الجزء العشرى المطلوب هو :

٠٫٩٩٤٣ + ٠٫٠٠٠٣ = ٠٫٩٩٤٦

وإذا كان المعلوم هو اللوغاريتم فيمكن الحصول على العدد المقابل له باتباع عكس العملية السابقة . فمثلا يمكننا إيجاد العدد الذى لوغاريتمه ٢٫٦٢٧٦ كما يأتى اعتبر أولا الجزء العشرى ٠٫٦٢٧٦ . يمكننا باستعمال جـــدول لوغاريتمات أو جدول أعداد مقابلة للوغاريتمات أن نرى أن الأرقام المناظرة لهـــذا الجزء العشرى هى ٤٢٤٢ . وحيث أن العدد البيانى ٢ فإن العدد يقع بين ١٠٠ و ١٠٠٠ . وعلى ذلك يكون العدد المطلوب ٤٢٤٫٢ .

(١) أوجد حواصل الضرب الآتية :

~. لا : بامنعمل أئه أذلنه

حا ا حتا ب = ½ حا (ا + ب) + ½ حا (ا − ب)

ثانيا : باستعمال القانون

حتا ا حتا ب = ½ حتا (ا + ب) + ½ حتا (ا − ب)

(ثالثا) باستعمال جداول اللوغاريتمات

(ا) ٢٫٧٣٨ × ١٥٠٤   (ح) ٥٫٤١٢ × ٣٦٨

(ب) ٨٫٧٢٦ × ٣٤٧١   (ء) ٢٫١٥٠٥ × ٤٦٫١٢

اختبر صحة نتائجك باجراء عملية الضرب العادية

(٢) احسب المقادير الآتية باستعمال اللوغاريتمات

$\sqrt{\frac{(٧٨٫٩١)^٢}{٦٨٩٩٠٫٣}}$ ÷ ٠٫٠٢٧١ $\sqrt[٣]{\frac{(١٫٠٠٣)^٣}{٠٫٠٧٣١}}$

٩٫٤٣٧ ÷ ٤٨٤

$\sqrt{٢٧٣}$ × $(١٫١)^٣$

(٣) أوجد جذر ١٠٢٤ العاشر ، جذر ٦٥٦١ الثامن ، جـذر $\frac{١٦١}{٢٥٦}$ ٢٥ ٠٫٤٨ الثامن باستعمال اللوغاريتمات واختبر صحة النتيجة باجراء عمليات الضرب

(٤) إرسم المنحنى : ص = لو١ س

(٥) لا تنسى أن استعمال اللوغاريتمات يساعدنا على سرعة اجراء عمليات الضرب والقسمة فقط ولا توجد طريقة بسيطة لايجاد لو (ا + ب) ، وعلى ذلك إذا أردت حساب قيمة $\sqrt{١٫٠١}$ − $\sqrt[٣]{١٫٠١}$ فيجب إيجاد

• أط ~ ءإ ﻪ. .

(ا) $(٣٣٫٩١)^٣ + (٤٨٫٢٤)^٣$

(ب) $\sqrt[٤]{١٠٠١} - \sqrt[٣]{١٠١}$

(ح) $\frac{(٠٫٤٥٧٣)}{(٠٫٥٤٣٦)^٢ - (٠٫٣٢٧٦)^٢}$

(٦) احسب ما يأتى مستعملا جداول اللوغاريتمات

(ا) أوجد الفائدة المركبة لمبلغ ١٠٠٠ جنيه فى ستة سنوات بسعر ٤ ٪ فى السنة

(ب) ما هو الزمن الذى يلزم لكى يتضاعف لمدثة معين إذا كان سعر القائدة المركبة ١٠ ٪ فى السنة .

(ح) أوجد القائدة المركبة لمبلغ ٤٠٠ جنيه فى ستة سنوات بسعر ٣ ٪

من ٠ إلى ٩ . نبحث فى الصف الأفقى المار بالعدد ٩٨ حتى تصل إلى العمود الموجود تحت الرقم ٧٠ العدد الموجود فى هذا المكان هو ٩٩٤٣ وهذا هو الجزء العشرى فى لوغاريتم ٩٫٨٧ . ولوجود الرقم الأخير ٦ ننظر فى الجانب الأيسر من الجدول حيث توجد عدة أعمدة توجد فى أعلاها أرقام بين ١ ، ٩ والأعداد الموجودة فى هذه الأعمدة تدلنا على ما يجب إضافتـــه إلى الجزء العشرى نظراً لوجود الرقم الرابع فى العدد الأصلى . فى الحالة التى نبحثها وجدنا الجزء العشرى للوغاريتم العدد ٩٫٨٧ ونريد أن نعلم ماذا نضيف إليه لنحصل على الجزء العشرى للوغاريتم العـدد ٩٫٨٧٦ . وبالنظر فى أقصى يسار الصف الأفقى المار بالعدد ٩٨ نجد أن العدد الموجود فى العمود الذى علاه الرقم ٦ هو ٣ . وعلى ذلك يكون الجزء العشرى المطلوب هو :

٠٫٩٩٤٣ + ٠٫٠٠٠٣ = ٠٫٩٩٤٦

وإذا كان المعلوم هو اللوغاريتم فيمكن الحصول على العدد المقابل له باتباع عكس العملية السابقة . فمثلا يمكننا إيجاد العدد الذى لوغاريتمه ٢٫٦٢٧٦ كما يأتى اعتبر أولا الجزء العشرى ٠٫٦٢٧٦ يمكننا باستعمال جـــدول لوغاريتمات أو جدول أعداد مقابلة للوغاريتمات أن نرى أن الأرقام المناظرة لهـــذا الجزء العشرى هى ٤٢٤٢ . وحيث أن العدد البيانى ٢ ، فإن العدد يقع بين ١٠٠ ، ١٠٠٠ . وعلى ذلك يكون العدد المطلوب ٤٢٤٫٢ .

(١) أوجد حواصل الضرب الآتية :

أولا : باستعمال القانون

حا ا حتا ب = ½ حا (ا + ب) + ½ حا (ا − ب)

ثانيا : باستعمال القانون

حتا ا حتا ب = ½ حتا (ا + ب) + ½ حتا (ا − ب)

(ثالثا) باستعمال جداول اللوغاريتمات

(ا) ٢٫٧٣٨ × ١٥٠٤ (جـ) ٥٫٤١٢ × ٣٦٨

(ب) ٨٫٧٢٦ × ٣٤٧١ (د) ٢٫١٥٠٥ × ٤٦٫١٢

اختبر صحة نتائجك باجراء عملية الضرب العادية

(٢) احسب المقادير الآتية باستعمال اللوغاريتمات

√ ((٧٨٫٩١)٢ / ٦٨٩٩٠٫٣) ÷ ٠٫٠٢٧١   ∛ ((١٫٠٠٣)٣ / ٠٫٠٧٣١)

٩٫٤٣٧ ÷ ٤٨٤

√٢٧٣ × (١٫١)٣

(٣) أوجد جذر ١٠٢٤ العاشر ، جذر ٦٥٦١ الثامن ، جذر ٢٥ ١٦١/٢٥٦ ، ٠٫٤٨ الثامن باستعمال اللوغاريتمات واختبر صحة النتيجة باجراء عمليات الضرب

(٤) إرسم المنحنى : ص = لو١٠ س

(٥) لا تنسى أن استعمال اللوغاريتمات يساعدنا على سرعة اجراء عمليات الضرب والقسمة فقط ولا توجد طريقة بسيطة لايجاد لو (ا + ب) ، وعلى ذلك إذا أردت حساب قيمة √١٫٠١ − ∛١٫٠١ فيجب إيجاد قيمة كل حد على حدة .

... مبلغ معين إذا كان سعر ...

(حـ) أوجد الفائدة المركبة لمبلغ ٤٠٠ ... جميعه فى ستة سنوات بسعر ٣٪

الرقم ٦ الأفقى المار بالعدد ٩٨ نجد أن العدد الموجود فى العمود الذى أعلاه هو ٣ . وعلى ذلك يكون الجزء العشرى المطلوب هو :

$$٠٫٩٩٤٣ + ٠٫٠٠٠٣ = ٠٫٩٩٤٦$$

وإذا كان المعلوم هو اللوغاريتم فيمكن الحصول على العدد المقابل له باتباع عكس العملية السابقة . فمثلا يمكننا إيجاد العدد الذى لوغاريتمه ٢٫٦٢٧٦ كما يأتى اعتبر أولا الجزء العشرى ٠٫٦٢٧٦ . يمكننا باستعمال جدول لوغاريتمات أو جدول أعداد مقابلة للوغاريتمات أن نرى أن الأرقام المناظرة لهذا الجزء العشرى هى ٤٢٤٢ . وحيث أن العدد البيانى ٢ ، فإن العدد يقع بين ١٠٠ ، ١٠٠٠ . وعلى ذلك يكون العدد المطلوب ٤٢٤٫٢ .

(١) أوجد حواصل الضرب الآتية :

أولا : باستعمال القانون

حا ا حتا ب = ½ حا (ا + ب) + ½ حا (ا − ب)

ثانيا : باستعمال القانون

حتا ا حتا ب = ½ حتا (ا + ب) + ½ حتا (ا − ب)

(ثالثا) : باستعمال جداول اللوغاريتمات

(ا) ٢٫٧٣٨ × ١٥٠٤   (حـ) ٥٫٤١٢ × ٣٦٨

(ب) ٨٫٧٢٦ × ٣٤٧١   (ء) ٢٫١٥٠٥ × ٤٦٫١٢

اختبر صحة نتائجك باجراء عملية الضرب العادية

(٢) احسب المقادير الآتية باستعمال اللوغاريتمات

$(٧٨٫٩١)^{٢}$ $\sqrt{٦٨٩٩٠٫٣}$ ٠٫٠٢٧١ $\sqrt[٣]{٠٫٠٧٣١}$ $(١٫٠٠٣)^{٣}$

٩٫٤٣٧ ÷ ٤٨٤

$\sqrt{٢٧٣} \times (١٫١)^{٣}$

(٣) أوجد جذر ١٠٢٤ العاشر ، جذر ٦٥٦١ الثامن ، جذر $\frac{١٦١}{٢٥٦}$ ٢٥ ٠٫٤٨ الثامن باستعمال اللوغاريتمات واختبر صحة النتيجة باجراء عمليات الضرب

(٤) ارسم المنحنى : ص = لو$_{١٠}$ س

(٥) لا تنسى أن استعمال اللوغاريتمات يساعدنا على سرعة اجراء عمليات الضرب والقسمة فقط ولا توجد طريقة بسيطة لايجاد لو (ا + ب) ، وعلى ذلك إذا أردت حساب قيمة $\sqrt{١٫٠١} - \sqrt[٣]{١٫٠١}$ فيجب إيجاد قيمة كل حد على حدة

أوجد قيمة

(ا) $(٣٣٫٩١)^{٣} + (٤٨٫٢٤)^{٣}$

(ب) $\sqrt[٤]{١٠٠١} - \sqrt[٣]{١٠١}$

(٠٫٤٥٧٣)

(حـ) $\sqrt{(٠٫٥٤٣٦)^{٢} - (٠٫٣٢٧٦)^{٢}}$

(٦) احسب ما يأتى مستعملا جداول اللوغاريتمات

(ا) أوجد الفائدة المركبة لمبلغ ١٠٠٠ جنيه فى [illegible] ٤ [illegible] فى السنة

(ب) ما هو الزمن الذى يلزم لكى يتضاعف مبلغ معين إذا كان سعر الفائدة المركبة ١٠ ٪ فى السنة .

(حـ) أوجد الفائدة المركبة لمبلغ ٤٠٠ جنيه فى ستة سنوات بسعر

٣ ٪

من ٠ إلى ٩ . نبحث فى الصف الأفقى المار بالعدد ٩٨ حتى تصـل إلى العمود الموجود تحت الرقم ٠٧ . العـدد الموجود فى هذا المكان هو ٩٩٤٣ وهذا هو الجزء العشرى فى لوغاريتم ٩٫٨٧ . ولوجود الرقم الأخير ٦ ننظر فى الجانب الأيسر من الجدول حيث توجد عدة أعمدة توجد فى أعلاها أرقام بين ١ ، ٩ والأعداد الموجودة فى هذه الأعمدة تدلنا على ما يجب إضافتـه إلى الجزء العشرى نظراً لوجود الرقم الرابع فى العدد الأصلى . فى الحالة التى نبحثها وجدنا الجزء العشرى للوغاريتم العدد ٩٫٨٧ ونريد أن نعلم ماذا نضيف إليه لنحصل على الجزء العشرى للوغاريتم العـدد ٩٫٨٧٦ . وبالنظر فى أقصى يسار الصف الأفقى المار بالعدد ٩٨ نجد أن العدد الموجود فى العمود الذى أعلاه الرقم ٦ هو ٣ . وعلى ذلك يكون الجزء العشرى المطلوب هو :

$$٠٫٩٩٤٣ + ٠٫٠٠٠٣ = ٠٫٩٩٤٦$$

وإذا كان المعلوم هو اللوغاريتم فيمكن الحصول على العدد المقابل له باتباع عكس العملية السابقة . فمثلا يمكننا إيجاد العدد الذى لوغاريتمه ٢٫٦٢٧٦ كما يأتى اعتبر أولا الجزء العشرى ٠٫٦٢٧٦ . يمكننا باستعمال جـدول لوغاريتمات أو جدول أعداد مقابلة اللوغاريتمات أن نرى أن الأرقام المناظرة لهـذا الجزء العشرى هى ٤٢٤٢ . وحيث أن العدد البيانى ٢ فإن العدد يقع بين ١٠٠ ، ١٠٠٠ . وعلى ذلك يكون العدد المطلوب ٤٢٤٫٢ .

(١) أوجد حواصل الضرب الآتية :

أولا : باستعمال القانون

حا ا حتا ب = ½ حا (ا+ب) + ½ حا (ا − ب)

ثانيا : باستعمال القانون

حتا ا حتا ب = ½ حتا (ا+ب) + ½ حتا (ا − ب)

ثالثا : باستعمال جداول اللوغاريتمات

(ا) ٢٫٧٣٨ × ١٥٠٤ (ب) ٨٫٧٢٦ × ٣٤٧١

(حـ) ٥٫٤١٢ × ٣٦٨ (ء) ٢٫١٥٠٥ × ٤٦٫١٢

اختبر صحة نتائجك بإجراء عملية الضرب العادية

(٢) احسب المقادير الآتية باستعمال اللوغاريتمات

$$\sqrt{\frac{(٧٨٫٩١)^{٢}}{٦٨٩٩٠٫٣}} \div ٠٫٠٢٧١ \qquad \sqrt[٣]{\frac{(١٫٠٠٣)^{٣}}{٠٫٠٧٣١}}$$

$$\sqrt{٩٫٤٣٧} \div ٤٨٤ \qquad \sqrt{٢٧٣} \times (١٫١)^{٣}$$

(٣) أوجد جذر ١٠٢٤ العاشر ، جذر ٦٥٦١ الثامن ، جـذر $٢٥\frac{١٦١}{٢٥٦}$ الثامن باستعمال اللوغاريتمات واختبر صحة النتيجة بإجراء عمليات الضرب ٠٫٤٨

(٤) إرسم المنحنى : ص = لو١ س

(٥) لا تنسى أن استعمال اللوغاريتمات يساعدنا على سرعة إجراء عمليات الضرب والقسمة فقط ولا توجد طريقة بسيطة لإيجاد لو (ا + ب) ، وعلى ذلك إذا أردت حساب قيمة $\sqrt{١٠٠١} - \sqrt[٣]{١٠٠١}$ فيجب إيجاد قيمة كل حد على حدة .

أوجد قيمة

(ا) $(٣٣٫٩١)^{٣} + (٤٨٫٢٤)^{٣}$

(ب) $\sqrt[٤]{١٠٠١} - \sqrt[٣]{١٠١}$

(حـ) $\frac{(٠٫٤٥٧٣)^{٢}}{(٠٫٥٤٣٦)^{١} - (٠٫٣٢٧٦)^{٢}}$

(٦) احسب ما يأتى مستعملا جداول اللوغاريتمات

(ا) أوجد الفائدة المركبة لمبلغ ١٠٠٠ جنيه فى ... إذا كان سعر ... فى السنة

(ب) ما هو الزمن الذى يلزم لكى يتضاعف ... القائدة المركبة ١٠ ٪ فى السنة .

(حـ) أوجد القائدة المركبة لمبلغ ٤٠٠ جنيه فى ستة سنوات بسعر ٣٫١ ٪

من ٠ إلى ٩ . نبحث فى الصف الأفقى المار بالعدد ٩٨ حتى تصل إلى العمود الموجود تحت الرقم ٠٧ العدد الموجود فى هذا المكان هو ٩٩٤٣ وهذا هو الجزء العشرى فى لوغاريتم ٩,٨٧ . ولوجود الرقم الأخير ٦ ننظر فى الجانب الأيسر من الجدول حيث توجد عدة أعمدة توجد فى أعلاها أرقام بين ١ ، ٩ والأعداد الموجودة فى هذه الأعمدة تدلنا على ما يجب إضافته إلى الجزء العشرى نظراً لوجود الرقم الرابع فى العدد الأصلى . فى الحالة التى نبحثها وجدنا الجزء العشرى للوغاريتم العدد ٩,٨٧ ونريد أن نعلم ماذا نضيف إليه لنحصل على الجزء العشرى للوغاريتم العدد ٩,٨٧٦ . وبالنظر فى أقصى يسار الصف الأفقى المار بالعدد ٩٨ نجد أن العدد الموجود فى العمود الذى أعلاه الرقم ٦ هو ٣ . وعلى ذلك يكون الجزء العشرى المطلوب هو :

$$0{,}9943 + 0{,}0003 = 0{,}9946$$

وإذا كان المعلوم هو اللوغاريتم فيمكن الحصول على العدد المقابل له باتباع عكس العملية السابقة . فمثلا يمكننا إيجاد العدد الذى لوغاريتمه ٢,٦٢٧٦ كما يأتى اعتبر أولا الجزء العشرى ٠,٦٢٧٦ . يمكننا باستعمال جدول لوغاريتمات أو جدول أعداد مقابلة للوغاريتمات أن نرى أن الأرقام المناظرة لهذا الجزء العشرى هى ٤٢٤٢ . وحيث أن العدد البيانى ٢ فإن العدد يقع بين ١٠٠ ، ١٠٠٠ . وعلى ذلك يكون العدد المطلوب ٤٢٤,٢ .

(١) أوجد حواصل الضرب الآتية :

أولا : باستعمال القانون

حا ا حتا ب = ½ حا (ا + ب) + ½ حا (ا − ب)

ثانيا : باستعمال القانون

حتا ا حتا ب = ½ حتا (ا + ب) + ½ حتا (ا − ب)

(ثالثا) : باستعمال جداول اللوغاريتمات

(ا) ٢,٧٣٨ × ١٥٠٤ (حـ) ٥,٤١٢ × ٣٦٨

(ب) ٨,٧٢٦ × ٣٤٧١ (ء) ٢,١٥٠٥ × ٤٦,١٢

اختبر صحة نتائجك بإجراء عملية الضرب العادية

(٢) احسب المقادير الآتية باستعمال اللوغاريتمات

$$\sqrt{\frac{(78{,}91)^2}{68990{,}3}} \div 0{,}0271 \qquad \frac{(1{,}003)^3}{\sqrt[3]{0{,}0731}}$$

$$9{,}437 \div 484$$

$$\frac{\sqrt{273} \times (1{,}1)^3}{0{,}48}$$

(٣) أوجد جذر ١٠٢٤ العاشر ، جذر ٦٥٦١ الثامن ، جـذر $25\frac{161}{256}$ الثامن باستعمال اللوغاريتمات واختبر صحة النتيجة بإجراء عمليات الضرب

(٤) ارسم المنحنى : ص = لو_{10} س

(٥) لا تنسى أن استعمال اللوغاريتمات يساعدنا على سرعة إجراء عمليات الضرب والقسمة فقط ولا توجد طريقة بسيطة لإيجاد لو (ا + ب) ، وعلى ذلك إذا أردت حساب قيمة $\sqrt{1001} - \sqrt[3]{1001}$ فيجب إيجاد قيمة كل حد على حدة .

أوجد قيمة

(ا) $(33{,}91)^3 + (48{,}24)^3$

(ب) $\sqrt[4]{1001} - \sqrt[3]{101}$

(حـ) $\dfrac{(0{,}4573)^2}{(0{,}5436)^2 - (0{,}3276)^2}$

(٦) احسب ما يأتى مستعملا جداول اللوغاريتمات

(ا) أوجد الفائدة المركبة لمبلغ ١٠٠٠ جنيه فى ستة سنوات بسعر ٤ ٪ فى السنة

(ب) ما هو الزمن الذى يلزم لكى يتضاعف مبلغ معين إذا كان سعر الفائدة المركبة ١٠ ٪ فى السنة .

(حـ) أوجد الفائدة المركبة لمبلغ ٤٠٠ جنيه فى ستة سنوات بسعر ٣ ½ ٪

فى السنة مع العلم بأن الفائدة تدفع كل ستة أشهر .

(٧) بأخذ هـ = ٢٫٧١٨ ، أحسب المقادير الآتية

لو$_{هـ}$ ١٫٠٠١ ، لو$_{هـ}$ $\sqrt{٢}$ ، لو$_{هـ}$ ٣٧٨٩

(٨) فى إحدى التجارب ، أخذت القيم الآتية لمتغيرين س ، ص :

س	١٫٧٠	٢٫٢٤	٢٫٨٩	٤٫٠٨	٥٫٦٣	٦٫٨٠
ص	٣٢٠	٤١١	٤٩١	٦٧١	٩٠٣	١٠٥٠

س	٨٫٤٢	١٢٫٤	١٦٫٣	١٩٫٠	٢٤٫٣
ص	١٢٧٠	١٧٨٠	٢٢٥٠	٢٥٢٠	٣١٨٠

ارسم منحنيين ، الأول يربط بين س ، ص والآخر بين لو س ، لو ص
من المنحنى الأخير اثبت انه يمكن تمثيل العلاقة بين لو س ، لو ص تقريبا بالمعادلة

لو ص = ٠٫٨٧٦ لو س + ٢٫٢٩٩

ومن ذلك استنتج معادلة تربط بين س ، ص .

(٩) اكتب مفكوك ذات الحدين للمقدار $(١ + ٠٫٠٥٠)^{-٤}$ احسب قيمة هذا المقدار بأخذ الخمسة الحدود الأولى فقط . برهن أن الخطأ فى النتيجة أقل من ٠٫٠٠٠٠١٦٣

(١٠) باستعمال المتسلسلات ، اللانهائية ، التى تمثل حا ا ؛ حتا ا ، احسب القيم حا ١° ، حتا ١° ما هو عدد الحدود اللازمة للحصول على قيم حتا ١° ، حا ١° الموجودة فى جدول الأربعة أرقام ؟

(١١) باستعمال المتسلسلات ، اللانهائية ، التى تمثل حا ﻫ ا ، حا ﻫ ا وقيم حا ١° ، حتا ١° التى حصلت عليها فى المثال السابق ، كون جدول جيوب وجيوب تمام للزوايا ١° ، ٢° ، ٣° ، ٤° ، ٥° ، ثم قارن قيمك بالقيم الموجودة فى الجداول

قوانين لتذكير القـــــارىء

حا ا حتا ب = ½ حا (ا + ب) + ½ حا (ا — ب)

حتا ا حتا ب = ½ حتا (ا + ب) + ½ حتا (ا — ب)

لو$_{١٠}$ ١٠٠ = ٢

لو$_{١٠}$ ١٠ = ١

لو ١ = ٠

لو$_{١٠}$ ٠٫١ = — ١

لو$_{١٠}$ ٠٫٠١ = — ٢

$$هـ = ١ + ١ + \frac{١}{|٢} + \frac{١}{|٣} + \frac{١}{|٤} + \frac{١}{|٥} + \cdots$$

(حتا ا + ى حا ا)^{ﻫ} = حتا ﻫ ا + ى حا ﻫ ا

حا ٣ ا = ٣ حا ا — ٤ حا^{٣} ا (انظر ص ٤٩٢)

حتا ٣ ا = ٤ حتا^{٣} ا — ٣ حتا ا

$$حا\ ا\ (بالقياس\ الدائرى) = ا - \frac{ا^{٣}}{|٣} + \frac{ا^{٥}}{|٥} - \frac{ا^{٧}}{|٧} + \cdots\cdots$$

$$حتا\ ا\ (بالقياس\ الدائرى) = ١ - \frac{ا^{٢}}{|٢} + \frac{ا^{٤}}{|٤} - \frac{ا^{٦}}{|٦} \cdots\cdots$$

الباب الحادى عشر

حساب النمو والشكل

أو

ما الذى يدور حوله حساب التفاضل

لقد انفق اختراع اللوغاريتمات مع إدخال هندسة عهد الأصلاح فى السنين الأولى من القرن السابع عشر ، وهناك تطوران صناعيان فرضا أنفسهما على انتباه الرياضيين فى أثناء المدة التالية ، وعبّدا الطريق لارتقاء علوم الميكانيكا والطرق الحديثة للعمليات الحسابية التى تمهد لتقدم جديد ، وكان أحد هذين التطورين التقدم فى استخدام المدفعية ، وكان الآخر التحسين فى عمل الساعات ، وحينما تعب ملك أسبانى من دسائس السياسة الأوربية ليهى سنينه فى تصميم الساعات كان لهذه كل الجدة التى لعربة السباق وللعربة الدوارة فى جيلنا .

وإننا فى العادة نقسم المسائل الميكانيكية الخاصة بالأجسام الصلبة إلى قسمين ، يسمى أحدهما الاستاتيكا ، وهو يبحث فى كيف يتوازن ثقل مع ثقل آخر حينما يكون الاثنان فى حالة السكون ؛ ومن بين التطبيقات الأساسية لميكانيكا السكون مسائل الإجهاد فى تصميم المبانى . ويقابل الميكانيكا المعمارية أو الاستاتيكا ، الديناميكا التى تبحث فى دراسة الأجسام المتحركة . وقد انتجت دنيا القدم الاتباعية أعمالا معمارية وأعمال رى تكاد لا تقل عن أى شىء عملته حضارتنا . ففى الاسكندرية التى كانت وثيقة الصلة بالمسائل الصناعية التى نجمت عن الأعمال البنائية الواسعة النطاق وأعمال الرىّ ، علمت القواعد الأساسية لاستاتيكا الأجسام الصلبة والسوائل بنفس الطريقة التى نعلمها بها الآن . والآلات كالتى استخدمت حتى سقوط الامبراطورية الرومانية لم تشمل إلاّ قليلا زيادة عن تدابير استخدام الطاقة الجثمانية المستمدة من العبد والجندى والحصان والثور ، وكانت استاتيكا أرشميدس كافية لتصميم الآلات البدائية مثل المنجنيق

أو المضخة . أما إدخال المتفجرات والساعات التى تدار بالأثقال أو بالزنبرك
فيما بعد فقد وضعت أساس العصر الحديث الذى استخدم الطاقة المستمدة من
منابع أخرى غير طاقة الكائنات البشرية أو دواب الحمل . ومع أن المخترعين
المنعزلين بين الصينيين والاسكندرانيين مثل هيرون الذى عمل نموذجا لتربين
بخارى ، عرفوا إمكان إنشاء آلات تدار بغير واسطة النشاط العضلى للكائنات
الحية ، إلا أن أساس الطاقة فى المدنية القديمة ارتكز فى أساسه على إقامة
الرقيق حيث يخفف كثيراً أو قليلا باستخدام دواب الحمل . وفى بداية القرن
السادس عشر وقفت الحضارة على أعتاب تقدم أنى ليحجب كل عمل بنائى من
فجر الحضارة النيلية إلى الطواف بحراً حول الكرة الأرضية ، وفى نفس اللحظة
التى بدأ فيها نهم المشروعات التجارية المتنافسة فى إظهار فضائح تجارة الرقيق ،
كشفت الاختراعية الانسانية عن وسائل خلق مجتمع ينظم أوقات فراغه
ووسائل أمنه دون عبودية واسترقاق ، ويميّز ميلاد الديناميكا أو ميكانيكا
الحركة الفاصل الثقافى العظيم الذى يفصل حضارة الرق فى العصور القديمة عن
الرجال والنساء الذين أصبحوا الآن تاريخيا متيقظين من نصيبهم فى تخطيط
حياة بشرية على الأرض تتفق مع احتياجات الانسان العاديه .

وفى الوقت الذى كان يدرس فيه تيخو براهه وكيلر قوانين حركة الكواكب
فى آخر القرن السادس عشر ، كانت الساعات آلات ذات أهمية متزايدة ،
والتجارب التى أرشدت إلى تحسين أجزائها فسّرت قوانين الحركة الأرضيه ،
والعجلة ، أو تجميع معدل السير ، وهى شىء من السهل فهمه فى هذه الأيام
حينما نسمع السيارات تغير من تروسها واتجاهها فوق التل ، هذه العجلة كانت
تجربة جديدة لم تفرض نفسها على خيال الرجال والنساء الذين تعودوا على
الحركة البطيئة نسبياً ، وذات الهزات لعربات يجرها الحصان أو الثور ضد
احتكاك الطرق الخشنة . وجاليليو (١٥٦٤ — ١٦٤٢) الذى كشف قاعدة
أن الذبذبات المتتالية للبندول تستغرق نفس المدة ، بين أيضاً أن الأجسام
المركزة والثقيلة نسبياً والمختلفة الأحجام والكثافات تسقط نحو الأرض معا
وبسرعة واحدة إذا بدأت الحركة من نفس الموضع ، وقد غير جاليليو علم
الميكانيكا كلية حينما أدخل قاعدة أن قوة الشد التى يعانيها الجسم عن طريق

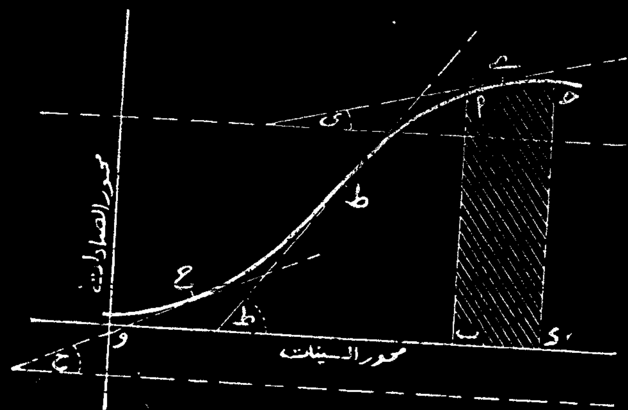
ثقله يمكن قياسها بواسطة مقدرته على زيادة السرعة التى يتحرك بها جسم آخر ، وهيجنز (١٦٢٩ — ١٦٩٥) الذى كان أول من هيأ البندول للساعة ، درس قوانين تصادم الأجسام المرنة ، وقاعدة الحركة المركزية التى استخدمها لكى يجعل الساعات تبين الوقت الصحيح فى خطوط العرض المختلفة [1] .

وإذا وضعنا ما سبق موضع المقارنة ، فاننا نرى أن القرن الذى تلا الملاحات العظيمة شُغِل تماماً بمشكلة الحركة ، وكان العمل المتوّج الذى أتى فى آخر القرن السابع عشر ، قانون نيوتن للجذب العام ، الذى ربط مسار الكواكب مع مسار قنابل المدافع مع قاعدة الحركة المركزية ، وقد جعلت قاعدة جاليليو للجاذبية الأرضية من الممكن أن نبين لماذا إذا قذفت قنبلة المدفع فى اتجاه يميل على الأفق بزاوية فإنها تسير فى اتجاه منحن بسرعة أفقية ثابتة تقريبا ، نتيجة للفعل المركب من قوة الانفجار الابتدائى وقوة الشد التى تجعل الأجسام الساقطة نحو الأرض تكتسب سرعة . وإمكانية أن كل الأجسام المادية تعانى شدا على بعضها البعض يتناسب مع كتلها مثل قوة شد ثقل مربوط فى طرف خيط حينما نحركه حول دائرة ، هذه الإمكانية اقترحت نفسها لكثير من معاصرى نيوتن كتفسير لقوانين كبلر ، وقد كان نيوتن قادراً على أن يبين أن المسار المنحنى لجسم يتحرك بمعدل سير ثابت يكون قطعا ناقصاً إذا كانت قوة الشد نحو بؤرة القطع الناقص مقيسة بمقدرتها على إحداث الحركة تتناسب عكسيا مع مربع بعد الجسم عن إحدى البؤرتين ، وقد ربطت هذه النظرية حقائق الحركة الأرضية بحركة الكواكب فى مسارات على شكل قطوع ناقصة مع أحجامها وأبعادها عن الشمس باعتبارها بؤرة .

وحينما بدأ الرياضيون فى الاهتمام بمسائل الحركة ، وجدوا أنفسهم مقيدين بعنف بالجبر العربى ، الذى اشتق قواعده من الهندسة الاتباعية ، واضطروا لابتداع آلة حساب جديدة مبنية على هندسة عهد الإصلاح ، ويسمى هذا الجبر الجديد عادة بحساب الكميات اللانهائية الصغر ، ولو أنه ابتدع فى البدء ليبحث فى هندسة الحركة ، إلا أنه يمكن تطبيقه فى أنواع أخرى من الحساب

(١) الشد المركزى للأرض يختلف باختلاف خطوط العرض ، وتبعا لذلك فلا يتذبذب البندول تماماً بنفس المعدل عند خط الاستواء وعند القطبين .

مثل إنشاء جدول اللوغاريتمات أو إيجاد قيمة للمقدار ط ، وهو من وجهة النظر الهندسية يهتم أساسياً بمسألتين (ش ١٦٦) ، وأحد الفرعين ويسمى حساب التفاضل هو وسيلة لإيجاد مقدار ميل منحن عند أية نقطة . وعلى ذلك فالمنحنى المبيّن فى الشكل يبتدىء بميل تدريجى جداً ، ثم يصبح شديد الميل . وفى النهاية يستوى حتى لا يكاد يكون هناك ميل بالمرة ، وما يسمى معاملا تفاضلياً ما هو إلا مجرد صيغة لإيجاد مقدار ميل منحن عند نقطة معينة إذا عرفنا إحداثيى هذه النقطة . والفرع الآخر ، ويسمى حساب التكامل ، يهتم أساسياً بإيجاد المساحة المحصورة بين جزء من المنحنى (ا حـ فى الشكل) والقطعين المناظرتين على محور السينات (ب ، ى) ، ومستقيمين يسميان « الرأسين » يوازيان محور الصادات (ا ب ، حـ ى) ، وما يسمى تكاملا هو ببساطة صيغة لإيجاد مثل هذه المساحة إذا عرفنا الإحداثيين السينيين (و ب ، و ى) للنقطتين ا ، حـ ، ويستخدم كل من حسابى التفاضل والتكامل طرقا متشابهة ، لأن المساحة المحصورة بين رأسين لمنحن تتوقف على مقدار ميل جزء المنحنى الذى يحد هذه المساحة .



ش ١٦٦

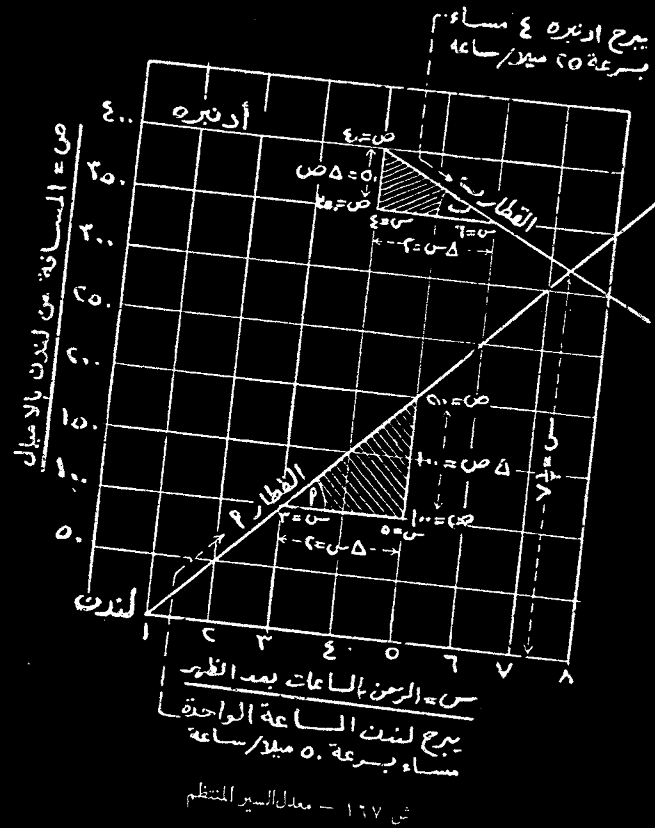
يبدأ المنحنى بميل يكون قريباً من الاستواء نسبياً عند ح ، ثم يشتد الميل فى الوسط عنه ط حيث تزيد س ، ثم يصبح فى النهاية أكثر إستواء عند هـ ، ويبين الميل عند أية نقطة بمقدار الزاوية التى يصنعها [illegible] المنحنى عند هذه النقطة مع محور السينات ، أو مع أى مستقيم يوازيه .

وبما أن هذا الحساب إبتدع للبحث فى مسائل الحركة ، فليس من السهل أن

نرى أهميته دون أن نسأل أولا كيف دخل قياس الميل والمساحة فى دراسة الحركات ، وعلى ذلك فيجب أن نصرف مجهوداً قليلا فنحاول أن نرى كيف مثلت سرعة السفينة فى الملاحات الكبرى على خريطة الهندسة قبل أن نرى كيف نستخدم هذا الحساب فى أمور أخرى .

التمثيل البيانى لمعدل السير والعجلة : — إذا ما استخدمنا الجبر القديم لوصف الأشياء المتحركة ، لا نجد أمامنا أية صعوبة ما دامت هذه الأشياء تتحرك فى خط مستقيم بمعدل سير منتظم ، وتحدث المسائل التى من هذا النوع فى الكتب فقط ، ولكنها لا تحدث فى الحياة الحقيقية ، وعلينا فى الحقيقة أن ننظر نظرة فاحصة فى مسائل الكتب لنرى كيف يمكن مع التجاوز البالغ أن تمثل هذه المسائل الحوادث الحقيقية ، ومسألة من هذا القبيل أخذت من أحد الكتب وأعطيت لتوضيح معادله بسيطة فى الباب السابع ، فقد قيل لنا أن قطاراً (ا) يسير بمعدل سير ٥٠ ميلا فى الساعة بارح لندن فى الساعة الواحدة إلى أدنبره فى رحلة تبلغ أربعمائة ميل ، وقطارا آخر (ب) يسير بمعدل سير ٢٥ ميلا فى الساعة بارح أدنبره فى الساعة الرابعة على نفس الطريق ، فلو أخذنا المسألة بقيمتها الإسمية فإنه يمكننا أن نضع على محور الصادات كما فى ش ١٦٧ المسافة من لندن بالأميال . وأن نضع على محور السينات الزمن بالساعات بعد الظهر فى اليوم الذى يحدث فيه هذا الحادث غير المحتمل الوقوع ، ويمكن تمثيل تقدم القطارين بمستقيمين يتقاطعان حيث س = ٧ ⅓ (٧ ٢٠ ق ت) بعد الظهر ، وهى النتيجة التى حصلنا عليها بحل المعادلة ، وإذا نظرنا الآن إلى الشكل التالى فسنرى لماذا لا يمكن أن تحدث هذه المسألة إلا فى كتاب فقط ، ولا تظهر فى صندوق الإشارات .

أعد فحص الرسم البيانى الأصلى أولا ، وإذا أخذنا نقطتين على المستقيم الذى يمثل تقدم القطار ا فإن معدل سيره كما هو معطى فى المسألة يناظر الميل الذى يعمله المستقيم مع محور السينات أو مع أى مستقيم يوازى هذا المحور ، ومعدل السير هو خارج قسمة المسافة المقطوعة على الزمن الذى قطعت فيه هذه المسافة ، أو بمعنى آخر المسافة المقطوعة فى وحدة الزمن ، وهذا هو $\frac{\text{الفرق فى ص}}{\text{الفرق فى س}}$



ش ١٦٧ — معدل السير المنتظم

أو كما سنكتبه الآن $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$ ، وفى الزمن الذى يمر بين الساعة الثالثة ($س_1 = ٣$) والساعة الخامسة ($س_2 = ٥$) يتحرك القطار ا من بعد ١٠٠ ميل ($= ص_1$) عن لندن إلى بعد ٢٠٠ ميل ($= ص_2$) عنها ، وعلى ذلك فالميل

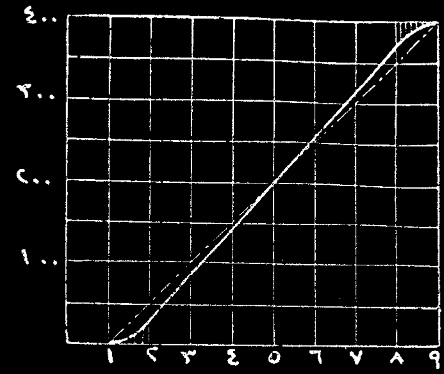
$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{٢٠٠ - ١٠٠}{٥ - ٣} = \frac{١٠٠}{٢} = ٥٠$$

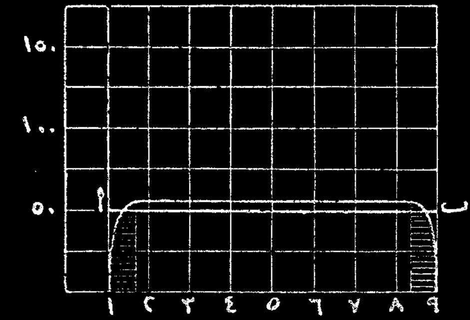
، وكما هو مرسوم فى الشكل نجد أن الميل (مقيساً بالميل فى الساعة) لا يتغير من اللحظة التى بدأ فيها القطار لغاية اللحظة التى وقف فيها ، وهو كقولنا أن القطار بدأ فجأة باعلى معدل سير ، ووقف عن الحركة فجأة .

والجزء الأوسط من الخط الذى يمثل تقدم القطار يميل قليلا عن الخط المنقط الذى يناظر مساره فى ش ١٦٧ .

وعلى ذلك فاستخدام المعادلة البسيطة يتوقف على فرضين : أولهما أن يتحرك بمعدّل سير ثابت فى أثناء الجزء الأعظم من رحلته (أى أن المشير فى جهاز قياس معدّل السير يظل ثابتاً) وثانيهما أن الرحلة طويلة بدرجة تجعل كلا من الزمن المأخوذ للوصول إلى أعلى معـدّل سير ، والزمن المأخوذ للوصول إلى السكون لا يؤ ـ فى حسابنا بأ ـة درجة محسوسة ، والزمن المفقود بالفعل فى الوصول إلى أعلى معدّل سير وفى الوصول إلى السكون يعنى أن القطار إذا قطع مسافة الأربعمائة ميل فى ثمانية ساعات بالضبط ، فانه يجب أن يسير بمعدل سير يزيد ٥٠ ميلا فى الساعة فى جزء من الرحلة حتى ولو كانت هذه الزيادة طفيفة جداً ، وعلى ذلك فالخطان فى ش١٦٧ لا يتقاطعان تماماً عند الساعة ٢٠ ، ٧ ق ت وعندما تكون الرحلة طويلة ، فان الخطأ الناتج من الفرض الثانى يكون صغيراً جداً لدرجة لا تضايقنا .

وفى الحياة الحقيقية تتحرك أشياء قليلة على خط مستقيم بمعدل سير ثابت ، وحتى إذا قامت بذلك لمسافة طويلة فانها عادة تتغيّر اتجاهها فى أثناء ذلك ، وفى جبر الحركة الجديد ندخل فى حسابنا الاتجاه كما ندخل معدّل السير ، وكما فى الحياة الحقيقية يكون للطريق المختار للدراجة البخارية نفس الأهميّة مثل ما يكون للمسافة التى تكون هذه الدراجة قادرة على قطعها فى زمن معيّن ، وعلى ذلك فاننا نميّز بين معدّل السير الفج ومعدّل السير النافع الذى يسمى السرعة ، ومعدّل السير الفج هو ببساطة خارج قسمة المسافة الكليّة على الزمن الذى قطعت فيه هذه المسافة ، دون أن يكون للاتجاه دخل فى ذلك ، والسرعة هى معدّل السير فى اتجاه معيّن ، ولو استمر القطار الأول فى رحلته إلى أدنبره فى خط مستقيم فان سرعته فى الاتجاه من لندن إلى أدنبره تساوى

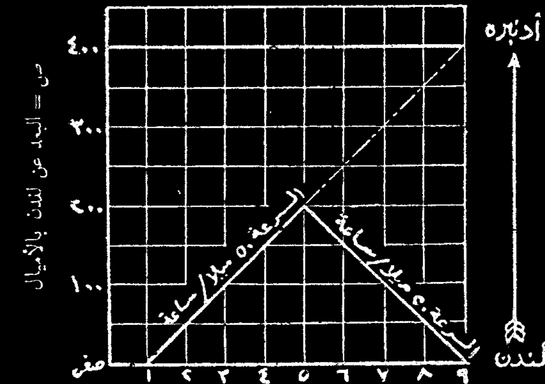




ش — ١٦٨ معدل السير والعجلة

والجزء الأعلى من ش ١٦٨ يبين معدل سير القطار من وقت قيامه فى الساعة الواحدة لغاية وقت وصوله فى الساعة التاسعة ، ولو أمكننا أن نبدأ فجأة بأعلى معدل سير ، وأن نقف عن الحركة فجأة ، فإنه يمكن تمثيل معدل السير بالخط المستقيم ا ب الذى يوازى محور السينات ، ولا توجد قطارات حقيقية تقوم بذلك ، حتى ولو أمكن للقطار أن يحتفظ بمعدل سير ثابت إطلاقاً فى أثناء الجزء الأعظم من رحلته ، فإنه يجب أن نمثل معدل سيره فى أثناء الرحلة كلها بمنحنى قمته ذات استواء ، وذلك لتقرير حقيقة أن القطار يكتسب معدل سير حينما يبتدئ (عجلة موجبة) ، ويفقده حينما يقف (عجلة سالبة) ، ومن الجزء الأسفل من الشكل نرى ما يعنى بأن القطار لا يقطع فى كل من الساعتين الأولى والأخيرة ما يقطعه فى كل ساعة من المـدة التى تتوسط بينهما . وعلى ذلك

معدّل سيره وكما فى ش ١٦٩ لو عكس القطار اتجاهه بعد سيره ٢٠٠ ميل وعاد إلى لندن فى خط مستقيم بنفس معدّل السير ، فان سرعته المتوسطة فى كل الرحلة تكون صفرا عوضا عن أن تكون ٥٠ ميلا فى الساعة فيما لو استمر مقطار فى طريقه إلى أدنبره .



شكل (١٦٩)

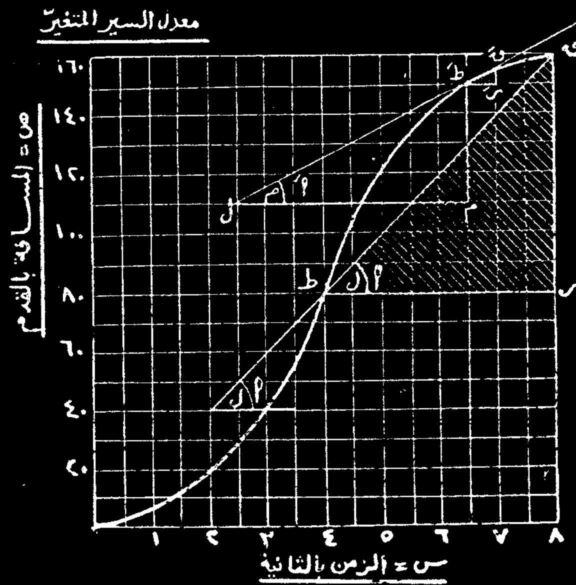
معدل السير الفج والسرعة

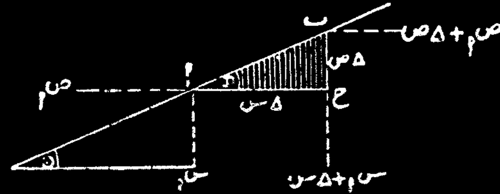
وإذا رجعت إلى شكل ١٦٧ ونظرت إلى تقدم القطار ب ، فانك ترى أنه فى زمن قدره ساعتان بين الساعة الرابعة ($س_1 = ٤$) والساعة السادسة ($س_2 = ٦$) تغيّرت المسافة التى قطعها القطار من لندن من $ص_1 = ٤٠٠$ إلى $ص_2 = ٣٥٠$ ، وعلى ذلك لو كتبنا كما سبق $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$

فان $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{٣٥٠ - ٤٠٠}{٦ - ٤} = \frac{-٥٠}{٢} = -٢٥$. وعلى ذلك فالانحدار فى الرسم البيانى للمسافة (مقيسة على خط مستقيم) بالنسبة للزمن لا تمثل معدل السير الفج ، وإنما تعلل معدل السير فى اتجاه معين أى السرعة . والقطار ب يتحرك

بسرعة + ٥٠ ميلا فى الساعة أى بمعدّل سير قدره ٥٠ ميلا فى الساعة بعيداً عن لندن عندما تكون المسافة مقيسة من لندن ، والقطار ب يتحرك بسرعة − ٢٥ ميلا فى الساعة أى بمعدل سير مقداره ٢٥ ميـــلا فى الساعة حيث قيست المسافة نحو لندن .

والشكل الآتى (ش ١٧٠) يمثل شيئا ما أكثر شبهــا بالحركة التى نراها فى الدنيا الحقيقية (دنيا الواقع) ويبين المنحنى المسافة التى تقطعها دراجة بخارية فى تجربة قصيرة قيس زمنها بساعة إيقاف على طريق مستقيم طوله ١٦٠ قدما ، وبقى الاتجاه ثابتا ، وعلى ذلك فمعدل السير والسرعة متكافئتان ، وقد استغرقت





(شكل ١٧٠)

كل التجربة ثمان ثوان من وقت الابتـــداء (س = ٠) إلى وقت الوقوف (س = ٨) وعلى ذلك فالسرعة المتوسطة فى كل الطريق = $\frac{١٦٠ - ٠}{٨ - ٠}$ = ٢٠ قدما فى الثانية ، ولو درست الرسم فسترى أن الدراجة بطيئة ، ثم زاد معدل سيرها تدريجيا حتى حوالى منتصف الطريق الذى سارت فيه ، حيث بدأ معدل السير فى الهبوط ، وعلى ذلك فهى تقطع حوالى ٨ أقدام فى الثانية الأولى وفى بداية الثانية الرابعة كانت على بعد ٤٠ قدما من النقطة التى بدأت منها ، وفى نهاية الثانية الرابعة وصلت إلى نقطة ط على بعد ٨٠ قدما من البدء ، وعلى ذلك فهى قطعت ٤٠ قدما فى الثانية الرابعة ، وسرعتها المتوسطة فى أثناء الثانية الأولى عشر أقدام فى الثانية ، وفى أثناء الثانية الرابعة ٤٠ قدما فى الثانية وابتدأ من ط فصاعداً بدأت السرعة تنقص ، وفى بداية الثانية الثامنة تكون قد قطعت ١٥٥ قدما . وفى نهاية الثانية الثامنة تصل إلى هدفها الذى يبعد ١٦٠ قدما عن نقطة البدء ، وعلى ذلك فالسرعة المتوسطة فى الثانية الأخيرة ٥ أقدام فى الثانية فقط ويمكن أن نعمل جدولا لتقدمه ، مستخدمين △س للفترة بين مرحلتين متتاليتين مقيسة بالثانية ، △ص للمسافة المقطوعة فى الفترة المناظرة △ س كما يلى :

س	△ س	ص	△ ص	$\frac{△ص}{△س}$ بالقدم فى الثانية
٠		٠		
٢	٢	٢٠	٢٠	١٠
٤	٢	٨٠	٦٠	٣٠
٦	٢	١٤٥	٦٥	٣٢٫٥
٨	٢	١٦٠	٢٥	١٢٫٥

لنفرض الآن أننا لاحظنا طريق راكب دراجة بدأ سيره وهو على مسافة تسبق بدء طريق التجربة ، وانتهى من سيره بعد مسافة من نهاية هذا الطريق المرسوم وما كان عليه أن يزيد من سرعته أو يقال منها ، وإنما عليه أن يكون قادراً على أن يجعل مؤشر القراءة فى جهاز قياس معدّل السير عالياً فى نفس

الموضع طول الطريق ، فيكون الرسم البيانى الذى يسجل سيره خطا مستقيما ، وبتحويل الثوانى إلى ساعات والأقدام إلى أميال ، نجد أن ميل المستقيم يكافى، قراءة جهاز قياس معدّل السير ، والسرعة المتوسطة بين نقطتين ط ، ن فى الرسم البيانى ش ١٧٠ هى أيضاً ميـل المستقيم الذى يصل بينهما ، ط س هو الفترة الزمنية △ س ، ن ر هو المسافة △ ص المقطوعة والميل

$$\frac{△\ ص}{△\ س} = \frac{ن\ ر}{ط\ ر} = ظا\ ا .$$

وإذا قربت نقطتان من الطريق قربا كافيا مثل الاحداثيين الصاديين للنقطتين طَ ، نَ . فان الخط المنحنى الذى يصل بينهما يصعب تمييزه عن خط مستقيم ، ولا ينتقل مؤشر جهاز قياس معدّل السير بدرجة محسوسة فى أثناء الفترة التى يمثلها الفرق بين الاحداثيين السينيين للنقطتين نَ ، طَ ، وعند ما تقرب طَ من نَ قرباً كافياً لدرجة أنه لا يمكننا أن نميّز بينهما ، فالمستقيم الذى يصل بينهما يصبح مماسا عند النقطة طَ = نَ ، ويقابل ميل هذا المستقيم قراءة جهاز قياس معدّل السير عند اللحظة التى يمثلها الإحداثى السينى للنقطة طَ ، أو عند المسافة من البدء التى يمثلها الإحداثى الصادى للنقطة طَ ، ومهما جعلنا المثلث طَ نَ رَ صغيراً أو بمعنى آخر مهما قربت ط من ن ، فإن الزاوية اَ بين طَ نَ ، طَ رَ تظل كمية معيّنة تماماً ، وتكون هى الزاوية التى يصنعها المماس مع محور السينات ، أو مع أى مستقيم يوازيه .

وفى الرسم البيانى لمعـــدّل السير كالرسم المتقدّم ذكره حيث قيست المسافات على محور الصادات والأزمنة على محور السينات ، يمكننا دائما تعيين قراءة جهاز معدل السير عند أية نقطة ط ، احداثيها السينى س طَ ، واحداثيها الصادى ص طَ ، أى عند ما يكون الجسم المتحرك قد قطع مسافة قدرها ص طَ فى زمن قدره س طَ . وكل ما نعمله أن نرسم مماساً للمنحنى عند طَ ، ونقرأ الزاوية التى يصنعها المماس مع أى مستقيم يوازى محور السينات ، ثم نبحث عن ظل هذه الزاوية من الجداول . ويمكننا أن نرى من المثلث الكبير أن الميل

ظا ا $= \frac{\text{ط َم}}{\text{ل م}}$ ، ولمّا كان طَ م يقابل ٤ أقسام على محور الصادات أى ٤٠ قدماً ل م من س = ٢٫٤ إلى س = ٦٫٥ يقابل تقريبا ٤٫١ من الأقسام على محور السينات ، فالسرعة عند طَ = تقريبا $\frac{٤٠}{٤٫١}$ = ٩٫٨ .

ولو رسم المماس بدرجة كبيرة من الدقة ، فإن النتيجة تقرب كثيراً من قراءة جهاز قياس معدّل السير ، ويمكننا أن نحصل على قياس تقريبي وسريع للسرعة عند طَ (أى بعد $\frac{1}{2}$ ٦ من الثوانى أو بعد ١٥٠ قدما من بدء الرحلة) بأخذ السرعة المتوسطة بين نقطتين قويتين من طَ ، مثل السرعة المتوسطة بين النقطتين على الطريق بعد ٦ ، ٧ من الثوانى من بدء الرحلة . وهنا جدول المعدل السير التقريبي حصل عليه بالطريقة سالفة الذكر .

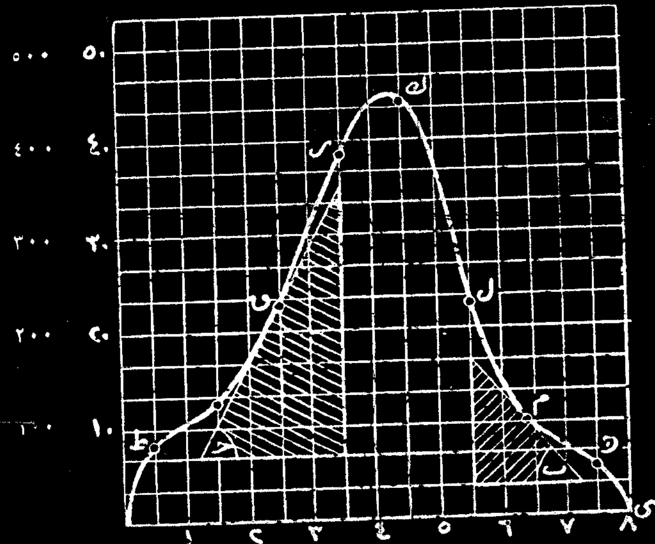
س	△ س	ص	△ ص	$\frac{\text{△ ص}}{\text{△ س}}$	معدّل السير التقريبي عند س =
٠	١	٠	٨	٨	٠٫٥
١	١	٨	١٢	١٢	١٫٥
٢	١	٢٠	٢٢	٢٢	٢٫٥
٣	١	٤٢	٣٨	٣٨	٣٫٥
٤	١	٨٠	٤٣	٤٣	٤٫٥
٥	١	١٢٣	٢٢	٢٢	٥٫٥
٦	١	١٤٥	١٠	١٠	٦٫٥
٧	١	١٥٥	٥	٥	٧٫٥
٨		١٦٠			

ونرى من هذا الجدول أننا لو أخذنا السرعة المتوسطة بين ابتداء الثانية السابعة وانتهائها كما ظهرت فى جهاز قياس معدّل السير (بالقدم فى الثانية) حينما بينت ساعة الإيقاف $\frac{1}{2}$٦ من الثوانى كانت النتيجة ١٠ أقدام فى الثانية ، وهى تزيد عن النتيجة السابقة بمعدّل ٢٪ . وذلك لأن المماس رسم تقريبيا من

ناحية ، ومن ناحية أخرى لأن معدّل السير لا يتغيّر بانتظام من نهاية الثانية السادسة إلى نهاية الثانية السابعة . وطريقة المماس تكافىء أخذ نقطتين إحداثياهما السينيان س طَ ، س طَ + △ س ، إحداثياهما الصاديان ص طَ ، ص طَ + △ ص ، ويقربان من بعضهما بحيث يكون كل من △ س ، △ ص صغيرا جداً حتى لا يمكن أن يقاس ، ويكون الميل (الجزء الأسفل من ش ١٧٠)

$\frac{\text{△ ص}}{\text{△ س}}$ = ظا ا . وعندما يكون كل من △ ص ، △ س صغيراً صغراً لا يحس ، فاننا نكتب النسبة السابقة $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ (وتنطق دال صاد على دال سين) ؛

وتسمى هذه النسبة المعامل التفاضلى للمتغيّر ص بالنسبة للمتغيّر س ، وهى تقابل السرعة أو المسافة فى وحدة الزمن إذا كانت الكميات المقيسة على محور السينات تدل على الزمن ، والكميات المقيسة على محور الصادات تدل على المسافة



شكل (١٠١)
الرسم البيانى للعجلة س = الزمن بالثوانى
ص = قراءات جهاز معدل السير بالأقدام فى الثانية

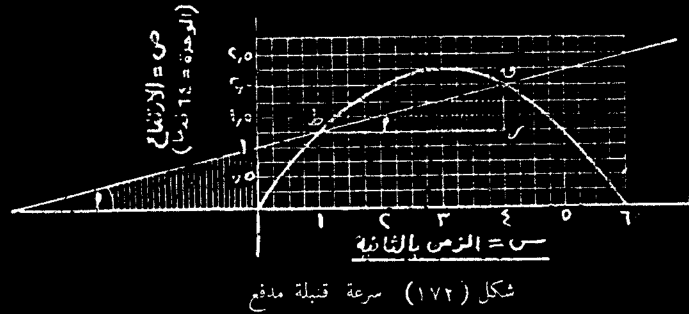
فى خط مستقيم ، ومع ذلك فهى تقابل أى معدّل للتغيّر ، مثل انتفاخ إطار من المطاط عن كل مشوار للمضخة ، وإذا أخذنا طول قضيب من الحديد على محور الصادات ودرجة الحرارة على محور السينات ، فالرسم البيانى الناتج يمثل تمدد القضيب أو زيادة طوله بالنسبة لدرجة الحرارة حينما تزيد درجة الحرارة أو تنقص . وإذا أخذنا طول الزنبرك على محور الصادات ، والثقل المعلّق فى طرفه على محور السينات كما فى ش ١٧١ ، فالرسم البيانى الناتج يمثل استطالة الزنبرك أو زيادة طوله بالنسبة لوحدة الأثقال حينما يزيد الثقل المعلق به أو ينقص . وإننا الآن فى مركز يسمح لنا بقياس العجلة أو المعدّل الذى به تزيد سرعة جسم متحرك أو تنقص ، وفى التوضيح الآتى (ش ١٧١) أخذت لوحدة على محور السينات لنصف ثانية كما فى الشكل السابق ، وأخذت الأقسام على محور الصادات لقراءات جهاز قياس معدّل السير فى اللحظات المتتالية ، وقد بنيت على القراءات التقريبية لجهاز قياس معدّل السير الواردة فى الجدول السابق . ولتمييز الجهاز على محور الصادات فى هذا الرسم عنه فى الرسم السابق نسميه محور العينات حيث ع تدل على السرعة .

والمنحنى المبين منحدر من ط إلى ن ، ومن ن إلى ر ، حيث تظل السرعة متزايدة ، ويظل مؤشر جهاز قياس معدل السير متحركة نحو اليمين ، ويكون للدراجة عجلة ، وعند نقطة ك يستوى المنحنى لحظيا ، وبعدئذ تتناقص السرعة ويكون للدراجة تقصير ولكون التقصير ضد العجلة فى الكلام العادى فيسمى العجلة السالبة فى الديناميكا وعند نقطة ك حيث يقف مؤشر جهاز قياس معدل السير عن الحركة نحو اليمين تكون العجلة صفرا ، وعلى ذلك فميل المنحنى ، الذى تقوم فيه السرعة مقام المسافة على محور الصادات ، يقيس معدل تغير السرعة ، وتكون العجلة $\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$ حيث ع $=$ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ وتكتب العجلة عادة $\frac{\text{ء}^{2}\text{ص}}{\text{ءس}^{2}}$ وتنطق دال اثنين صاد على دال سين تربيع .

وبما أنه يمكننا أن نمثل على محور الصادات معاملات تفاضلية أخرى مثل التمدد فى كل وحدة من الوزن ، فاننا نستخدم عادة الاصطلاح الأكثر

تعميما ، المعامل التفاضلى الثانى ، حيث يذكرك أن العدد ٢ فى هذا المقام لا يعنى نفس الشىء الذى يعنيه التربيع ، ولو أنه كتب بنفس الطريقة . وسترى عند ن حيث يتزايد معدل السير أن $\frac{\text{ء}^{2}\text{ص}}{\text{ءس}^{2}}$ $=$ ظا ح بينما عند م حيث يتناقص معدل السير يكون $\frac{\text{ء}^{2}\text{ص}}{\text{ءس}^{2}}$ $= -$ ظا ب

التفاضل : وكل ما وصلنا إليه أننا بينا كيف نحصل على المعامل التفاضلى بوساطة عملية هندسية ؛ ودقة النتيجة فى هذه الطريقة تتوقف على الرسم وحتى مع أحسن الرسوم نجد عدم دقة كبيرة لامفر منها ، وذلك عندما يكون للمنحنى منحدراً . ويظهر أن أول شخص تحقق من أنه لاحاجة للاعتماد على الرسم هو اسحق بارو أستاذ نيوتن . ويمكننا توضيح الطريقة التى أدخلها بمسار قنبلة مدفع كما هو مبين فى شكل ١٧٢ — ٤ . وفى شكل ١٧٢ تقاس السرعة المتوسطة للقنبلة وهى متحركة إلى أعلى بين النقطتين ط ، ن بظل الزاوية ، بعد التعويض بوحدات القياس المناسبة . وإذا كانت وحدة الزمن (س) ثانية واحدة والمسافة



شكل (١٧٢) سرعة قنبلة مدفع

(ص) ٦٤ قدما فمعادلة المنحنى كما هو مرسوم هى ص $\frac{3}{2}$ س $-$ $\frac{\text{س}^{2}}{4}$

ولو أردنا كما فى ش ١٧٣ أن نجد السرعة إلى أعلى عند أية نقطة ط (احداثيها السينى س$_{\text{ط}}$) بعد زمن س من اللحظة التى أطلق فيها المدفع فاننا نقوم بهذه الطريقة وبالعودة إلى ش ١٧٣ نرى أن :

$$\text{ظا أ} = \frac{\text{ن م}}{\text{ط م}} = \frac{\text{ص}_{\text{ن}} - \text{ص}_{\text{ط}}}{\text{س}_{\text{ن}} - \text{س}_{\text{ط}}}$$

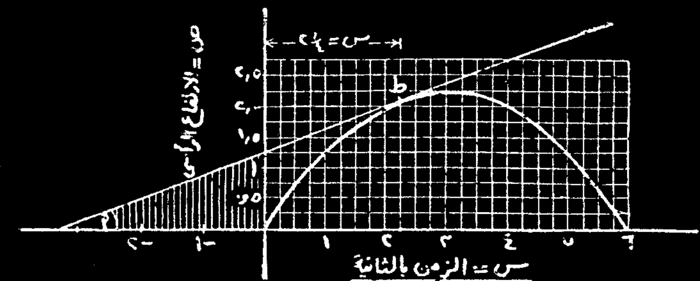
فلو مثلنا الفترة بين $\text{س}_{\text{ن}}$ ، $\text{س}_{\text{ط}}$ بالقيمة $\triangle$ س (أى $\text{س}_{\text{ن}} = \text{س}_{\text{ط}} + \triangle \text{س}$)

فيمكننا أن نكتب $\text{ص}_{\text{ط}} = \frac{٣}{٢}\text{س}_{\text{ط}} - \frac{١}{٤}\text{س}_{\text{ط}}^{٢}$

$$\text{ص}_{\text{ن}} = \frac{٣}{٢}(\text{س}_{\text{ط}} + \triangle \text{س}) - \frac{١}{٤}(\text{س}_{\text{ط}} + \triangle \text{س})^{٢}$$

$$= \frac{٣}{٢}\text{س}_{\text{ط}} + \frac{٣}{٢}\triangle \text{س} - \frac{١}{٤}\text{س}_{\text{ط}}^{٢} - \frac{\text{س}_{\text{ط}}\triangle \text{س}}{٢} - \frac{١}{٤}\overline{\triangle \text{س}}^{٢}$$

$$= \left(\frac{٣}{٢}\text{س}_{\text{ط}} - \frac{١}{٤}\text{س}_{\text{ط}}^{٢}\right) + \left(\frac{٣}{٢}\triangle \text{س} - \frac{\text{س}_{\text{ط}}\triangle \text{س}}{٢} - \frac{١}{٤}\overline{\triangle \text{س}}^{٢}\right)$$



شكل (١٧٣)

$$\therefore \text{ص}_{\text{ن}} - \text{ص}_{\text{ط}} = \frac{٣}{٢}\triangle \text{س} - \frac{\text{س}_{\text{ط}}\triangle \text{س}}{٢} - \frac{١}{٤}\overline{\triangle \text{س}}^{٢}$$

$$\therefore \frac{\text{ص}_{\text{ن}} - \text{ص}_{\text{ط}}}{\triangle \text{س}} = \frac{٣}{٢} - \frac{\text{س}_{\text{ط}}}{٢} - \frac{١}{٤}\triangle \text{س}$$

وحينما تلتصق ط ، ن حتى لا يمكن تمييز أحداهما عن الأخرى (ش١٧٣) تكون $\triangle$ س صغيرة جداً حتى لا يمكن أن تقاس ، وعلى ذلك فيكون

$$\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \frac{٣}{٢} - \frac{١}{٢}\text{س}$$

وإذا نظرت إلى ش ١٧٣ فسترى أن $\text{س}_{\text{ط}}$ ، الاحداثى السينى لنقطة ط يساوى $٢\frac{١}{٤}$ فى هذه الحالة وعلى ذلك فعند ط يكون

$$\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \frac{٣}{٢} - \frac{٩}{٨} = ٠٫٣٧٥$$

ولو قسمنا الزاوية أ بمنقلة فاننا نجدها $٢٠\frac{١}{٢}$° لأقرب نصف درجة ، ونجد من جداول الظلال أن ظا $٢٠\frac{١}{٢}$° = ٠٫٢٧٤ ، وكل وحدة على محور السينات ثانية واحدة ، وعلى ذلك فهذا يقيس السرعة فى الثانية بمقاييس الطول المخصوصة التى اخترناها للمتغير ص ، وفى الشكل الوحدة على ص ٦٤ قدما ، وعلى ذلك فتكون ع = ٦٥ × ٠٫٣٧٥ = ٢٤ قدما فى الثانية ، وهذا يساعدنا فى أن نرى قاعدة أكثر تعميماً للتفاضل ، أى ايجاد الظلال ، إذا ما وضعنا قوى ص ومعاملها التفاضلى فى طريقه مشابهة ، وعلى ذلك

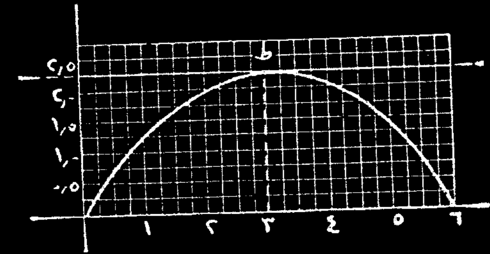
$$\text{ص} = \frac{٣}{٢}\text{س}^{١} - \frac{١}{٤}\text{س}^{٢}$$

$$\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \frac{٣}{٢} - \frac{١}{٢}\text{س}$$

ويمكن ترك الرمز ط ، لأنه ما وضع إلا ليميز $\text{س}_{\text{ط}}$ من $\text{س}_{\text{ن}}$ حينما كانت ط ، ن بعيدتين ، وبما أن $\text{س}^{٠} = ١$ مهما كانت قيمة س ، فانه يمكننا أن نكتب المعادلة هكذا

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{٣}}{\text{٢}} - \frac{\text{١ (٢ س)}}{\text{٤}}$$

وقبل أن نعرض القاعدة المقترحة من التشابه بين ص $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ حينما تكتب بهذه الطريقة ، فانه يمكننا أن ننبه إلى نتيجتين عمليتين من العبارة التى حصلنا عليها ، أولاهما أنه يمكننا أن نستخدمها فى ايجاد اللحظة المضبوطة التى عندها



شكل (١٧٩)

تصل قنبلة المدفع إلى أقصى ارتفاع فى مسارها ويكون هذا عند ما تقف حركتها إلى أعلى ، وقبل أن تبدأ فى الهبوط إلى أسفل ، وعند هذه النقطة يمكننا أن نقول إنها وقفت عن الحركة تماما فى وسط الهواء لمدة لحظة . وسرعتها إلى أعلى التى تغيرت من الايجاب إلى السلب تصبح صفراً ، ويكون المماس للمنحنى (ش ١٧٤) موازيا لمحور السينات حيث تكون زاوية ميله صفراً

أى $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٠$

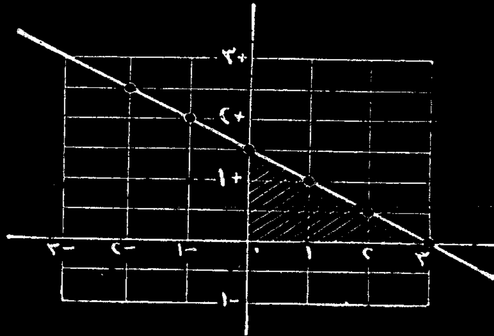
$$\therefore \ \text{٣} - \frac{\text{١ س}}{\text{٢}} = ٠ \qquad \therefore \ \text{س} = \text{٣}$$

أى أن قنبلة المدفع تصل إلى أقصى ارتفاع بعد ٣ ثوان من الانفجار ، ويمكن إيجاد ارتفاعها عند هذه اللحظة بوضع س = ٣ فى المعادلة الأصلية

$$\text{ص} = \frac{\text{٣س}}{\text{٢}} - \frac{\text{١ س}^{٢}}{\text{٤}}$$

$$\therefore \ \text{ص} = \frac{\text{٣} \times \text{٣}}{\text{٢}} - \frac{\text{١} \times \text{٩}}{\text{٤}} = \text{٢}\tfrac{\text{١}}{\text{٤}} \ \text{وحدة}$$

وبما أن وحدة القياس على محور الصادات ٦٤ قدما ، فيكون الارتفاع مساويا ٢ ¼ × ٦٤ = ١٤٤ قدما . ويمكننا أيضا استخدام معادلة المعامل التفاضلى لإيجاد عجلة قنبلة المدفع إلى أسفل ، وفى ش ١٧٥ رسمنا الرسم البانى



شكل (١٧٥)

تمثل الأقسام على محور السينات الزمن بالثانية ، وتمثل الأقسام على محور الصادات معدل السير أى المسافة فى الثانية مقيسة رأسيا إلى أعلى وكل وحدة على محور الصادات تمثل ٦٤ قدما فى الثانية ويميل المستقيم إلى أعلى من اليمين الى الشمال ؛ وعلى ذلك فتكون إشارة الميل سالبة أى أن القنبلة تفقد معدل سير إلى أعلى أو نكتسب معدل سير نحو الأرض والميل كما يرى من المساحة المظللة

= $\frac{\text{٠ — ١,٥ من وحدات ص}}{\text{٣ — ٠ من وحدات س}}$ أى $\frac{\text{١,٥} \times \text{٦٤ قدما فى الثانية}}{\text{٣ ثوان}}$ أى —٣٢ قدما فى الثانية كل ثانية

للمعادلة ع = ٣/٢ — $\frac{\text{١ س}}{\text{٢}}$ وكما سبق تمثل الأقسام على محور الصادات قيم ع = $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ المناظرة ؛ والرسم خط مستقيم ويمثل ميل المستقيم هو المعامل التفاضلى الثانى ويتبين لك من الاشارة المكتوبة تحت الرسم أن :

$$\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}} = \frac{\text{— ١,٥}}{\text{٣}} \ \text{من وحدات ص فى الثانية كل ثانية}$$

= — ٣٢ قدما فى الثانية كل ثانية

أى أن قنبلة المدفع فى أثناء الرحلة كلها تفقد دائما (إشارة سالبة) معدل سير إلى أعلى ، وعلى ذلك فهى تكتسب معدل سير نحو الأرض بنفس المقدار وقد بين جاليليو أن جميع الأجسام الساقطة بالقرب من الأرض تكتسب معدل سير إلى أسفل بمعدل يساوى تقريبا ٣٢ قدما فى الثانية كل ثانية إن لم تكن هناك مادة تعرقل سيرها ، وتسقط الريشة وقطعة العملة فى الفراغ بنفس المعدل ، وميل الريشة إلى الطفو ينسب إلى كبر المسطح الذى يتعرض للمقاومة الاحتكاكية مع الهواء ، وقد صمم شكل السيجار للقذائف الحديثة ، إذا ما قورنت بقنابل المدافع ذات الزى القديم ، كما صممت خطوط التيار فى العربية الحديثة لتقليل السطح الذى يلاصق الهواء الذى تتحرك خلاله .

ويمكن استخدام حساب التفاضل فى عدد كبير من الحسابات المتنوعة بجانب المسائل الميكانيكية التى اخترع من أجلها ، ولتطبيقه بشكل صحيح فى أنواع المسائل التى تتضمن ميكانيكا الحركة ، يجب أن يكون من الأهمية بمكان أن نتذكر أن العجلة لا تعنى فقط معدّل زيادة السير أو تقليله كما يستخدم ذلك فى لغات الكلام اليومية ، ففى الميكانيكا تعنى العجلة التغيّر فى السرعة ، وتعنى السرعة دائماً معدّلُ السير مقيسا فى اتجاه خاص على خط مستقيم ، ولو تحرك متحرك فى خط مستقيم ، فسرعته هى معدّل سيره بالإشارة المعينة التى تعيّن أى الإتجاهين يتجه فى حركته ، ولن لم يتحرك فى خط مستقيم فان معدّل سيره بين نقطتين على مساره يجب أن يكون دائماً أكثر من سرعته ، فمثلا إذا تحرك قطار من ا إلى ب فى ساعة ، فان سرعته فى الإتجاه ا ب هى + ا ب ميلا فى الساعة ، وفى الإتجاه ب ا هى — ا ب ميلا فى الساعة ، ومعدّل سيره هو ا ب ميلا فى الساعة فى أى الاتجاهين ، ولو سار فى طريق غير مباشر مثلا فى خط مستقيم من ا إلى حـ ، وفى خط مستقيم من حـ إلى ب ، فان معدل سيره هو (احـ + حـ ب) ميلا فى الساعة (المسافة الكلية ÷ الزمن) ، ولكن سرعته فى الاتجاه ا ب لا يزال ا ب ميلا فى الساعة ، والسبب فى هذا التمييز هو الاختبار العالمى للقصور ، وحينما يقف القطار فجأة ، فاننا نبذل قوة شد لنمنع أنفسنا من الاندفاع جانبا إلى الأمام ، وحينما ندور حول ركن فجأة ، فاننا ننحنى إلى الداخل لنمنع أنفسنا من الاندفاع إلى الخارج على ذراع قيادة الدراجة ، ويجب أن نبذل قوة

شد لإيقاف متحرك من التحرك إلى الأمام فى خط مستقيم ، مثلما تجعله يسرع أو يبطىء فى الاتجاه الذى يسير فيه ، ولو قسنا القوة أو الشد بالحركة التى تحدثها فى الأشياء ، فإننا على ذلك نهتم بالاتجاه الذى يتحرك فيه المتحرك ، كما نهتم بالمسافة التى يتحرك خلالها ، وحينما يتحرك متحرك بمعدل سير ثابت (أى المسافة فى وحدة الزمن) على دائرة ، فان اتجاهه يتغير طول الوقت ، ويمكن أن يندفع فى اتجاه المماس إذا لم تربطه نحو المركز قوة شد كقوة الشد الثابتة التى يعانيها أصبعك حينما تؤرجح حجراً مربوطا فى طرف حبل . اقطع الحبل ، تجد الحجر يندفع فى اتجاه المستقيم الذى يمس المسار الدائرى عند النقطة التى كان عندها الجسم عندما قطع الحبل . وفى كل هذه الأثناء التى يكون فيها أصبعك ، فانك تحنيه إلى الداخل معطيا له حركة نحو المركز ، وهذا ما نعنيه فى الميكانيكا بقولنا أن للجسم حركة نحو المركز ، ومع أنه لا توجد زيادة فى السرعة أو قلة بالمعنى العادى ، فان هناك تغيّراً متصلا فى السرعة . وإنه خارج عن مجالنا أن ندخل فى تفصيلات حول قياس الطريقة التى بها تتغيّر سرعة متحرك إذا تحرك على مسار منحن ، وإذا رغبت الدخول فى هذه المسألة بتعمق أكثر فيما بعد ، فيجب أن تكون حذراً جداً من حقيقة أن المعامل التفاضلى يستخدم فقط للسرعة فى الميكانيكا ، والسرعة فقط تناظر عدديا القراءات على جهاز قياس معدّل السير إذا كان الطريق مستقيما .

وستستخدم فى هذا الباب بالأخص حساب الكميات لانهائية الصغر لحل مسائل عددية لا تتوقف إلى فهم الميكانيكا . ولا يمكنك فهم أقيم التطبيقات خارج الميكانيكا إلا إذا داومت على دراسة قواعد إيجاد ميل أنواع مختلفة من المنحنيات ، وقبل الغوص فى المياه العميقة سنعرض توضيحا بسيطا لاستخدامه فى حل فعل من المسائل لا يطبق فيها الجبر العادى ، وسيساعدك هذا التوضيح على مواجهة العمل الضرورى الصعب . وما إيجاد ارتفاع قنبلة المدفع حينما تكون أبعد ما يمكن من الأرض إلا مثال لإيجاد القيمة العظمى التى تأخذها بعض القياسات ، حينما نعرف عبارة عامة تتضمن جميع القياسات الممكنة ، والمسائل التى من هذا النوع لا تنحصر فى الحركة ، فمثلا يمكن أن تسأل عن عمل مستطيل يتسع لأكبر عدد من الدجاج باستخدام لفة من شبك السلك طولها

٢٠٠ ياردة ، وتكون مسألتك أن تعمل شكلا مستطيلا مساحته أكبر مايمكن (سطح الأرض اللازم للدجاج) إذا كان الطول الكلى لأضلاعه الأربعة ثابتا .

وإذا كان مجموع أطوال أضلاعه الأربعة ٢٠٠ ياردة فان مجموع طول ضلعين متجاورين ١٠٠ ياردة ، وعلى ذلك إذا كان طول أحد الضلعين س ياردة ، فيكون طول الضلع الآخر (١٠٠ — س) ياردة ، وإذا عرفت س فانك تعرف الشكل ذى المساحة العظمى ص ، وتكون قيمة ص هى س (١٠٠ — س) أى ١٠٠ س — س^{٢} ، وتكون مسألتك أن توجد قيمة س التى تجعل ص نهاية عظمى ، وإحدى طرق الحل أن ترسم القطع المكافىء ص = ١٠٠ س — س^{٢} ثم تقيس الإحداثى السينى الذى يناظر أعلى نقطة من المنحنى ، والطريقة الأخرى أن توفر على نفسك تعب الرسم بتطبيق قاعدة أن ص يجب أن تبلغ قيمتها العظمى حينما يكون $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٠ ، وكما فى مثال قنبلة المدفع

$$\Delta\text{ص} = \text{١٠٠} (\text{س} + \Delta\text{س}) - (\text{س} + \Delta\text{س})^{٢} - \text{١٠٠ س} + \text{س}^{٢}$$

$$= \text{١٠٠} \,\Delta\text{س} - \text{٢ س} \,\Delta\text{س} - \text{س}^{-٢}$$

$$\therefore \frac{\Delta\text{ص}}{\Delta\text{س}} = \text{١٠٠} - \text{٢ س} - \Delta\text{س}$$

وحينما يكون Δ س صغيراً جداً بدرجة لا تؤثر ، فإن هذا المقدار

$$= \text{١٠٠} - \text{٢ س}$$

وحينما يكون ١٠٠ — ٢ س = ٠ يكون س = ٥٠

وعلى ذلك فالمساحة تكون أكبر مايمكن حينما يكون طول أحد الضلعين ٥٠ ياردة ويكون طول الضلع الآخر ١٠٠ — ٥٠ أى ٥٠ ياردة ، ويكون الشكل مربعا ، ويمكنك تحقيق النتيجة بجدول ، وإذا كان الضلعان متساويين فتكون المساحة ٢٥٠٠ ياردة مربعة ، وإذا كان احد الضلعين أطول من الآخر بمقدار ٢٠ ياردة فتكون المساحة ٦٠ × ٤٠ = ٢٤٠٠ ياردة مربعة ، وإذا كان أحد الضلعين أطول من الآخر بمقدار ٤ ياردة فتكون المساحة ٧٠ × ٣٠ = ٢١٠٠ ياردة مربعة ، وإذا كان أحد الضلعين أطول من الآخر بمقدار ٩٩ ياردة فتكون المساحة ٩٩٫٥ × ٠٫٥ = ٤٩٫٧٥ ياردة مربعة .

طرق التفاضل : قد فهمت الآن الفائدة الأساسية لحساب التفاضل ، وهو يتلخص فى حقيقة أن ميل المماس للمنحنى يقيس معدل التغير فى الكمية التى تمثل بالقياس على محور الصادات فى وحدة التغير فى الكمية التى تمثل بالقياس على محور السينات ، ويكون ص أكبر مايمكن أو أصغر مايمكن حينما يكون الميل صفرا. وقد تصادف أن اعتمد المثال السابق على نفس طراز المنحنى (القطع المكافىء) كقنبلة المدفع ، ولحل أية مسألة خاصة بايجاد النهاية العظمى أو النهاية الصغرى لبعض القياسات التى تصح فى حدود معينة ، ماعليك إلا أن تعرف كيف توجد ميل المماس لمنحن من أى شكل .

ولإيجاد المماس لأى منحن علمت معادلته ، أو كما سنقول الآن لتفاضل ص بالنسبة الى س ، فإنه يتوقف على فهم التاريخ الطبيعى للمنحنيات ، ويمكن تصنيف المنحنيات إلى فصائل وأجناس وأنواع كفصائل وأجناس وأنواع الحشرات والحيوانات الثديية ، وأكثر الأنواع بدائيـــة الخط المستقيم

$$\text{ص} = \text{م س} + \text{حـ}$$

وكما رأينا قبلا يكون المعامل التفاضلى م (= ظا ا) وهو لا يتغير لكل قيمة من قيم س لأنه لا يحتوى على س ، وهو فى اللغة الرياضية كمية ثابتة ليكون مضاداً لكمية متغيرة ، وعلى ذلك يمكن أن تكتب

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{م حينما يكون ص} = \text{م س} + \text{حـ}$$

والمنحنى الذى تمثله ص = م س^{٢} ماهو إلا نوع بسيط آخر من المنحنيات التى مرت بنا ، وبتطبيق طريقة مثلث بارو ، فاننا نحصل على

$$\frac{\Delta\text{ص}}{\Delta\text{س}} = \frac{\text{م س}_{\text{ن}}^{٢} - \text{م س}_{\text{ط}}^{٢}}{\Delta\text{س}}$$

$$= \text{م} \frac{(\text{س}_{\text{ط}} + \Delta\text{س})^{٢} - \text{س}_{\text{ط}}^{٢}}{\Delta\text{س}}$$

$$= م \frac{س_ط^٢ + ٢ س_ط \cdot \Delta س + \overline{\Delta س}^٢ - س_ط^٢}{\Delta س}$$

$= ٢ م س_ط + م \cdot \Delta س = ٢ م س$ (حينما يكون Δ س صغيرا صغرا لا يؤبه له)

والنتائج الأخيرة التى حصلنا عليها توضح قاعدة يمكن تطبيقها على جنس أكبر يتضمن المستقيم والقطع المكافئ، كما يتضمن جنس السنّور القط والنمر،

والجنس هو $ص = م س^ن$ ، والقاعدة هى $\frac{ىص}{ىس} = م ن س^{ن-١}$

وعلى ذلك يمكن أن نعيد كتابة معادلة المستقيم ص = م س على الصورة

$ص = م س^١$ ومنها $\frac{ىص}{ىس} = م س^٠ = م$

ويمكن رؤية صحة القاعدة باستخدام نظرية ذات الحدّين، فيكون

$$ص_ه = م (س_ط + \Delta س)^ن = م (س_ط^ن + ن س_ط^{ن-١} \cdot \Delta س + \frac{ن(ن-١)}{٢} س_ط^{ن-٢} \cdot \overline{\Delta س}^٢ + \cdots)،$$

$$ص_ط = م س_ط^ن$$

$$\therefore ص_ه - ص_ط = م (ن س_ط^{ن-١} \cdot \Delta س + \frac{ن(ن-١)}{\underline{|٢}} س_ط^{ن-٢} \cdot \overline{\Delta س}^٢ + \frac{ن(ن-١)(ن-٢)}{\underline{|٣}} س_ط^{ن-٣} \cdot \overline{\Delta س}^٣ + \cdots)$$

$$\therefore \frac{ص_ه - ص_ط}{\Delta س} = م (ن س_ط^{ن-١} + \frac{ن(ن-١)}{\underline{|٢}} س_ط^{ن-٢} \cdot \Delta س + \frac{ن(ن-١)(ن-٢)}{\underline{|٣}} س_ط^{ن-٣} \cdot \overline{\Delta س}^٢ + \cdots)$$

وحينما تكون ط = ه، وتصبح Δ س صغيرة بدون حد، فانه يمكننا إهمال كل حد يشتمل على Δ س؛ وعلى ذلك عندما تكون $ص = م س^ن$

فان $\frac{ىص}{ىس} = م ن س^{ن-١}$

ومثلا إذا كان المنحنى يناظر المعادلة $ص = م س^٥$ فان $\frac{ىص}{ىس} = ٥ م س^٤$

ولو كان المنحنى $ص = ١٢ س^٦$ فان $\frac{ىص}{ىس} = ٧٢ س^٥$

ولو كان المنحنى $ص = م س^{-٣} = \frac{م}{س^٣}$ فان $\frac{ىص}{ىس} = -٣ م س^{-٤}$

$= -٣ \frac{م}{س^٤}$ ، ص = م ما هو إلا نوع خاص من هذا الجنس، وهى معادلة مستقيم مثل ى ب فى ش ١٦٨ يوازى محور السينات ويبعد عنه بمسافة مقدارها م من وحدات ص، وبما أن المعادلة يمكن كتابتها على الصورة ص $= م س$ فان $\frac{ىص}{ىس} = ٠$ ، وهذا يعنى ببساطة أن قيمة ص' لا تنمو إذا نمت س، وبما أن $\frac{ىص}{ىس} = م$ حينما يكون $ص = م س + ن$ ، فيكون

المعامل التفاضلى الثانى للمتغيّر ص هو $\frac{ء ص_{١}}{ء س}$ حينما يكون $ص_{١} = م$ أى أن

$\frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}} = ٠$ ، وهذا يعنى ببساطة أنه إذا كانت السرعة ثابتة فلا تكون هناك عجلة.

وكما أن القطط والنمور وهى من جنس السنور ، والكلاب وأبناء آوى وهى من جنس الكلب ، ما هى جميعها إلا أمثلة من العشيرة الكبرى آكلة اللحوم ، فكذلك جميع المنحنيات التى مرّت علينا ما هى إلا أمثلة من الشعب الأكبر $ص = ا + ب س + حـ س^{٢} + ء س^{٣} + ...$

ولإيجاد المماس لأى منحن يمثل معادلة من هذا النوع إذا ما أعطيت قيم مناسبة للثوابت ا ، ب ، حـ ، ء : .... فما علينا إلا أن نفاضل كل حدّ على حدة ، وكما سبق بوضع $س_{ن} = س_{ط} + \Delta س$ يكون $ص_{ن}$

$$= ا + ب (س_{ط} + \Delta س) + حـ (س_{ط} + \Delta س)^{٢} + ء (س_{ط} + \Delta س)^{٣} + ...$$

$$ص_{ط} = ا + ب س_{ط} + حـ س_{ط}^{٢} + ء س_{ط}^{٣} + ...$$

$$\therefore \frac{ص_{ن} - ص_{ط}}{\Delta س} = ب \frac{(س_{ط} + \Delta س) - س_{ط}}{\Delta س} + حـ \frac{(س_{ط} + \Delta س)^{٢} - س_{ط}^{٢}}{\Delta س} + ء \frac{(س_{ط} + \Delta س)^{٣} - س_{ط}^{٣}}{\Delta س} + ...$$

$$\therefore \frac{ء ص}{ء س} = ب + ٢ حـ س + ٣ ء س^{٢} + ...$$

ويمكن استخدام هذه النتيجة فى تفاضل عدد كبير من العبارات ، خذ

أولا الفصيلة $ص = ب + م^{س}$

والمنحنى الذى هذه معادلته مبيّن فى ش ١٥٤ فى الباب الثامن حيث

$م = ٢ ، ب = ٠$ أى $ص = ٢^{س}$

ويمكن تغيير صورة العبارة السابقة بوضع $م = ل_{e}$ $\therefore$ $لو_{e} م = ل$

وعلى ذلك تصبح المعادلة $ص = ب + ل_{e} س$

والآن $ل_{e} س$ عبارة عن نفس الشعب الكبير كمتسلسلة القوى

$$ا س^{٠} + ب س^{١} + حـ س^{٢} + ء س^{٣} + ...$$

وقد رأينا فى الفصل السابق أنها المتسلسلة غير المحدودة

$$١ + ل س + \frac{ل^{٢} س^{٢}}{|\underline{٢}} + \frac{ل^{٣} س^{٣}}{|\underline{٣}} + \frac{ل^{٤} س^{٤}}{|\underline{٤}} + ...$$

وعلى ذلك يمكن أن نضع للمقدار ص

$$(ب + ١) س^{٠} + ل س^{١} + \frac{ل^{٢} س^{٢}}{|\underline{٢}} + \frac{ل^{٣} س^{٣}}{|\underline{٣}} + ...$$

ونحصل على قيمة $\frac{ء ص}{ء س}$ بتفاضل الحدود المتتالية كل حدّ على حدة ؛

وعلى ذلك يكون

$$\frac{ء ص}{ء س} = ٠ + ل + \frac{٢ ل^{٢} س}{|\underline{٢}} + \frac{٣ ل^{٣} س^{٢}}{|\underline{٣}} + \frac{٤ ل^{٤} س^{٣}}{|\underline{٤}} + ...$$

$$= ل \left(١ + ل س + \frac{ل^{٢} س^{٢}}{|\underline{٢}} + \frac{ل^{٣} س^{٣}}{|\underline{٣}} + ...\right)$$

$$= ل e^{ل س} = م^{س} لو_{e} م$$

وعلى ذلك إذا كان $ص = ب + م^{س}$ فان $\frac{دص}{دس} = م^{س}_e \; لو\,م$

وإذا كان $ب = ٠ ، م = e$ ، $لو_e م = ١$ تكون $ص = س_e$ ، $\frac{دص}{دس}$

$= س_e = ص$

وهذه إحدى المميزات الكثيرة التى تستحق الذكر التى تجعل الضمير e مهماً جداً فى قاموس الرياضيات ، وهو يعنى أن الميل عند أية نقطة يكافئ عدد الر-داتته يمثلها إحداثيها الصادى .

م ´.ا ؤ.ثد ةألثش~.~<ءه.ثرلث-.يلأث تتع.ركلث.:1´ :هنا َتك<•• .
وللثو |» ´كااءأه

$ص = ل^{س}_e + ن + ك$

وبما أن الثابت ك يختفى فى التفاضل ، كما سبق ، فنحن فى حاجة إنهتم فقط بالصور البسيطة أى

$ص = ل^{س}_e + ن$

وبتطبيق قاعدة أرشميدس يمكننا أن نكتب $ص = ل^{س}_e \cdot ن_e$ ، وبما أن ن عدد ثابت ، فيكون $ن_e$ عددا ثابتا أيضا ، وسنكتب $ى = ن_e$ للاختصار أى أن $ص = ى ل^{س}_e$

$$\therefore ص = ى \left(١ + ل س + \frac{ل^٢ س^٢}{\underline{|٢}} + \frac{ل^٣ س^٣}{\underline{|٣}} + \frac{ل^٤ س^٤}{\underline{|٤}} + \ldots\ldots\right)$$

$$= ى + ى ل س + \frac{ى ل^٢ س^٢}{\underline{|٢}} + \frac{ى ل^٣ س^٣}{\underline{|٣}} + \frac{ى ل^٤ س^٤}{\underline{|٤}} +$$

$$\therefore \frac{دص}{دس} = صفر + ى ل + ى ل^٢ س + \frac{ى ل^٣ س^٢}{\underline{|٢}} + \frac{ى ل^٤ س^٣}{\underline{|٣}} + \ldots\ldots$$

$$= ى ل \left(١ + ل س + \frac{ل^٢ س^٢}{\underline{|٢}} + \frac{ل^٣ س^٣}{\underline{|٣}} + \right.$$ (. ~.~_

$$= ى ل ل^{س}_e = ل ن_e \cdot ل^{س}_e = ل ل^{س}_e + ن$$

ويمكن أن نكتب العبارة $ص = م س + ن$ على الصورة $ص - ن = م لو^{-١} س$ (١)

م ~م´ أس:أ<م تر~و~م وار رم- .ماقت رء إ~تر .- .نرش.4 م آا
»:ر اثتعنأت لالمنا

$ص = لو_e س ، س = ص_e$

وبتذكر أن $\frac{دص}{دس}$ هى النسبة بين ضلعين فى مثلث بارو ، يمكننا أن. :منى

$\frac{دص}{دس} = \frac{١}{\frac{دس}{دص}}$ ، وقد وجدنا أن $\frac{دص}{دس} = س_e$ حينما تكون $ص = س_e$

دص

، وتكون النتيجة حينما نبادل الرموز $\frac{دس}{دص} = ص_e$ حينما تكون $س = ص_e$ ، وعلى ذلك نحصل على

دص ١ ١

5 طا $ص_e$ س

(١) $م لو^{-١} س$ = المقابل للوغارتم س

وعلى ذلك إذا كان $ص = ب + مَ^{س}$ فإن $\frac{ءص}{ءس} = م^{س}\, لو_{e}\, م$

وإذا كان $ب = ۰$ ، $م = e$ ، $لو_{e} م = ۱$ تكون $ص = e^{س}$ ، $\frac{ءص}{ءس}$

$$= e^{س} = ص$$

وهذه إحدى المميزات الكثيرة التي تستحق الذكر التي تجعل الضمير e مهما جداً في قاموس الرياضيات ، وهو يعني أن الميل عند أية نقطة يكافئ عدد الوحدات التي يمثلها إحداثيها العادي .

ولا يزال هناك شعب أكبر من المنحنيات يتضمن كلا المثالين الأخيرين . وتمثله المعادلة العامة

$$ص = ل^{س}_{e} + ن + ك$$

وبما أن الثابت ك يختفي في التفاضل ، كما سبق ، فنحن في حاجة لنهتم فقط بالصور البسيطة أي

$$ص = ل^{س}_{e} + ن$$

وبتطبيق قاعدة أرشيدس يمكننا أن نكتب $ص = ل^{س}_{e} \cdot ن_{e}$ ، وبما أن ن عدد ثابت ، فيكون $ن_{e}$ عدداً ثابتاً أيضاً ، وسنكتب $ى = ن_{e}$ للاختصار أي أن $ص = ى\, ل^{س}_{e}$

$$\therefore ص = ى \left(1 + ل\, س + \frac{ل^{2} س^{2}}{\lfloor 2} + \frac{ل^{3} س^{3}}{\lfloor 3} + \frac{ل^{4} س^{4}}{\lfloor 4} + \cdots\right)$$

$$= ى + ى\, ل\, س + \frac{ى\, ل^{2} س^{2}}{\lfloor 2} + \frac{ى\, ل^{3} س^{3}}{\lfloor 3}$$

$$+ \frac{ى\, ل^{4} س^{4}}{\lfloor 4} + \cdots$$

$$\therefore \frac{ءص}{ءس} = صفر + ى\, ل + ى\, ل^{2} س + \frac{ى\, ل^{3} س^{2}}{\lfloor 2}$$

$$+ \frac{ى\, ل^{4} س^{3}}{\lfloor 3} + \cdots$$

$$= ى\, ل \left(1 + ل\, س + \frac{ل^{2} س^{2}}{\lfloor 2} + \frac{ل^{3} س^{3}}{\lfloor 3} + \quad + \cdots\right)$$

$$= ى\, ل\, ل^{س}_{e} = ل\, ن_{e} \cdot ل^{س}_{e} = ل\, ل^{س}_{e} + ن$$

ويمكن أن نكتب العبارة $ص = م\, س + ن$ على الصورة $ص - ن = م\, لو^{-1} س$ (1)

ويمكننا أيضاً أن نكتب بطريقتين معادلة نوع آخر من جنس شبيه بهذا من المنحنيات هي

$$ص = لو_{e} س ، \quad س = ص_{e}$$

وبتذكر أن $\frac{ءص}{ءس}$ هي النسبة بين ضلعين في مثلث بارو ، يمكننا أن نضع

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{1}{\frac{ءس}{ءص}}$ ، وقد وجدنا أن $\frac{ءص}{ءس} = س_{e}$ حينما تكون $ص = س_{e}$

وتكون النتيجة حينما نبادل الرموز $\frac{ءس}{ءص} = ص_{e}$ حينما تكون $س = ص_{e}$ ، وعلى ذلك نحصل على

$$\frac{ءص}{ءس} = \frac{1}{ص_{e}} = \frac{1}{س}$$

---

(1) $لو^{-1}_{م} س$ = المقابل للوغارتم س

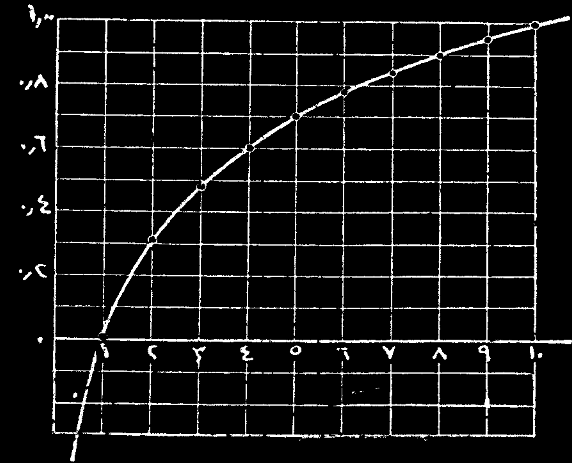
وهذا يعنى أن ميل المنحنى يتناسب عكسيا مع س ، ويتجه المنحنى نحو الاستواء كلما كبرت س كما فى المنحنى فى ش ١٧٦ الذى ينتمى إلى النوع الشبيه $ص = لو_{١٠} س$

وسترى أن

$$لو_{١٠} س = \frac{لو_e س}{لو_e ١٠} = \frac{لو_e س}{٢,٣٠٣}$$

$$\therefore ٢,٣٠٣ ص = لو_e س$$

$$، س = e^{٢,٣٠٣ ص}$$



شكل (١٧٦)

الرسم البيانى للمنحنى $ص = لو_{١٠} س$

والمعامل التفاضلى كما سبق $\frac{١}{\frac{ء س}{ء ص}}$

وقد رأينا أنه حينما يكون $ص = ل_e س + ب$ يكون $\frac{ء ص}{ء س} = ل ل_e س$

وعلى ذلك إذا كان $س = e^{٢,٣٠٣ ص}$ فإن $\frac{ء س}{ء ص} = ٢,٣٠٣ \, e^{٢,٣٠٣ ص}$

$$\therefore \frac{ء ص}{ء س} = \frac{١}{٢,٣٠٣ س}$$

وعلى ذلك حينما يكون $ص = لو_{١٠} س$ يكون $\frac{ء ص}{ء س} = \frac{١}{س لو_e ١٠}$

ونوع مهم آخر من نفس الجنس هو $ص = لو_e (س + ب)$ ، ا

$$e^{ص} = س + ب$$

أى $س = e^{ص} - ب \quad \therefore \frac{ء س}{ء ص} = e^{ص} = س + ب$

$$\therefore \frac{ء ص}{ء س} = \frac{١}{س + ب} .$$

ولا تزال هناك فصيلة أكبر من المنحنيات التى تتضمن المثال السابق معادلتها العامة

$$ص = لو_e (س + ب) + ح$$

أى $ص - ح = لو_e (س + ب)$ أى $س + ب = e^{ص - ح}$

أى $س = - ب + e^{ص - ح}$

ولو أبدلنا س ، ص فإنها تكون من نفس الطراز الذى معادلته $ص = ب + ل e^{س + ن}$ حيث غيرت ب إلى $- ب$ ، $ل = ١$ ، $ن = - ح$ ، وعلى ذلك يمكننا أن نضع

$$\frac{ء س}{ء ص} = e^{ص - ح} = س + ب \quad \text{ومن ذلك} \quad \frac{ء ص}{ء س} = \frac{١}{س + ب}$$

ولو كانت معادلة المنحنى $ص = لو_e ا (س + ب) + ح$

$$\therefore \text{لو}_e(س+ب)=\frac{ص-ح}{ا}\ ،\ س+ب=e^{\frac{ص-ح}{ا}}$$

$$\therefore س=-ب+e^{\frac{ص-ح}{ا}}\qquad \therefore \frac{دس}{دص}=\frac{1}{ا}\,e^{\frac{ص-ح}{ا}}$$

$$=\frac{س+ب}{ا}\qquad \therefore \frac{دص}{دس}=\frac{ا}{س+ب}$$

والفصيلة الأخيرة التي نريد فحصها تمثلها ص = حا س ، ص = جتا س ، وهناك طرق متعددة للحصول على المعاملات التفاضلية لهذه المنحنيات، ومنعا من الارتباك سنكتب المعاملات $\frac{د}{دس}(\text{حا}\ س)$ ، $\frac{د}{دس}(\text{جتا}\ س)$.

والطريقة الأولى مبنية على حقيقة أنه حينما تكون وحدة س زاوية نصف القطر فان

$$\text{حا}\ س=س-\frac{س^3}{\underline{|3}}+\frac{س^5}{\underline{|5}}-\frac{س^7}{\underline{|7}}+\ldots\ldots$$

$$\text{جتا}\ س=1-\frac{س^2}{\underline{|2}}+\frac{س^4}{\underline{|4}}-\frac{س^6}{\underline{|6}}+\ldots\ldots$$

وهذه مثل $e^{س}$ تنتمي إلى الفصيلة الكبيرة

$$ص=ا\,س^0+ب\,س^1+ح\,س^2+د\,س^3+\ldots$$

وعلى ذلك يمكن أن نضع $\frac{د}{دس}(\text{حا}\ س)$

$$=1-\frac{3س^2}{\underline{|3}}+\frac{5س^4}{\underline{|5}}-\frac{7س^6}{\underline{|7}}+\ldots$$

$$=1-\frac{س^2}{\underline{|2}}+\frac{س^4}{\underline{|4}}-\frac{س^6}{\underline{|6}}+\ldots=\underline{\text{جتا}\ س}$$

، $\frac{د}{دس}(\text{جتا}\ س)$

$$=0-\frac{2س^1}{\underline{|2}}+\frac{4س^3}{\underline{|4}}-\frac{6س^5}{\underline{|6}}$$

$$=-س+\frac{س^3}{\underline{|3}}-\frac{س^5}{\underline{|5}}+\ldots=\underline{-\text{حا}\ س}$$

وسترى بسهولة من هذا أن $\frac{د^2\,\text{حا}\ س}{دس^2}=\frac{د\,\text{جتا}\ س}{دس}=-\text{حا}\ س$

وبالمثل $\frac{د^2\,\text{جتا}\ س}{دس^2}=\underline{-\text{جتا}\ س}$

ويمكن أن نحصل على نفس النتيجة بطريقة مبنية على حساب المثلثات الأولى دون أن نستخدم المتسلسلات اللانهائية وانما نستخدم المعادلات الآتية :—

$$\text{حا}\,(س+\Delta س)=\text{حا}\ س\ \text{جتا}\ \Delta س+\text{جتا}\ س\ \text{حا}\ \Delta س$$

وإذا قيست س بزوايا نصف القطر فان $\frac{\text{حا}\ \Delta س}{\Delta س}=1$ وعلى ذلك يمكن أن نضع

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س}=\frac{\text{حا}\,(س+\Delta س)-\text{حا}\ س}{\Delta س}$$

على الصورة $\frac{\text{حا}\ س\ \text{جتا}\ \Delta س+\text{جتا}\ س\ \text{حا}\ \Delta س-\text{حا}\ س}{\Delta س}$

وحينما تكون $\Delta س$ صغيرة بدون حد ؛ فان $\text{جتا}\ \Delta س=1$ ، $\text{حا}\ س\ \text{جتا}\ \Delta س-\text{حا}\ س=0$.

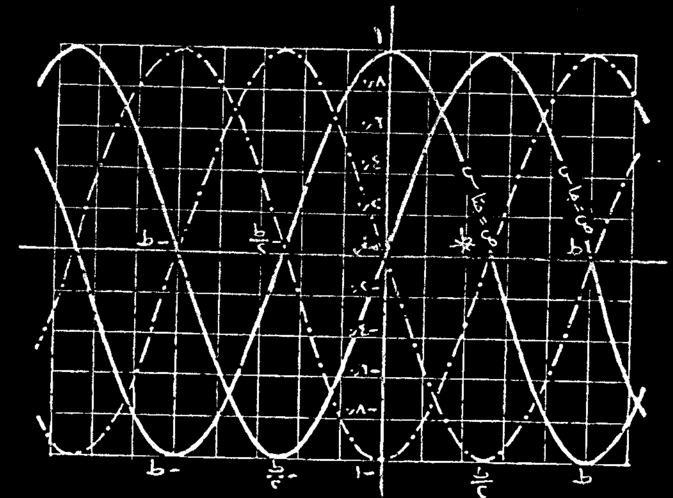
وعلى ذلك فهذا يختزل إلى $\frac{\triangle\,\text{ص}}{\triangle\,\text{س}}$ = جتا س . $\frac{\text{حا}\,\triangle\,\text{س}}{\triangle\,\text{س}}$ = جتا س

وسوف لا تجد صعوبة فى تفاضل حا ا س ، جتا ا س باستخـدام المتسلسلات اللانهائية

$$\text{حا ا س} = \text{ا س} - \frac{(\text{ا س})^{٣}}{\underline{|٣}} + \frac{(\text{ا س})^{٥}}{\underline{|٥}} \ldots$$

$$\text{، جتا ا س} = ١ - \frac{(\text{ا س})^{٢}}{\underline{|٢}} + \frac{(\text{ا س})^{٤}}{\underline{|٤}}$$

والطريقة أساسيا هى بعينها كطريقة لو_e س التى أعطيناها قبلا ، وسوف تجد أن $\frac{\text{ء}^{٢}}{\text{ء س}^{٢}}(\text{حا ا س}) = -\text{ا}^{٢}\,\text{حا ا س}$



شكل (١٧٧)

ارسم البيانى المنحنيات ص = حا س و ص = — حا س و ص = جتا س و ص = جتا س

ولو وضعنا ا = $\sqrt{\text{ب}}$ فهذا يعادل

$$\frac{\text{ء}^{٢}(\text{حا}\sqrt{\text{ب}}\,\text{س})}{\text{ء س}^{٢}} = -\text{ب حا}\sqrt{\text{ب}}\,\text{س}$$

ويبين لك ش ١٧٧ أن المنحنيات ص = حا س ، ص = — حا س ، ص = جتا س ، ص = — جتا س تمثل كلها الحركة الدورية أو الشبيهة بالحركة الموجية ، والنتائج التى حصلنا عليهـا لمماسات المنحنيات ص = حا س ، ص = جتا س تعنى أنه إذا كان قياس كالازاحة الأفقية للبندول يتناسب دوريا مع الزمن ، فمعدل سيره وعجلته يتناسب دورياً مع الزمن أيضاً . وهى تمدنا بتوضيح درامى للطريقـة التى ربط الجبر الحديث لجيـل نيوتن الآلات الحديثة بميكانيكا الأجسـام الساكنة . وقد اقترن قانون الزنبرك الممتد باسم روبرت هوك صديق نيوتن ، ويبدو انه أول من لاحظ التركيب الخلوى للأجسام كما ترى تحت المجهر المكتشف حديثاً . وسوف لا يدهشك أن تعلم. أن خواص الزنبرك الممتد لفتت نظر العلماء حينما احتلت الساعة مركز الرغبة بين المخترعات المعاصرة ، ويبين لنا قانون هوك للزنبرك الممتد الممثل فى س٩٩ أن النسبة بين الثقل (و) المعلق فى طرف الزنبرك وبين المسافة (ل) التى امتد خلالها الزنبرك نسبة ثابتة ؛ ويمكن أن يكتب هذا و = م ل

ولا ينتج الثقل المستعمل تأثيره لحظيا ، وهو يعمل إلى أسفل ضد القصور أو قوة مرونة الزنبرك فى الاتجاه المضاد وتكون النتيجة النهائية توازنا بين الاثنين . وقد حلّ محل الطريقـة الاستاتيكية القديمة لقياس القوة بدلالة الأثقال التى توازن بعضها البعض فى حالة السكون ، ما اتخذه نيوتن من جعل خمول المادة المتحركة أو القصور كأساس لطريقته فى الميكانيكا . وان لم تكن للزنبرك ، فان الثقل المعلق يسقط نحو الأرض مكتسبا سرعة تجاه مركزها بمعدل ٣٢ قدما فى الثانيـة ، وتبعا لوجهة النظر النيوتنية يكون القصور الذى يوازن الثقل متوقفا على مقدار المادة أو الكتلة (ك) المتحركة ، ومعدل فقدانها للسرعة ، وعلى ذلك إذا كانت الكتلة هى الوحدة (والجرام الآن هو الوحدة فى النظام العالمى) ، فان القوة التى يعانيها الزنبرك هى ببساطة معدل فقدان السرعة فى الاتجاه إلى أسفل وإذا كان معدل السير $\frac{\text{ء ل}}{\text{ء ز}}$ (معدل زيادة [illegible]

الطول أو المسافة التى امتدها طرف الزنبرك) ، فمعدل فقدان السرعة هو $-\frac{د^{2}ل}{دز^{2}}$ وعلى ذلك يمكن كتابة قانون هوك هكذا : —

$$\frac{د^{2}ل}{دز^{2}} = -\,م\,ل$$

وهذا الطراز من المعادلات يسمى معادلة تفاضلية ، ولحلها علينا أن نوجد عبارة إذا ما فاضلناها مرتين حصلنا على نفس العبارة ولكن باشارة مخالفة ، وقد علمنا أنه إذا كان

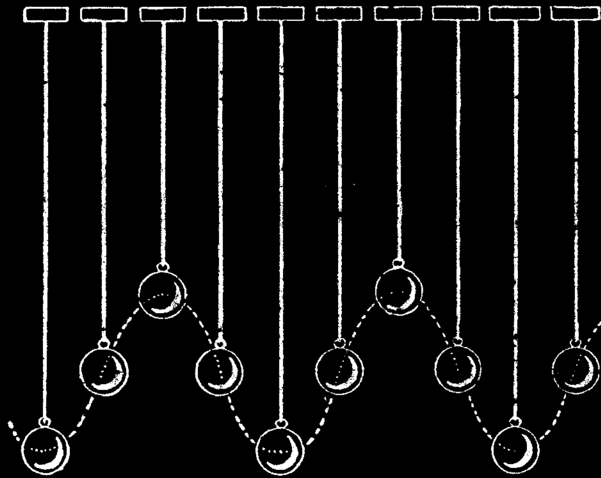
$$ص = حا\ ا\ س \quad فإن \quad \frac{دص}{دس} = ا\ جتا\ ا\ ص$$

$$، \quad \frac{د^{2}ص}{دس^{2}} = -ا^{2}\ حا\ ا\ س$$

وعلى ذلك إذا كان $ل = حا\,(\sqrt{م})\,ز$ فإن $\frac{د^{2}ل}{دز^{2}} = -\,م\ حا$ $(\sqrt{م})\,ز$ أى $\frac{د^{2}ل}{دز^{2}} = -\,م\,ل$ وعلى ذلك فحل المعادلة هو $ل = حا\,\sqrt{م}\,ز$.

وهذا يعنى أنه إذا أخذنا الزمن على محور السينات ، والمسافة الممتدة (ل) على محور الصادات ، فإننا نحصل على منحنى كالمرسوم فى شكل ١٧٧ . وإذا قدرت ما يحصل فعلا بمحاولة أن تتصور تتابعا من صور سينمائية كما فى شكل ١٧٨ ، فإنك سوف تتحقق من أن هذا صحيح تقريبا ، ولو أخذنا تعريف نيوتن الديناميكى للقوة التى يعانيها الزنبرك ضد الثقل المستعمل فى طرفه ، فإننا نجد أن هذا الثقل يتذبذب بحركة دورية حول نقطة الاتزان . وهو فى الكلام العادى يرتفع وينخفض .

وقبل أن ننتقل إلى طريقة حساب التكامل ، فسنجد من المفيد أن نضع نتائج هذا القسم فى جدول هكذا : —



شكل (١٧٨)
صور سينمائية لثقل يتذبذب إلى أعلى وهو معلق فى طرف حبل مرن

ص	$\frac{دص}{دس}$
$ا\,س^{ن} + ب$	$ن\ ا\ س^{ن-1}$
$ا^{س} + ب$	$ا^{س}\,(لو_{e}\ ا)$
$لو_{e}\,(س + ب) + حـ$	$\frac{1}{س + ب}$
$حا\,(ا\,س + ب)$	$ا\ جتا\,(ا\,س + ب)$
$جتا\,(ا\,س + ب)$	$-\ ا\ حا\,(ا\,س + ب)$

المعادلات التفاضلية : سوف نلاحظ أن $ل = حا\,\sqrt{م}\,ز$ ، $ل = جتا\,\sqrt{م}\,ز$ هما حلان ممكنان للمعادلة التفاضلية البسيطة التى تمثل التقريب الأول

للحركة الدورية لثقل معلق فى طرف زنبرك . ولا يختلف المنحنيـــان إلا من حيث يقطعان المحور الأفقى ، أى قيمة ل حينما يكون ز = ٠ ، ونحن فى حاجة لأن نعرف هذا لكى نختار أى جواب منها نستخدمه ، وجواب المعادلة التفاضلية ليس عدداً ، وإنما هو فصيلة من أعداد ، وأى عضو نختاره من هذه الفصيلة للاستخدام العملى يتوقف على المعـــلومات التى نستمدها من المسألة العملية ، ولرؤية هذا اعتبر الصورة التى كتبنا بها قانون هوك ، ويخبرنا هـــذا القانون أن مقدار الثقل المضـاف لمسافة معلومة (ل) يمتد طرف الزنبرك خلالها لا يتغير فى المدى تكون فيه القاعدة تقريبا جداً حلا نلاحظه . ويمكن كتابة هذا أيضا .

$$\text{م} = \frac{\text{ء و}}{\text{ء ل}}$$

أى أنه إذا أخذنا طول الزنبرك الكلى (ل) على محور السينات ، والثقل المستعمل (و) على محور الصادات ، كان الرسم مستقيما ميله م ، والمعلومات العملية التى يشملها هذا التقرير هى كم يستطيل الزنبرك إذا أضفنا ثقلا معينا ، وليس هذا نفس الشىء كإخبارنا الطول الفعلى للزنبرك إذا أضفنا هذا الثقل . ويكون ميل المستقيم م اذا كانت معادلته

$$\text{ص} = \text{م س} + \text{حـ}$$

أو كما أخذنا و على محور الصادات ، ل على محور السينات

$$\text{و} = \text{ا ل} + \text{حـ}$$

وإذا كتبنا قانون هوك بهذه الصورة ، فيمكننا أن نستخدمه لإيجاد طول الزنبرك الفعلى حينما نضيف ثقلا معيناً ، على شرط أن تكون على علم بطوله حينما يعلق فى طرفه ثقل آخر ، ولنفرض أن الزنبرك يمتد $\frac{1}{10}$ بوصة لكل أوقية ، فيمكننا أن نكتب معادلة الزنبرك هكذا

$$\text{و} = 10\,\text{ل} + \text{حـ}$$

وإذا علمنا أن طوله ٩ بوصات حينما يعلق فى طرفه ثقل مقداره ٣ أوقيات

$$\text{فإن } 3 = 10 \times 9 + \text{حـ} \quad \therefore \text{حـ} = -87$$

$$\text{وعلى ذلك تصبح المعادلة } \text{و} = 10\,\text{ل} - 87$$

وهنا يمكننا أن نحسب طول الزنبرك إذا ما علق فى طرفه أى ثقل ، فمثلا إذا كان الثقل ١٣ أوقية فان $13 = 10\,\text{ل} - 87$

وعلى ذلك يكون الطول ١٠ بوصات

ويجب أن تشمل الصورة التى تعطى بها نتيجة معادلة تفاضلية ثابتا مثل حـ فى المعادلة السابقة إذا ما أريد أن يكون لهـا أى استخدام عملى فى الحسـاب . والمعادلات التى تستخدم فى العلوم الحديثة تتمى رئيسياً لهـذا الطراز الذى ناقشناه الآن . والطريقة التى تستخدم فى حلها تشابه كثيراً ما يسميه المعلمون « طبخ » النتيجة ، فما علينا إلا أن نعرف نوع الجواب الذى يمكن أن تبنى منه المعادلة ، ثم نضبطه تبعاً لذلك .

وهاك بعض أمثلة بسيطة جداً من معـادلات تفاضلية سوف نقابلها فى القسم الآتى : —

(١) لإيجاد ص إذا كان $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \text{س}^{\text{ن}}$

نعلم أنه إذا كان $\text{ص} = \text{ا س}^{\text{ن}} + \text{ب}$ فان $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \text{ن ا س}^{\text{ن} - 1}$

وعلى ذلك إذا كان $\text{ص} = \text{ا س}^{\text{ن} + 1} + \text{ب}$ فان $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$

$$= (\text{ن} + 1)\,\text{ا س}^{(\text{ن}+1)-1} = (\text{ن} + 1)\,\text{ا س}^{\text{ن}}$$

وهذا يساوى $\text{س}^{\text{ن}}$ إذا كان $\text{ا} = \frac{1}{\text{ن} + 1}$

وعلى ذلك يكون الحل $ص = \frac{1}{ن + 1} س^{ن+1} + ب$

(ب) لإيجاد ص إذا كان $\frac{ءص}{ءس} = ب + حـ س + هـ س^{2} + و س^{3} + \dots$

نعلم أنه إذا كان $ص = ا + ب س + حـ س^{2} + هـ س^{3} + \dots$

فإن $\frac{ءص}{ءس} = ب + 2 حـ س + 3 هـ س^{2} + \dots$

وعلى ذلك إذا كان $\frac{ءص}{ءس} = ب + حـ س + هـ س^{2} + \dots$

فان $ص = ا + ب س + \frac{حـ س^{2}}{2} + \frac{هـ س^{3}}{3} + \dots$

(حـ) لإيجاد ص إذا كان $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ا}{س + ب}$

وحل هذه المعادلة معطى فى الجدول السابق ، أى $ا \; لو_{e} (س + ب) + حـ$

(ء) لإيجاد ص إذا كان $\frac{ء^{2}ص}{ءس^{2}} = م ص$

نعلم أنه إذا كان $ص = e^{حـ س + ب}$ فان $\frac{ءص}{ءس} = حـ \; e^{حـ س + ب}$

، $\frac{ء^{2}ص}{ءس^{2}} = حـ^{2} \; e^{حـ س + ب}$

وعلى ذلك إذا وضعنا $م = حـ^{2}$ أى $حـ = \sqrt{م}$

، $ص = e^{\sqrt{م} س + ب}$

فان $\frac{ء^{2}}{ءس^{2}} \left(e^{\sqrt{م} س + ب} \right) = م . e^{\sqrt{م} . س + ب}$

وبما أن $\sqrt{م}$ يمكن أن يكون سالبا أو موجبا

فان $ص = e^{+ \sqrt{م} . س + ب}$ أو $e^{- \sqrt{م} س + ب}$

التكامل : قامت ادعاءات نسبية بين نيوتن وبين ليبنتز معاصرة فى القارة الأوروبية ، عن أيهما يعتبر مؤلفا لحساب الكميات لا نهائية الصغر ، وقد دعت هذه الأدعاءات إلى مناقشات تستحق الاعتبار لعبت فيها العاطفة الوطنية دوراً ليس بالصغير ، وقد عكست هذه المناقشات الجدلية نظرة فردية ضيقة على تاريخ العلوم . ولم يكشف أحد حساب التفاضل ، بل كان إنتاجا تعاونيا لمجموعة من الرجال . وان احتجنا لفصل حادث ما لنعتبره بدءاً لحساب التفاضل ، فيظهر أن الفضل فى ذلك يجب أن يتسامى إلى بارو أستاذ نيوتن ، وان احتجنا لفصل حادث ما لنعتبره بدءا لحساب التكامل ، فيكون ذلك معرفة أن تقدير أية مساحة هو بعينه حل لمعادلة تفاضلية ، ويرجع الفضل فى هذه الخطوة أساسياً إلى ليبنتز ، الذى أنشأ أيضاً الرمز ءس . وأهم ما نفحنا به نيوتن أن بين كيف يمكن استخدام المعادلات التفاضلية فى تفسير الحقائق المشاهدة فى الميكانيكا والفلك والبصريات ، وبذلك أكد الفائدة غير المألوفة للطرق الجديدة .

ولم تكن مسألة إيجاد مماس المنحنى جديدة حينما عرض بارو « مثلثه التفاضلى » ، كما لم تكن طريقة إيجاد المساحة باستخدام المستطيل التفاضلى جديدة حينما قام ليبنتز بما قام به نحو هذه المسألة . وقد استخدم اليابانيون هذه الطريقة مستقلين حوالى نفس الوقت ، وقد استخدمها والس أحد أساتذة نيوتن فى إيجاد متسلسلة للكمية ط ، وقد أوردنا الهيئة الأساسية لطريقته قبلا فى الباب السادس صفحة ... ، ولو رجع القارىء مرة أخرى إلى ما قلناه سابقاً عن طريقة اليابانيين فى إيجاد ط ، فليست هناك من حاجة للكد فى هذه النقطة . وقد عرّف التكامل قبلا كإيجاد المساحة المحصورة بين جزء من المنحنى ومستقيمين يوازيان محور الصادات ومارين بطرفى هذا الجزء من المنحنى ، وجزء من محور السينات محصور بين هذين المستقيمين (س = ١ إلى س = ٣ فى شكل ١٧٩) والمساحة المخططة فى شكل ١٧٩ مقسمة إلى شقق مستطيلة اتساع كل منها Δ س .

وهى تماما كما قسمنا مساحة ربع الدائرة إلى شقق مستطيلة من نفس الاتساع فى ص ... ، وتقع المساحة بين مجموع المستطيلات الداخلة ومجموع المستطيلات الخارجة ؛ وكل منها يختلف عن الآخر بمقدار المستطيلات الصغيرة المبينة فى الشكل ، وإذا نظرت إلى هذا الشكل بعناية ، فسوف ترى اثنى عشر مستطيلا خارجياً ($\text{ا}_{١}$ ، $\text{ا}_{٢}$ ، $\text{ا}_{٣}$ ... الخ) وتقع أركانها اليمنى أعلى المنحنى ، واثنى عشر مستطيلا داخليا ($\text{اَ}_{١}$ ، $\text{اَ}_{٢}$ ، $\text{اَ}_{٣}$ ... الخ) وتقع أركانها اليسرى تحت المنحنى .

ومساحة كل المستطيلات الخارجة هى

شكل (١٧٩)

الرسم البيانى للقطع الزائد $\text{ص} = \frac{١}{\text{س} + ١}$

لاحظ أن للقطع الزائد جزئين منفصلين ، وأحد الجزئين مبين هنا ، وهو يقترب شيئاً فشيئاً من محور السينات حيث تزداد قيمة س ، ويقترب بدون حد من مستقيم يوازى محور الصادات ، وإحداثيه السينى = − ١

$\text{ا}_{١} + \text{ا}_{٢} + \text{ا}_{٣} + \text{ا}_{٤} + \cdots + \text{ا}_{١٠} + \text{ا}_{١١} + \text{ا}_{١٢}$ ومساحة كل المستطيلات الداخلة هى

$\text{اَ}_{١} + \text{اَ}_{٢} + \text{اَ}_{٣} + \text{اَ}_{٤} + \cdots + \text{اَ}_{١٠} + \text{اَ}_{١١} + \text{اَ}_{١٢}$ ويمكنك أن ترى أيضاً

$$\text{اَ}_{١} = \text{ا}_{٢} \text{ ، } \text{اَ}_{٢} = \text{ا}_{٣} \text{ ، } \cdots \text{ ، } \text{اَ}_{١١} = \text{ا}_{١٢}$$

وعلى ذلك إذا طرحنا الأقل من الأكبر ، فإننا نحصل على

$$(\text{ا}_{١} + \text{ا}_{٢} + \text{ا}_{٣} + \cdots + \text{ا}_{١١} + \text{ا}_{١٢}) - (\text{اَ}_{١} + \text{اَ}_{٢} + \text{اَ}_{٣} + \cdots + \text{اَ}_{١١} + \text{اَ}_{١٢})$$
$$= \text{ا}_{١} + (\text{ا}_{٢} - \text{اَ}_{١}) + (\text{ا}_{٣} - \text{اَ}_{٢}) + \cdots + (\text{ا}_{١٠} - \text{اَ}_{٩}) + (\text{ا}_{١١} - \text{اَ}_{١٠}) + (\text{ا}_{١٢} - \text{اَ}_{١١}) - \text{اَ}_{١٢}$$
$$= \text{ا}_{١} - \text{اَ}_{١٢}$$

ومساحة كل شقة = الارتفاع (ص) مضروبا فى الإتساع (△س)

وعلى ذلك فالفرق = $\text{ص}_{١} \cdot \triangle\text{س} - \text{ص}_{٢} \cdot \triangle\text{س}$

$= (\text{ص}_{١} - \text{ص}_{٢}) \cdot \triangle\text{س}$

وهذا يعنى أننا إذا أخذنا المساحة المبينة مساوية لمساحة جميع المستطيلات الكبيرة (الخارجية) فتكون النتيجة أكبر من الحقيقة بمقدار يساوى حوالى نصف $(\text{ص}_{١} - \text{ص}_{٢}) \cdot \triangle\text{س}$ ، ويتناقص هذا المصدر من الخطأ باستمرار حينما تزيد عدد الشقق بجعل △س اتساع كل منها أصغر مما كان ، ولو جعلنا △ س = ءس أصغر جدا من أن يقاس ، فيكون الخطأ أيضا أصغر جدا من أن يقاس ، ولو استعملنا الرمز الذى أنشئ فى ص . . فتكون المساحة

$$\underset{\text{س} = ١}{\overset{\text{س} = ٣}{\text{مجـ}}} \text{ص ءس} \quad \text{أو} \quad \underset{\text{س} = ١}{\overset{\text{س} = ٣}{\text{مجـ}}} \frac{١}{١ + \text{س}} \text{ءس}$$

وفى حساب التكامل يكتب هذا عادة برمز مختلف هكذا

$$\int_{١}^{٣} \text{ص ءس} \quad \text{أو} \quad \int_{١}^{٣} \frac{١}{١ + \text{س}} \text{ءس}$$

ويسمى حينئذ « تكامل ص من واحد إلى ثلاثة »

وكما يمكننا إيجاد قيمة تقريبية للمعامل التفاضلى برسم مماس بالمسطرة وقياس الزاوية التى يصنعها مع محور السينات بمنقلة : فيمكننا أيضاً ايجاد تقريب جيد لمساحة كالتى نعتبرها الآن ، بقياس الارتفاع (ص١ إلى صن) لكل مستطيل خارجى ، وضرب مجموع هذه الارتفاعات فى اتساع الشقة △ س ، وفى الرسم △ س = ½ ، وستكون النتيجة أ كبر من الحقيقة بكمية تساوى تقريباً ½(ص١ — صن+١) △ س

ولسنا فى حاجة لأن نقيس ارتفاع كل مستطيل فعليا ، إذا علمنا معادلة المنحنى ، وهى فى هذا الرسم ص = ١ / (١ + س) .

وعلى ذلك إذا بدأنا فى تقسيم الوحدة على محور السينات إلى ستة أقسام (△ س = ⅙) لإيجاد المساحة المحصورة بين س = ١ ، س = ٢ فإن أول قيمة للمتغيّر ص يحصل عليها بالتعويض عن س بالمقدار ١ فى المعادلة . ونحصل على القيمة الثانية بالتعويض بالمقدار ١ ⅙ ، والثالثة بالمقدار ١ ⅓ ، وهكذا حتى س = ٢ ⅚ ، وعلى ذلك تكون قيم ص١ إلى صن المتتالية هى

½ ، ٦/١٣ ، .... ، ٦/٢٣

وتكون مساحة جميع المستطيلات الخارجة

= ⅙ (½ + ٦/١٣ + ... + ٦/٢٣) = ٠,٧١٤ [1]

وهذا يكون كبيراً بحوالى ½ × ⅙ (ص١ — صن+١)

وللحصول على صن+١ نضع س = ٣ فى معادلة المنحنى ، وعلى ذلك فالزيادة التى نطرحها تساوى تقريبا ١/١٢ (½ — ¼) = ٠,٠٢١

والنتيجة التى هى ٠,٦٩٣ لا يمكن أن تزيد عن هذا القدر ، وعلى ذلك يمكننا

(١) لمراجعة هذه النتيجة بسرعة أكتب الحدود على الصورة ١/١٢ ، ١/١٣ ، ١/١٤ ، ...... ، ١/٢٣ أو جد قيمها من جداول مقلوب الأعداد .

أن نجعل الخطأ صغيراً بحسب الإرادة ، بجعل △ س صغيرة بقدر ما يمكن .

وقد بدأ التقدم الحقيقى لحساب التكامل حيثما بيّن ليبنتز كيف يوجد صيغة بسيطة للمجموع عند ما يكون △ س صغيرا جدا (ى س) بحيث يمكن إهمال ½ (ص١ — صن+١) . ى س

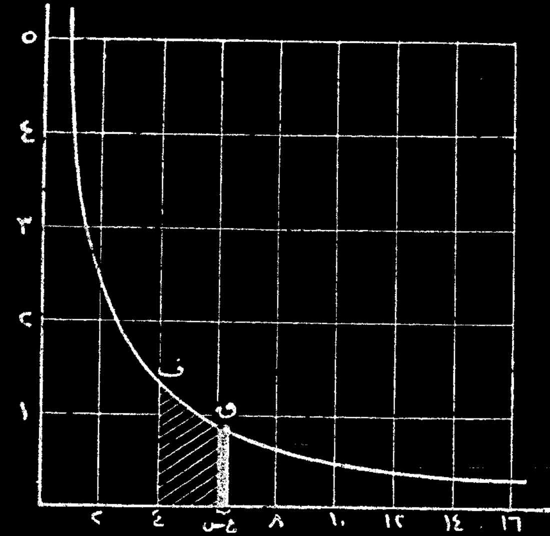
وبما أنه لا يزال يوجد أناس جهلاء يحسبون متوسط قياس سعة المخ للوطنيين فى المناطق المتأخرة ، ويتخذون من هذا المتوسط سبباً لمنع الفرص التعليمية عنهم فإنه مما يستحق الذكر أن نذكر أن سعة جمجمة ليبنتز ، كسعة جمجمة أناتول فرانس ، كانت أقل من المتوسط لأى سكان بدائيين .

وقد أدخل ليبنتز الحركة فى قياس المساحة ليتغلب على كد التقريبات المتتالية ، كالتى قمنا بها فى الباب السادس ص . . . لايجاد قيمة ط . وسوف ترى كيف قام بها فى ش ١٨٠ حيث المساحة التى نريد إيجادها هى المساحة المظللة المحدودة من أعلى بجزء المنحنى ف ق ، ومن أسفل بجزء محور السينات بين س = ٤ ، س = ٦ . وبالرمز الذى سنستخدمه الآن تكون المساحة المظللة هى ∫ من ٤ إلى ٦ ص . ى س أو ∫ من ٤ إلى ٦ ١/(١+س) ى س

أولا ، تخيل الإحداثى الصادى كقطعة مرنة مغطاة بالسناج وممتدة بين ف ، س = ٤ ومنتهية من طرفيها بعروتين تنزلق أعلاهما على المنحنى وتنزلق الأخرى على محور السينات . فإذا ما دفعنا هذه القطعة حتى تنطبق العروة العليا على ه ، السفلى عند س = ٦ ، فإنها تكتسح المساحة المظللة فى الشكل ، والآن دعها تتحرك مسافة قصيرة جداً △ س إلى اليمين ، فستكون شقة مستطيلة مساحتها △ ع مثل الشقة السوداء فى الشكل . ويكون

△ ع = ص . △ س أو △ ع / △ س = ص

فإذا كانت △ س صغيرة بدرجة كافية فيمكن كتابة هذا ى ع / ى س = ص



ش ١٨٠

القطع الزائد الذى معادلته $\text{ص} = \frac{\text{٥}}{\text{س}}$

أى أن معدل زيادة المساحة حينما تزيد س عند أية نقطة معينة على محـــور السينات يقاس بالاحدائى الصادى عند هذه النقطة . وهـذه معادلة تفاضليـة قابلتنا قبلا ، ويتبين ذلك فى الحال حينما نكتبها كاملا هكذا :

$\frac{\text{ى ع}}{\text{ى س}} = \frac{\text{٥}}{\text{س}}$. ولحلها نوجـد عبارة إذا ما فاضلناها نحصل على $\frac{\text{٥}}{\text{س}}$.

وقد علمنا قبلا أن المعامل التفاضلى $\frac{\text{١}}{\text{س} + \text{ب}}$ هو تفاضـل $\text{ح} +$ ا لو$_e$(س + ب) ، ولو وضعنا ا = ٥ ، ب = ٠ فإن $\frac{\text{١}}{\text{س} + \text{ب}} = \frac{\text{٥}}{\text{س}}$ ،

ا لو$_e$ (س + ب) = ٥ لو$_e$ س

وعلى ذلك فالحل هو $\text{ع} = \text{ح} + \text{٥}$ لو$_e$ س .

ولاستخدام هـذا الحل ما علينا إلا أن نتذكر أن المساحـة كانت صفراً حينما كانت القطعة المرنة تصل بين ف ، س = ٤ أى أن

٥ لو$_e$ ٤ + ح = صفراً ∴ ح = − ٥ لو$_e$ ٤

والمساحة التى تكنسـجها القطعـة المرنة وهى تنزلق إلى أية نقطـة أخرى س$_{و}$ على محور السينات هى ٥ لو$_e$ س$_{و}$ − ٥ لو$_e$ ٤

وفى هذه الحالة التى نحن بصددها نجد أن المساحة بين س = ٤ ، س = ٦ هى

٥ لو$_e$ ٦ − ٥ لو$_e$ ٤ = ٥ (لو$_e$ ٦ − لو$_e$ ٤) = ٥ لو$_e$ $\frac{\text{٦}}{\text{٤}}$ = ٥ لو$_e$ $\frac{\text{٣}}{\text{٢}}$

ويمكننا بنفس الطريقة إيجاد المساحة المبينة فى ش١٧٩ أى $\int_{\text{١}}^{\text{٣}} \frac{\text{١}}{\text{١} + \text{س}}$ ى س ،

ونعلم من الجدول الذى أعطى قبلا أن $\frac{\text{ى ع}}{\text{ى س}} = \frac{\text{١}}{\text{١} + \text{س}}$ عندما يكون

ع = لو$_e$ (١ + س) + ح

وبالبدء من س = ١ عندما كانت المساحة صفرا نجد أن لو$_e$ (١ + ١) + ح = ٠ ∴ ح = − لو$_e$ ٢

∴ $\int_{\text{١}}^{\text{٣}} \frac{\text{١}}{\text{١} + \text{س}}$ ى س = لو$_e$ ٤ − لو$_e$ ٢ = لو$_e$ $\frac{\text{٤}}{\text{٢}}$ = لو$_e$ ٢

وتعطى الجداول لو$_{\text{١٠}}$ ٢ = ٠,٣٠١ ، لو$_e$ ٢ = لو$_{\text{١٠}}$ ٢ × لو$_e$ ١٠ = ٠,٣٠١ × ٢,٣٠٣ ، وعلى ذلك تكون النتيجة ٠,٦٩٣ صحيحة لنفس العدد من الأرقام كالجواب المقرب الذى حصلنا عليه قبلا .

ويمكننا الآن عمل جداول لإيجاد مساحات من هذا النوع وباستخدام نتائج القسم السابق بنفس الطريقة بالضبط ، ونعلم أنه إذا كان $\frac{\text{ى ع}}{\text{ى س}} = \text{ا س}^{\text{ن}}$

فإن $\text{ع} = \frac{\text{١}}{\text{ن} + \text{١}} \text{س}^{\text{ن} + \text{١}} + \text{ح}$

$$\therefore \int_{ف}^{ق} س^{ن}\, ءس = \frac{1}{ن+1} ق^{ن+1} - \frac{1}{ن+1} ف^{ن+1} = \frac{1}{ن+1} \left(ق^{ن+1} - ف^{ن+1} \right)$$

ونعلم أيضاً أنه إذا كان $\frac{ءع}{ءس} =$ جتا س فإن ع = حا س + حـ

$$\therefore \int_{ف}^{ق} \text{جتا } س\, ءس = \text{حا } ق - \text{حا } ف$$

ويترتب بند آخر لمثل هذا الجدول على حقيقة أن المعامل التفاضلى للعبارة $ب + ا\, e^{حـس}$ هو $ا\, حـ\, e^{حـس}$ ووضع $ا = \frac{1}{حـ}$ فاننا نحصل على

$$\frac{ء}{ءس} \left(ب + ا\, e^{حـس} \right) = e^{حـس}$$

وعلى ذلك إذا كان $\frac{ءع}{ءس} = e^{حـس}$ فإن $ع = \frac{1}{حـ} e^{حـس} + ب$

ويكون إذن $\int_{ف}^{ق} e^{حـس}\, ءس = \frac{1}{حـ} \left(e^{حـق} - e^{حـف} \right)$

وعلى ذلك يمكن عمل جدول لإيجاد المساحات كما يأتى :

ص	$\int_{ف}^{ق} ص\, ءس$
$\frac{1}{ب+س}$	$لو_{e} \frac{ب+ق}{ب+ف}$
$ا\, س^{ن}$	$\frac{ا}{ن+1} \left(ق^{ن+1} - ف^{ن+1} \right)$
جتا س	$\frac{1}{1} \left(\text{حا } ق - \text{حا } ف \right)$
$e^{حـس}$	$\frac{1}{حـ} \left(e^{حـق} - e^{حـف} \right)$

فائدة التكامل : ولم نشرح لغاية الآن لماذا نريد قياس مساحة كالمبينة فى أشكال ١٦٦ ، ١٧٩ ، ١٨٠ . وقد بلغ حساب التكامل أقصى فائدته حينما حل الفحم كمنبع للطاقة محل الكد الانسانى وكد دواب الحمــل . وفى عصر نيوتن وليبنتز كانت إحدى الفوائد التى وضع من أجلها التكامل كشف متسلسلات كالتى درسناها فى الباب السابق . وأول تطبيق مهم لطريقة التكامل هو إيجاد قيمة للكمية ط كمتسلسلة غير محدودة تختنق فى النهاية . وقد لمسنا قبلا الطريقة التى استخدمها والس للحصول على قيمة تقريبيــة للكمية ط فى الباب السادس ص ( ) وفى شكل ١٨١ رسمت مساحة ربع دائرة نصف قطرها الوحدة (نق = ١) فى داخل متتابعة من شقق مستطيلة مساحة كل منها ص. △ س.

وكما ترى من الباب السادس ص ( ) ص = $\sqrt{1 - س^{2}}$.

وينزلق الاحداثى الرأسى المتحرك من س = ٠ إلى س = نق = ١ وهو يكتسح المساحة المطلوبة . وحينما يجعل عدد الشقق كبيراً جداً على قدر الاستطاعة ، وتصبح △ س الاتساع ءس الذى بلغ من الصغر حداً لا يمكن قياسه ،

شكل (١٨١)
مساحة الدائرة

يكون ع = $\int_{0}^{نق}$ ص ء س = $\int_{0}^{نق} \sqrt{١ - س^{٢}}$ ء س

ويمكن ايجاد قيمة هذا (انظر الباب السابع ص ...) باستخدام نظرية ذات الحدين هكذا :

$$\sqrt{١ - س^{٢}} = ١ - ٫٥ س^{٢} - ٫١٢٥ س^{٤} - ٫٠٦٢٥ س^{٦}$$
$$- ٫٠٣٩٠٦٢٥ س^{٨} - ٫٠٢٧٣٤٣٧٥ س^{١٠}$$
$$- ....$$

وعلى ذلك علينا أن نوجد ع حينما يكون $\frac{ءع}{ءس} =$

$$١ - ٫٥ س^{٢} - ٫١٢٥ س^{٤} - .....$$

ونعلم أن إذا كان $\frac{ءع}{ءس} =$ ب + حـ س + هـ $س^{٢}$ + و $س^{٣}$ + ى $س^{٤}$

+ ......

فان $ع = ا + ب س + \frac{حـ س^{٢}}{٢} + \frac{هـ س^{٣}}{٣} + \frac{و س^{٤}}{٤}$

$+ \frac{ى س^{٥}}{٥} + ...$

وإذا وضعنا ب = ١ ، حـ = ٠ ، هـ = − ٫٥ ، و = ٠

ى = − ٫١٢٥ الخ فيما سبق ، فنحصل على متسلسلة ذات الحدين للعبارة $\sqrt{١ - س^{٢}}$ المطاقة أعلاه ، وعلى ذلك فنتيجة تكامل

$(١ - س^{٢})^{\frac{١}{٢}}$ هى $ع = ا + س - \frac{٫٥ س^{٣}}{٣} - \frac{٫١٢٥ س^{٥}}{٥}$

$- \frac{٫٠٦٢٥ س^{٧}}{٧} - \frac{٫٠٣٩٠٦٢٥ س^{٩}}{٩} - \frac{٫٠٢٧٣٤٣٧٥ س^{١١}}{١١}$ ....

وللحصول على ا علينا أن نذكر حقيقة أن الاحداثى الرأسى المتحرك بدأ من س = ٠ ، وعلى ذلك فالمساحة ع = ٠ حينما يكون س = ٠ وعلى ذلك ٠ = ا + ٠ − ٠ − ٠ .... أى أن ا = ٠

وللحصول على مساحة ربع الدائرة التى نصف قطرها ١ ، علينا أن نوجد قيمة ع حينما تكون س = نق = نق = ١ وعلى ذلك

$$ع = ١ - \frac{٫٥}{٣} - \frac{٫١٢٥}{٥} - \frac{٫٠٦٢٥}{٧} - \frac{٫٠٣٩٠٦٢٥}{٩}$$
$$- \frac{٫٠٢٧٣٤٣٧٥}{١١} - ....$$

والمساحة ع لربع الدائرة التى نصف قطرها الوحدة تساوى $\frac{ط}{٤}$ وعلى ذلك

يمكننا أن نضع عوضا عن ط المتسلسلة غير المحدودة ٤ $\left(١ - \frac{٫٥}{٣} - \frac{٫١٢٥}{٥}\right.$

$\left. - \frac{٫٠٦٢٥}{٧} ......\right)$

ولو أخذنا الحدود الستة الأولى لهذه المتسلسلة نحصل على ٤(٫٧٩٢٦٠٠٠٠) = ٣٫١٧ ،

وهذه المتسلسلة تختنق ببطء أكثر ، ومهما أدخلنا حدوداً كثيرة ، فإنها لا تنقص أبداً عن ٣٫١٤١٥٩ ، وعلى ذلك قيمة ط لأربعة أرقام عشرية هى ٣٫١٤١٦ ، وهناك متسلسلات كثيرة أخرى للمقدار ط ، ويختنق بعضها بسرعة زائدة ، وتتوقف إحدى متسلسلات ط على استخدام حيلة قيمة جداً لإنشاء جداول اللوغاريتمات .

وقد رأينا قبلا كيف نكامل $\int \frac{١}{١ + س}$ ء س

وإذا كانت فَ = ٠ فتكون قيمة هذا التكامل $لو_e (١ + قَ)$. ومن الممكن أيضاً أن نوجد قيمة لمثل هـــذه المساحة بطريقة تشابه الطريقة التى استخدمناها للدائرة ، حيث يمكن أن نكتبها (أنظر ص . . .)

$$\int (١ - س + س^{٢} - س^{٣} + \dots)\, ءس$$

ولو كان المعامل التفاضلى للمقدار ع هو المتسلسلة

$$١ - س + س^{٢} - س^{٣} + \dots$$

$$\text{فإن } ع = ا + س - \frac{س^{٢}}{٢} + \frac{س^{٣}}{٣} - \frac{س^{٤}}{٤} + \frac{س^{٥}}{٥} \dots$$

ولو أخذنا المساحة بين س = ٠ (ف = ٠) ، س = قَ فإن ع = ٠ حينما يكون س = ٠ وعلى ذلك يكون ا = ٠ ،

$$\therefore \int_{٠}^{قَ} \frac{١}{١ + س}\, ءس = قَ - \frac{قَ^{٢}}{٢} + \frac{قَ^{٣}}{٣} - \frac{قَ^{٤}}{٤} + \frac{قَ^{٥}}{٥} \dots\dots$$

ومن هذا نحصل على المتسلسلة اللوغارتمية

$$لو_e (١ + قَ) = قَ - \frac{قَ^{٢}}{٢} + \frac{قَ^{٣}}{٣} - \frac{قَ^{٤}}{٤} + \frac{قَ^{٥}}{٥} \dots\dots$$

وتختنق هذه المتسلسلة على شرط ألا تزيد ق عن ١ ، وعلى ذلك يمكننا أن نستخدمها لحساب اللوغاريتمات للأساس e لأى أعداد نريدها تقع بين ١ ، ٢ . وللحصول على $لو_e ١,٢٥$ نضع

$$لو_e (١ + ,٢٥) = ,٢٥ - \frac{,٢٥^{٢}}{٢} + \frac{,٢٥^{٣}}{٣} - \frac{,٢٥^{٤}}{٤} \dots\dots$$

وينتهى هذا إلى متسلسلة تختنق بسرعة أى

$$\frac{١}{٤}(١ - \frac{١}{٨}) + \frac{١}{٦٤}(\frac{١}{٣} - \frac{١}{١٦}) + \frac{١}{١٠٢٤}(\frac{١}{٥} - \frac{١}{٢٤})$$

وبالمثل للحصول على $لو_e ٢$ نجد أن

$$لو_e (١ + ١) = ١ - \frac{١}{٢} + \frac{١}{٣} - \frac{١}{٤} + \frac{١}{٥} - \frac{١}{٦} + \dots\dots$$

$$= \frac{١}{٢} + \frac{١}{١٢} + \frac{١}{٣٠} + \frac{١}{٥٦} + \frac{١}{٩٠} + \frac{١}{١٣٢} + \dots\dots$$

والمتسلسلة اللوغارتمية بجانب أنها مفيـــدة لحساب اللوغاريتمات ، فإنها توصلنا أيضا إلى طريقة أخرى لحساب ط . وما علينا إلّا إدخال الكميـــة التخيلية $\sqrt{-١}$. وللحصول على متسلسلة لجتا ا ، حا ا حينما تقاس ا بزوايا نصف القطر ، فإننا استخدمنا قبلا المعادلة

$$e^{ت ا} = جتا ا + ت حا ا$$

$$\therefore \frac{١}{جتا ا} e^{ت ا} = ١ + \frac{ت جا ا}{جتا ا} = ١ + ت ظا ا$$

$$\therefore لو_e \frac{e^{ت ا}}{جتا ا} = لو_e (١ + ت ظا ا)$$

$$\therefore لو_e e^{ت ا} - لو_e جتا ا = لو_e (١ + ت ظا ا)$$

وبالرجوع إلى ص . . . . . فسوف تذكر قاعدة إيجاد لوغارتم عدد مرفوع لأية قوة أى

$$لو_e e^{ت ا} = ت ا لو_e e$$

وبما أن لوغارتم الأساس يساوى دائماً ١ ($e^{١} = e$ .... $لو_e e = ١$)

$$\therefore لو_e e^{ت ا} = ت ا$$

وعلى ذلك $ت ا - لو_e جتا ا = لو_e (١ + ت ظا ا)$

وباستخدام المتسلسلة اللوغارتمية نضع $قَ = ت ظا ا$

$$\therefore لو_e (١ + ت ظا ا) = ت ظا ا - \frac{ت^{٢} ظا^{٢} ا}{٢} + \frac{ت^{٣} ظا^{٣} ا}{٣} - \frac{ت^{٤} ظا^{٤} ا}{٤} + \frac{ت^{٥} ظا^{٥} ا}{٥} \dots\dots$$

وبوضع القيم العددية لقوى ت نحصل على

$$\text{لو}_e(١ + \text{ت ظا ا}) = \text{ت ظا ا} + \frac{\text{ظا}^{٢}\text{ا}}{٢} - \frac{\text{ت ظا}^{٣}\text{ا}}{٣} - \frac{\text{ظا}^{٤}\text{ا}}{٤}$$

$$+ \frac{\text{ت ظا}^{٥}\text{ا}}{٥} + \frac{\text{ظا}^{٦}\text{ا}}{٦} \ldots\ldots$$

$$\therefore \text{ت ا} = \text{لو}_e\,\text{جتا ا} - (\text{ت ظا ا} - \frac{\text{ت ظا}^{٣}\text{ا}}{٣} + \frac{\text{ت ظا}^{٥}\text{ا}}{٥} \ldots\ldots)$$

$$+ (\frac{\text{ظا}^{٢}\text{ا}}{٢} - \frac{\text{ظا}^{٤}\text{ا}}{٤} + \frac{\text{ظا}^{٦}\text{ا}}{٦} \ldots)$$

وبتذكر قاعدة الكمثرى والمهر ، نجد أن

$$\text{ت ا} = \text{ت ظا ا} - \text{ت}\frac{\text{ظا}^{٣}\text{ا}}{٣} + \text{ت}\frac{\text{ظا}^{٥}\text{ا}}{٥} \ldots\ldots$$

$$\therefore \text{ا} = \text{ظا ا} - \frac{\text{ظا}^{٣}\text{ا}}{٣} + \frac{\text{ظا}^{٥}\text{ا}}{٥} \ldots\ldots$$

ويمكننا استخدام هذه المتسلسلة لايجاد ط بطرق متعددة . وقد علمناعند فنطرة الحمير أن ظا $(\frac{\text{ط}}{٤})$ زوايا نصف القطر (أى ظا ٤٥°) = ١ ، وعلى ذلك إذا كان ا $= \frac{\text{ط}}{٤}$ فاننا نجد أن

$$\frac{\text{ط}}{٤} = ١ - \frac{١}{٢} + \frac{١}{٥} - \frac{١}{٧} + \frac{١}{٩} \ldots\ldots$$

$$= ١ - (\frac{١}{٣} - \frac{١}{٥}) - (\frac{١}{٧} - \frac{١}{٩}) - (\frac{١}{١١} - \frac{١}{١٣}) \ldots$$

$$= ١ - ٢(\frac{١}{١٥} + \frac{١}{٦٣} + \frac{١}{١٤٣} + \frac{١}{٢٥٥} \ldots\ldots\ldots)$$

وتختنق هذه المتسلسلة ببطء شديد ، ويمكننا أن نحصل على صورة مريحة أكثر باستخدام قيم أخرى من قيم ظا ا ، مثلا ظا ٣٠ أى أن ظا $\frac{\text{ط}}{٦}$ $= \frac{١}{\sqrt{٣}}$ ، وعلى ذلك إذا كان ا $= \frac{\text{ط}}{٦}$ فإن

$$\frac{\text{ط}}{٦} = \frac{١}{\sqrt{٣}} - \frac{١}{٣}(\frac{١}{\sqrt{٣}})^{٣} + \frac{١}{٥}(\frac{١}{\sqrt{٣}})^{٥} - \frac{١}{٧}(\frac{١}{\sqrt{٣}})^{٧}$$

$$+ \frac{١}{٩}(\frac{١}{\sqrt{٣}})^{٩} - \frac{١}{١١}(\frac{١}{\sqrt{٣}})^{١١} \ldots$$

$$= \frac{١}{\sqrt{٣}}(١ - \frac{١}{٩}) + (\frac{١}{٥} - \frac{١}{٢١})(\frac{١}{\sqrt{٣}})^{٥} + (\frac{١}{\sqrt{٣}})^{٩} \times$$

$$(\frac{١}{٩} - \frac{١}{٣٣}) \ldots\ldots$$

$$= \frac{١}{\sqrt{٣}} \cdot \frac{٨}{٩} + \frac{١}{٩\sqrt{٣}} \cdot \frac{١٦}{١٠٥} + \frac{١}{٨١\sqrt{٣}} \cdot \frac{٢٤}{٢٩٧} \ldots\ldots$$

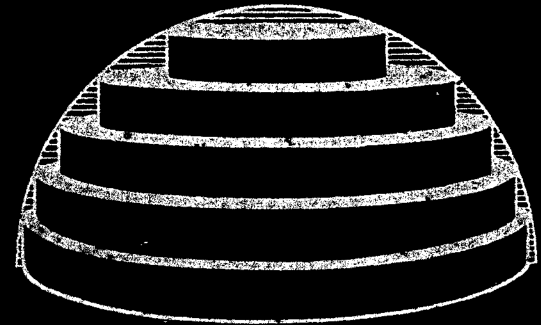
$$= ٢\sqrt{٣}(\frac{٨}{٩} + \frac{١٦}{٢٧ \times ١٠٥} + \frac{٤٢}{٢٤٣ \times ٢٩٧} \ldots\ldots)$$

$$\therefore \text{ط} = ٣٫١٤$$

وحين تكتب بهذه الطريقة ، فسترى أن الحدود المتاليسة تصغر بسرعة أكثر من مثيلاتها فى الكسر العشرى الدائر ٠٫١ ، وعلى ذلك فالنتيجة الأخيرة صحيحة قطعا لرقمين عشريين.

وتساعد طرق حساب التكامل بصفة خاصة فى حل المسائل المتعلقة بقياس المجسمات ، وهذا ما دعانا إلى أن نقول عنها قليلا جداً حتى الآن. وبهذه

المناسبة فإن الحيلة الأساسية التى نستخدمها قديمة جداً . وأرشميدس الذى أوجد قيمة للكمية ط مبنية على تقسيم الدائرة إلى عدد كبير من الشقق المثلثية التقريبية زعم أن ديموقريطس أعطى القيمة الصحيحة لحجم الهرم باعتباره مجموع عدد كبير جداً من الشقق . ومن المحتمل كثيراً أن يكون أب المادية الإغريقية قد استقى طريقته من المصريين . ويوجد الآن فى موسكو قرطاس يظهر أنه بيّن أنه كان لدى المصريين صيغة صحيحة لحجم الهرم ولمساحة الكرة حوالى ١٨٠٠ ق . م . ومن المحتمل أن تكون أعمال الاسكندرانيين الباهرة مدينة بدرجة كبيرة إلى بقاء القياسات المصرية أكثر من كون عادتنا فى كتابة التاريخ كتابع من دراسات التراجم خليقة بالإعلان . وكيفية إيجاد مساحات المجسمات وحجومها مثل المخروطات والأهرامات والكرات والمجسمات الناقصية

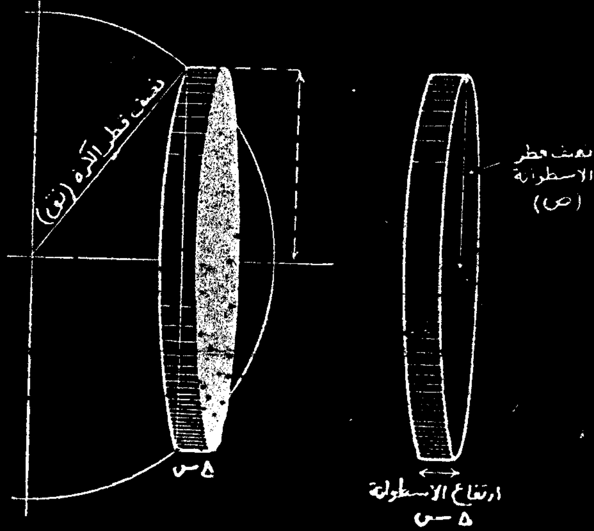


شكل (١٨٢)

مساحة الكرة وحجمها

باستخدام حساب التكامل يمكن توضيحها بالشكل الذى له أهمية عظمى فى دراسة الفلك ، فالكرة (أو المخروط) يمكن أن ينظر إليها كمجموع عدد كبير جداً من الشقق الاسطوانية (أنظر ش ١٨٢) كما ينظر تماما إلى الدائرة كمجموع عدد كبير جداً من المستطيلات (ش ١٨١) ويمكن جعل قطعة مستطيلة من الورق لتنطبق تماما على السطح الكلى للجدار الرأسى للأسطوانة ، إذا جعل إتساع الورقة مساوياً ارتفاع الاسطوانة ، وعلى ذلك فمساحة سطح الجدار الرأسى للاسطوانة مستطيل أحد ضلعيه الارتفاع ، والضلع الآخر

يساوى المحيط ٢ ط نق أى أن المساحة تساوى ٢ ط نق ع . وحجم المجسم الذى يتساوى مقطعه المستعرض فى كل مكان يساوى حاصل ضرب مساحة المقطع فى الارتفاع ، وعلى ذلك فحجم الأسطوانة هو ط نق^{٢} ع . وللحصول على مساحة الكرة أو حجمها (ش ١٨٣) نشرع بوضع سلسلة من الشقق الأسطوانية المسطحة متجاورة ومتتالية على محور السينات ، ويكون ارتفاع كل أسطوانة مسطحة Δ س إذا أقيمت على قاعدتها ، ويناظر نصف قطر كل أسطوانة الاحداثى الصادى للمقطع الدائرى المستعرض للكرة . ولو كان نصف قطر الكرة نق . فيمكن الحصول على ص نصف قطر كل أسطوانة من المعادلة ص^{٢} = نق^{٢} — س^{٢} ويكون حجم كل شقة ط ص^{٢} . Δ س = ط (نق^{٢} — س^{٢}) Δ س وبذلك يكون حجم نصف الكرة مساوياً مجموع جميع الأسطوانات حينما يصبح Δ س صغيراً بدون حد . أى



شكل (١٨٣)

استخدام حساب التكامل فى الحصول على حجم الكرة

$$\int_{\cdot}^{\text{نق}} \text{ط} \left(\text{نق}^{2} - \text{س}^{2} \right) \text{ء س}$$

ولإيجاد حجم نصف الكرة علينا أن نحل المعادلة التفاضلية

$$\frac{\text{ى ع}}{\text{ى نق}} = \text{ط نق}^{2} - \text{ط س}^{2}$$

وقد أعطى حل مثل هذه المعادلة هكذا : ع = ا + ط نق^{2}س — $\frac{1}{3}$ ط س^{3}
وبما أننا نعتبر فقط الحجم عن يمين س = ٠ فيكون ع = ٠ حينما تكون
س = ٠ وعلى ذلك ا = ٠ وعلى ذلك نحصل على قيمة التكامل بوضع نق
عوضاً عن س في ط نق^{2} س — $\frac{1}{3}$ ط س^{3} أى أن

$$\text{ع} = \text{ط نق}^{3} - \tfrac{1}{3}\,\text{ط نق}^{3} = \tfrac{2}{3}\,\text{ط نق}^{3}$$

ويكون الحجم الكلى للكرة ضعف هذا الحجم أى $\frac{4}{3}$ ط نق^{3}

وعلى ذلك فحجم الكرة الأرضية هو تقريبا $\frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times (٤٠٠٠)^{3}$ ميلا مكعبا . ويساوى هذا تقريباً . . . . ٢٦٨ ميلا مكعبا .

التكامل الرياضى والكفاية الاجتماعية : كما رأينا فى الباب السابق أصبحت دراسة المتسلسلات ، كحيل حسابية ، مصدر أهمية عملية عظمى فى التمرينة الاجتماعية التى ظهر من خلالها حساب التكامل فى صورته الحديثة . وحتى الآن اقتصرت التوضيحات التى أعطيناها لبيان فائدته على كشف متسلسلات وعلى مسائل القياسات . ولم تدخل فائدة حساب التكامل فى القياسات فى العلوم الطبيعية حتى عصر مقدرة الإنتاج . فانفجار المدفع ودقة الساعة كانت الترياق لطور حديث فى تنظيم حياة الانسان الإجتماعية . وقبل نهاية القرن السابع عشر أدى تقدم صناعى آخر إلى زيادة استخدام المعادن . وقد عبد التقدم فى معالجة المعـــادن الطريق للثورة الصناعية التى أدخلت فى دائرة الإنتاج الاستخدام المتسع للآلات مستقلة عن منابع الطاقة البشرية والحيوانية . وقد أمد حساب التكامل الآلة الرياضية لحساب كفايه الآلات الحديثة إلى أقصى فائدة ، ويمكننا أن نرسم قائمة لجميع منابع القدرة الموجودة لتهيئة عصر للوفرة والفراغ لكل إنسان . ولدى الاقتصاديين فى الوقت الحاضر تدريب قليل جداً فى العلووم الحقيقية ليتحققوا من عبث الجادلات المثيرة حول البيع والربا ، وقد قامت هذه المجادلات بنفس المزاج كما قامت المراوغات الدينية فى القرن الرابع عشر .

وبظهور الفحم كمنبع للقدرة بدأ التصور النيوتنى للقوة يلعب دوراً أقل أهمية فى العلوم الطبيعية . وفى بدء الثورة الصناعية كان الذين يديرون الصناعة مبالين إلى إيجاد النهاية العظمى للكفاية من الآلة . وقد أمدت الكيمياء فرصاً جديدة للصناع . وقد أوجد علم الحياة بارتباطه بالكيمياء ميلا مستغرقاً للعصر فى مسألة الاحتراق . وكانت نتيجة العصر المسيطرة هى كيف ترتبط الطبيعة الكيميائية للوقود أو المواد الغذائية بالشغل الذى يمكن أن تبذله الآلات الحية وغير الحية . وقد اشتهرت ظاهرة الاحتكاك كما أوضحها الكونت رامفورد بتجربته على فتحة المدفع . وقد أصبحت الكلمة الجديدة — الطاقة — أو المقدرة على بذل شغل بالغة الأهمية فى قاموس العلوم . وأصبحت طرق حساب التكامل أساس الطبيعيات والكيميائيات لذوات الطاقة (أو الديناميكا الحرارية) ، كما أوجد حساب التفاضل وسائل دراسة الحركة الميكانيكية فى القرن السابق .
ويقاس الشغل الذى يبذله ثقل هابط فى الطبيعيات النيوتنية بحاصل ضرب القوة التى يعانيها الثقل والمسافة التى سقط خلالها (ش = ق ل) ، ولو سقط الثقل مسافة صغيرة ى ل . فالمقدار الصغير للشغل المبذول هو

$$\text{ى ش} = \text{ق} \,.\, \text{ى ل}$$

ويتذكر أن القوة النيوتنية هى حاصل ضرب الكتلة المتحركة (ك) والعجلة الناتجة ($\frac{\text{ى}^{2}\text{ل}}{\text{ى ز}^{2}}$ أو $\frac{\text{ى ع}}{\text{ى ز}}$ حيث ع السرعة عند لحظة معينة) ، يمكن أن نضع

$$\text{ى ش} = \text{ك} \,\frac{\text{ى ع}}{\text{ى ز}}\,.\,\text{ى ل}$$

ولو ضربنا كلا من الطرفين فى $\frac{\text{ى ل}}{\text{ى ل}}$ (= ١) فيكون

$$\text{ى ش} = \text{ك} \,.\, \frac{\text{ى ل}}{\text{ى ز}} \,.\, \frac{\text{ى ع}}{\text{ى ل}} \,.\, \text{ى ل} = \text{ك ع} \,.\, \text{ى ع}$$

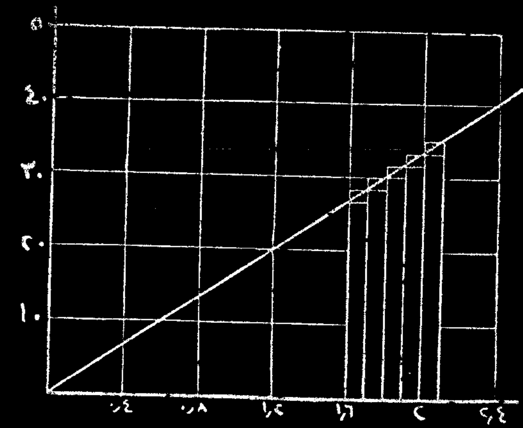
وعلى ذلك إذا بدأ الثقل بسرعة صفر حينما يكون ل = ٠ ، وتحرك حتى صبحت سرعته ع حينما تكون المسافة المقطوعة ل ، فيكون الشغل المبذول

$$\int_{١٫٦}^{٢٫١} \text{ص ء س} = \int_{١٫٦}^{٢٫١} ١٦٫٧ \text{ س ء س}$$

وهذا يعنى حل $\frac{\text{ء ع}}{\text{ء س}} = ١٦٫٧ \text{ س}$ أى أن $\text{ع} = \frac{١٦٫٧}{٢} \text{س}^{٢} + \text{حـ}$

وحينما يكون $\text{س} = ١٫٦$ ، $\text{ع} = ٠$ $\therefore \text{حـ} = - \frac{١٦٫٧}{٢} \times (١٫٦)^{٢}$

القوة الكامنة للزنبرك المستطيل



شكل (١٨٤)

س = المسافة الممتدة بالبوصات

ص = القوة (الثقل) المؤثرة بالباوند

وعلى ذلك يكون الشغل الكلى الذى يمكن بذله فى استطالة الزنبرك من ١٫٦ إلى ٢٫١ من البوصات

$$\frac{١٦٫٧}{٢} (٢٫١^{٢} - ١٫٦^{٢}) = ١٥٫٤ \text{ باوند — بوصة}$$

ونسمى هذه الكمية المقدار الذى زادته الطاقة الكامنة للزنبرك حينما استطال من ١٫٦ إلى ٢٫١ من البوصات . وتقاس كفاية آلة تدار بالزنبرك بمقدار الشغل الميكانيكى الذى يمكن أن تبذله العجلات حينما تزيد الطاقة

الكامنة بمقدار معين . أى نسبة الشغل الذى يحصل عليه من لفه إلى الشغل الذى وضعناه فى لفه .

وتتوقف الكفاية فى عصر آلات الاحتراق الداخلى على استخدام قوة المرونة الغاز عوضاً عن قوة المرونة لزنبرك . وتتوقف نظرية آلة الاحتراق على قانون مرونة الغازات . وبنهاية القرن السابع عشر كانت المسائل الصناعية لمعالجة المعادن قد جذبت انتباه الطبيعيين ، وبين المسائل الصناعية التى ظهرت فى الغرف الغائصة كانت المضخات والتهوية كبيرة الأهمية . وأخذت المضخة نصيبها من الانتباه حينما بدأت الدراسة العلمية الميكانيكا تتقدم . وروبرت بويل الذى يرتبط ارتباطاً وثيقاً بهوك ونيوتن ، اخترع مفرغة الهواء ، وقام بأول تجارب مسجلة عن كيف تنكمش الغازات وتتمدد حينما يؤثر الضغط أو يقل . والقانون التقريبى الذى كشفه بويل هو أن حجم غاز (ع) والضغط المؤثر عليه (ض) يرتبطان بالمعادلة $\text{ض} = \frac{\text{ا}}{\text{ع}}$

، ا فى هذه المعادلة مقدار ثابت ، ولو كان ا مساوياً ٥ ، فيكون المنحنى مطابقاً للمنحنى المبين فى ش ١٨٠ حيث $\text{ص} = \frac{٥}{\text{س}}$

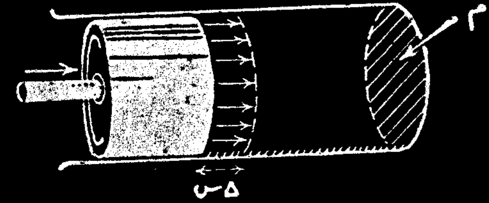
ولقياس كفاية آلة احتراق داخلى ، تكون مسألتنا أن نوجد كم من الشغل الذى يبذل فى ضغط المكبس مسافة معينة ، ينجز فعلا بواسطة العجلات والمكبس معاً ، حينما يدفع الأخير خلال نفس المسافة فى نفس الاتجاه نتيجة تمدد الغاز . وسوف ترى من العنوان المتصل بشكل ١٨٥ أنه إذا ضغط الغاز من الحجم فَ إلى الحجم قَ ، فهذا هو نفس الشيء مثل

$$\int_{\text{ف}}^{\text{قَ}} \text{ض ء ع} = \int_{\text{ف}}^{\text{قَ}} \frac{\text{ا}}{\text{ع}} \text{ ء ع}$$

وإذا قيست ع على محور السينات فيكون هذا التكامل

$$\int_{\text{ف}}^{\text{قَ}} \frac{\text{ا}}{\text{س}} \text{ ء س} = \text{ا لو}_{\text{e}} \frac{\text{قَ}}{\text{فَ}}$$

ويحصل على قيمة هذا من جداول اللوغاريتمات .



شكل (١٨٥)

لو كان ارتفاع الماء س ، ومساحة مقطعه المستعرض (م) فى كل مكان كأسطوانة ، فيكون حجمه م س . ولو دفع المكبس مسافة △ س ، فيكون التغير فى حجم الغاز داخل المكبس م △ س . ويقاس الضغط فى ميكانيكا الغازات بالقوة الواقعة على وحدة المساحات ، ويقاس الشغل بحاصل ضرب القوة المؤثرة فى المسافة المقطوعة . أى ق = ض م ، ش = ق ف . وإذا دفع المكبس مسافة △ س دون فقدان طاقة نتيجة الاحتكاك ، فيكون الشغل المبذول ق . △ س وهذا يمكن كتابته ض . م . △ س ، والتغير الصغير الذى حدث فى الحجم الذى يمثل بالمقدار م . △ س يمكن أن يكتب △ ع . والمقدار الصغير من الشغل هو △ ش . وعلى ذلك △ ش = ض . △ ع

الرياضة فى العصر النيوتنى : عندما يصرف النظر عن الأهمية الخيالية التى

نسبت لأعمال نيوتن ، تبقى الحقيقة البارزة حول هباته العملية هى النجاح الذى جعله قادراً على استخدام الطرق الجديدة الناتجة من اتحاد الجبر والهندسة . وكان التقدم بالطرق الجديدة أقل سرعة مما يجب أن يكون ، لو انتفع الذين فهموا الفن الجديد بقضاء عداد الرمل وجبرثيون وديوفانتس . ولم يتحقق القادة العقليون فى العصر النيوتنى من أن كل تقدم عقلى يظهر مسألة استدلالية فى التربية . وقد خصص نيوتن جزءاً كبيراً من نشاطه لتدبير إثباتات مملة فى الهندسة الإقليدية بدلا من محاولته أن يجعل طرقه الجديدة مفهومة لمعاصريه . وكانت إحدى نتائج هذا أن التقدم البين للميكانيكا النيوتنية لم يحل فى بلده فى أثناء القرن الذى تلا نشر الأصول (البرنسيبيا) .

ونسمع على الدوام فى هـــذه الأيام عن قيود ميكانيكا نيوتن والطرق الرياضية التى استخدمها . وحينما نعرف بوضوح ما هية هذه القيود ، نرى الحقيقة السافرة فى أن الطرق النيوتنية بقيت وستبقى طويلا أساس الحساب فى العلم الطبيعى ، وقد توصل طرق أخرى فى أغراض معينة إلى نتائج تتفق

مع الحقائق أكثر من سابقتها . وحينما تقوم بذلك فإنما تقوم به على حساب عمل عقلى متسع وبفن سيظل فوق مستوى فهم الرجل العلمى المتوسط ، ولا يزال أبعد بكثير عن فهم الرجل المتوسط الذى ليس بعلمى ، حتى يكون الرياضى راغباً فى طلب مساعدة التربويين . ولسنا مستعدين لترك ميزان البقال المستخدم فى المطبخ حتى يمكن أن ننتج ميزاناً كيماوياً يساويه فى الرخص ويتزن بسرعة مثله . وإلى وقت قريب كانت الطرق النيوتنية هى خزانة الرياضى المحترف . ويمكن عمل الكثير لتبسيط الصعوبات فى فهمها واستعمالها إذا بدأنا بمعرفة قيودها بدلا من اكتشافها فى نهاية طريق طويل محير من الميكانيكا التى فيها تتدحرج كرات تامة الملاسة على مستويات تامة الجسادة ، وتدور عجلات حول محاورها غير المشحمة دون أى احتكاك بالمرة . ولا يوجد شىء يمكن أن يؤدى إلى تقدم سريع فى الفهم البشرى أكثر من مؤتمر سنوى بين تلاميذ المدارس ومعلميها والعلميين القدماء ، ويجب أن يجبر العلميون على الحضور تحت تهديد حرمانهم من حقوقهم المعاشية .

تمارين على الباب الحادى عشر

(١) استخدم متسلسلة $لو_e (١ + س)$ لإيجاد $لو_e ١٠$ ، $لو_e ٢$ ، $لو_e ٣$ ، $لو_e ٤$ ، $لو_e ٥$ ومن ذلك اعمل جدولا للمقادير $لو_{١٠} ٢$ ، $لو_{١٠} ٣$ ، $لو_{١٠} ٤$ ، $لو_{١٠} ٥$

(٢) أوجد قيمة ط بمتسلسلة لانهائية بطريقتين مختلفتين ، بحيث تكون صحيحة لثلاثة أرقام عشرية .

(٣) ارسم بدقة كبيرة المنحنى $ص = \frac{١}{٥} س^٢$. قس ميله عند ثلاث نقط تناظر ثلاث قيم مختلفة للمتغير س ، وباستخدام جداول الظلال قارن قياساتك مع القيم التى حسبتها بالتعويض بالأعداد المناسبة فى المعامل التفاضلى $\frac{٢س}{٥}$.

وأوجد بعدّ المربعات المساحة المحدودة بالمنحنى وبمحور السينات وبالإحداثيين الرأسيين س = ٥ ، س = ١٠ قارن هذا بالمساحة التى حسبت من التكامل $\int_{٥}^{١٠} \frac{١}{٥} س^٢ ءس = \left[\frac{س^٣}{١٥} \right]_{٥}^{١٠}$

(٤) ارسم المنحنى $ص = \sqrt{٣٦ - س^٢}$. أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ حينما يكون س = ١ ، ٢ ، —٢

(٦) أوجد من المبادىء الاولية (أى بتطبيق الطرق فى ص . . .) $\frac{ءص}{ءس}$

حينما يكون $ص = س + \frac{١}{س}$

(٧) اكتب $\frac{ءص}{ءس}$ حينما يكون $ص = س^{٣,٦}$ ، ٥ س ، $س^{-١\frac{١}{٢}}$ ، $س^٧$ ،

$\frac{٣}{\sqrt{س^{-\frac{١}{٢}}}}$

(٨) أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ إذا كان $ص = س^٥ - ٥ س^٣ + ٥ س^٢ - ٤ س + ٣$

(٩) إذا كان ض ع = ك حيث مقدار ثابت ، فبيّن أن $\frac{ءض}{ءع} = - \frac{ض}{ع}$.

(١٠) أوجد نقط الرجوع للمنحنى $ص = س^٣ - ٣ س$ ، ارسم المنحنى مبيناً هذه النقط .

(١١) أوجد أكبر قيمة ممكنة لطرد أسطوانى ، إذا لم يزد مجموع طوله ومحيطه عن ٦ أقدام .

(١٢) إذا كان س وزن الدرع فى دينامو ، ص وزن الباقى ، فتكاليف تشغيله يحصل عليها من المعادلة ن = ١٠ س + ٣ ص

والقدرة تتناسب مع س ص . فاذا كانت التكاليف ثابتة ، فأوجد العلاقة بين س ، ص للحصول على أكبر قدرة ممكنة .

(١٣) إذا كان طول محيط مستطيل ثابتا ٢ ل ، فيمكن أن يكتب أحد الأضلاع س ، ويكون الضلع المجاور (ل — س) . وإذا كانت المساحة م ، فان

م = س (ل — س) وهذا يكون نهاية عظمى إذا كان $\frac{ءم}{ءس} = ٠$.

ومن ذلك يتبين أن المربع هو المستطيل ذو المحيط الثابت والذى مساحته أكبر ما يمكن . اثبت أن أكبر مستطيل يمكن رسمه داخل دائرة هو مربع .

(١٤) أوجد قيمة ص إذا كانت $\frac{ءص}{ءس}$ تساوى . —

ا . ٤ $س^٣$ ب . $\frac{٣}{س}$ جـ . $\frac{س^٥}{٤}$ ء . ٥ $\sqrt{س}$ هـ . ٣ $س^٢$ + ٢ س + ١

(١٥) أوجد قيمة ص إذا كانت $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ تساوى : —

ا . ٢ س ب . ٥ جـ . $\sqrt{س}$

(١٦) إذا كان $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء ع}}$ = $\frac{-\ ٧٠٠}{\text{ح}\ ٢,٤}$ وكان ص = ١٨,٩٥ حينما يكون ح = ٢٠ ، أوجد ض كدالة للمتغير ح ،

(١٧) اكتب $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ إذا كان ص = جتا^{٢} ا س ، ٤ حا ٣ س ، ا حا ن س + ب جتا ن س .

(١٨) — إرسم المنحنى ص = ظا س من س = ٠ إلى س = ١,٢ = بيّن بالطريقة المذكورة فى صفحة ...

أنه حينما يكون ص = ظا س ، فان $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = قا^{٢} س . حقق ذلك من الرسم (أنظر أيضاً صفحة ..)

(١٩) ارسم المنحنى ص = $e$$^{\text{س}}$ ، متخذاً الوحدة على محور الصادات $\frac{١}{١٠}$ الوحدة على السينات .

ف أية نقطة على المنحنى . ارسم ف م عموديا على محور السينات ، خذ نقطة ل على يسار م وتبعد عنها بوحدة من وحدات س . بيّن أن ف ل مماس للمنحنى عند ف .

(٢٠) أوجد بوساطة الطريقة فى صفحة .... المساحة المحدودة بالمستقيم ص = ٤ س + ٣ ، وبمحور السينات ، وبالاحداثيين الرأسيين عند النقطتين : —

ا . ص = ٤ ، ص = ٨ ب . ص = ٢ ، ص = ١٠

حـ . ص = ٥ ، ص = ٦ .

(٢١) أوجد المساحة المحصورة بين ص = ٢ س^{٢} + ٣ س + ١ ، ص = ٠ ، س = ٣ ، س = ٧

(٢٢) اكتب قيم التكاملات الآتية ، وحقق النتائج بالتفاصل :

ا . $\int_{٢}^{٧}$ ١ س^{٢} ء س ب . $\int_{-١}^{١}$ (ا س^{٢} + ب س + حـ) ء س

حـ . $\int_{١}^{٨}$ $\frac{١}{\sqrt[٣]{\text{س}}}$ ء س

ء . $\int_{٣}^{٤}$ ٧ ء س هـ . $\int_{١}^{٢}$ (س + $\frac{١}{\text{س}^{٢}}$) ء س

(٢٣) توجد المساحة المحصورة بين منحن مقفل أحيانا بقاعدة سمسون فى علم المساحة . والقاعدة هى :

قسم المساحة إلى عدد زوجى من الشقق المتساوية الاتساع بواسطة عدد فردى من الرأسيات ، فتساوى المساحة تقريبا

$\frac{١}{٣}$ اتساع الشقة × (مجموع الرأسيين المتطرفين + ضعف مجموع الرأسيات الفردية الأخرى + أربعة أمثال مجموع الرأسيات الزوجية) .

وبفرض أن المنحنى الذى يحصر المساحة يمكن رسمه بمنحن من الطراز ص = ف + ق س + ر س^{٢} ، أنظر كيف يمكن تبرير قاعدة سمسون كتقريب للمساحة .

أوجد المساحة المحدودة بالمنحنى ص = س^{٣} ، ص = ٠ ، س = ٢ ، س = ١٢

(ا) بقاعدة سمسون باستخدام ثلاثة رأسيات .

(ب) بقاعدة سمسون باستخدام تسعة رأسيات .

(حـ) بالتكامل .

(٢٤) أوجد المساحة المحصورة بالمنحنى ص = س^{٣} — ٦ س^{٢} + ٩ س + ٥ وبمحور السينات وبالاحداثيين الرأسيين لنقطتى النهايتين العظمى والصغرى .

(٢٥) معدّل سير جسم ع فى نهاية زمن قدره ز من الثوانى ، يحصل عليه من المعادلة .

ع = ا + ب ز . بيّن أن المسافة التى يقطعها فى ز من الثوانى هى ا ز + $\frac{١}{٢}$ ب ز^{٢}

(٢٦) أوجد الشغل المبذول فى تمدد كمية من البخار تحت ضغط ٤٠٠ ثقل باوند لكل قدم مربع من قدمين مكعبين إلى ثمانية أقدام مكعبة ، إذا ارتبط الضغط والحجم بالمعادلة

$$ض\, ع^{٩}_{و} = ك \quad (\text{مقدار ثابت})$$

(٢٧) أوجد حجم مخروط نصف قطره ٥ بوصات وارتفاعه ١٢ بوصة .

(٢٨) كرة نصف قطرها ١٢ بوصة ، أوجد حجم قطعة منها محصورة بين مستويين متوازيين ويبعدان عن مركز الكرة بقدر ٣ بوصات ، ٦ بوصات

(٢٩) أوجد $\int_{٠}^{ط} حا\, س\, ى\, س$ ، $\int_{٠}^{\frac{ط}{٢}} جتا\, س\, ى\, س$

(٣٠) أكتب قيمة : ١ . $\int_{٠}^{\frac{ط}{٢}} حا\, ٢\, س\, ى\, س$ ب . $\int_{-\frac{ط}{٢}}^{\frac{ط}{٢}} جتا\, ٢\, س\, ى\, س$

حـ . $\int_{٠}^{ط} س\, حا\, س\, ى\, س$

(٣١) يمكن أحياناً أن تعرف د (س) كحاصل ضرب دالتين أبسط منها ، مثل $ص = س^{٢} لو\, س$.

لنفرض أن ص يمكن وضعها بالصورة ع م حيث كل من ع ، م دالة بسيطة للمتغير س . وحينما تصبح ع المقدار (ع + △ ع) ، م المقدار (م + △ م) ، فإن ص تصبح (ص + △ ص) . فبيّن من ذلك

$$\text{أن} \quad \frac{ى\, ص}{ى\, س} = ع \frac{ى\, م}{ى\, س} + م \frac{ى\, ع}{ى\, س}$$

حقق هذه الصيغة بتفاضل $س^{٧}$ ، $س^{٥}$ بالطريقة العادية ، ثم بوضعها على الصورة $س^{٧} = س^{٥} \times س^{٢}$ ، $س^{٥} = س^{٧} \times س^{-٢}$

فاضل بهذه الطريقة ١ . س حا س ب . جتا س ظا س

حـ . $(٢ س^{٢} + س + ٣) (س + ١)$

أولا كحاصل ضرب ثم بعد ضربهما .

(٣٢) باستخدام نفس الطريقة الواردة فى المثال السابق ، بين أنه إذا كان $ص = \frac{ع}{م}$ حيث كل من ع ، م دالة للمتغير س : فان

$$\frac{ى\, ص}{ى\, س} = \frac{م \frac{ى\, ع}{ى\, س} - ع \frac{ى\, م}{ى\, س}}{م^{٢}}$$

فاضل ١ . $\frac{س}{١ + س}$ ب . $\frac{حا\, س}{س}$ حـ . $\frac{س}{جتا\, س}$

(٣٣) يمكن أحياناً أن تعرف د (س) (مثلا $جتا^{٢} س$) كدالة لدالة أبسط للمتغير س (فى هذه الحالة جتا س) . بيّن أنه إذا كانت ص دالة للمتغير ع ، ع دالة بسيطة للمتغير س ، فان

$$\frac{ى\, ص}{ى\, س} = \frac{ى\, ص}{ى\, ع} \cdot \frac{ى\, ع}{ى\, س} .$$

ويمكن استخدام هذا فى تفاضل مقادير كالآتية : — $ص = جتا^{٢} س$

$$\frac{ى\, ص}{ى\, س} = \frac{ى\, جتا^{٢} س}{ى\, جتا\, س} \cdot \frac{ى\, جتا\, س}{ى\, س} = ٢\, جتا\, س\, (- حا\, س) = - ٢ \, حا\, س\, جتا\, س$$

حقق هذه الصيغة باستخدامها فى تفاضل $لو_{e} س^{٣}$ باعتبارها دالة للمتغير $س^{٣}$ ، وباعتبارها $٣\, لو_{e} س$

فاضل بهذه الطريقة :

١ . $\sqrt{حا\, س}$ ب . $(١ س + ب)^{ن}$ حـ . حا (١ س + ب)

ى . $لو_{e} (١ س^{٢} + ب س + حـ)$

(٣٤) إذا كان ص = ١ جتا س + ب حا س ، فبيّن أن $\frac{ى^{٢} ص}{ى\, س^{٢}} + ص = ٠$.

(٣٥) حل المعادلات الآتية : —

١. $\frac{د^٢ ص}{د س^٢} + ٤ ص = ٠$ ب. $\frac{د^٢ ص}{د س^٢} - ٤ ص = ٠$

أوجد قيمة ص بدلالة س فى كل حالة إذا كان ص = ٥ حينما يكون

س = ٠ ، $\frac{د ص}{د س} = ٤$

أشياء للتذكر

(١) ص	$\frac{د ص}{د س}$
ا س^{ن} + ب	ا ن س$^{ن - ١}$
ا س + ب	ا س لو$_e$ ا
ا لو$_e$ (س + ب) + حـ	$\frac{١}{س + ب}$
حا (ا س + ب)	ا جتا (ا س + ب)
جتا (ا س + ب)	— ا حا (ا س + ب)
$e^{س}$	$e^{س}$

(٢) ص	$\int_{ف}^{ن}$ ص د س
$\frac{١}{س + ب}$	لو$_e$ $\frac{ب + ن}{ب + ف}$
ا س^{ن}	$\frac{ا}{ن + ١}$ (ن$^{ن + ١}$ — ف$^{ن + ١}$)
جتا ا س	$\frac{١}{ا}$ (حا ا ن — حا ا ف)
$e^{حـ س}$	$\frac{١}{حـ}$ ($e^{حـ ن}$ — $e^{حـ ف}$)

حجم الأسطوانة = ط نق^{٢} ع

حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}$ ط نق^{٣}

الباب الحادى عشر

جبر الشطرنج وورق اللعب

لا ريب أن القارىء الذى طالع الفصول السابقة من هذا الكتاب قد رأى كيف أصبحت فائدة الرياضيات مما يعترف به الجميع فيها وحدها يكشف الانسان عن آفاق جديدة . وعلى ذلك يمكننا قبل أن نتناول جرعة جديدة من هذا الدواء أن نقطع الكلام الهين ونسير فى هذا الباب دون الرجوع إلى الأحداث التاريخية أملين أن نجـــد فى بعض مادته تسلية لطيفة كما هى حال الرياضة دائماً بالنسبة للذين يكسبون عيشهم عن طريقها . وسنرى فى الباب الأخير أن الطريق الذى سنسير فيه لا يوصلنا إلى الحدائق الغناء إذا وضعنا نصب أعيننا الوصول إلى الغاية التى استهدفها بيكون وهى تزويد الحياة البشرية بالقوى الجديدة وبالاختراعات . والقارىء الذى يلذ له دراسة التاريخ أيضاً سوف يكون قادراً على تحديد موضع هذا الكلام من تاريخ المغامرات الإنسانية .

رقعة الشطرنج :

رأينا فى الباب السابع أن تفوق الطريقة الهندية العربية فى الحساب يرجع إلى أنه فى هذه الطريقة يكون لكل قوة من قوى الأساس ١٠ مكان معين ، وعلى ذلك تكفى الرموز العشرة ٠ ، ١ ، ٢ ، ... ، ٨ ، ٩ للتعبير عن أى عدد محدود مهما كان كبيراً وكذلك للتعبير عن أى كسر محدود . ومع ذلك فليست هذه هى الميزة الوحيدة ، ولا هى بأهم الميزات لقاعدة الموضع . فهذه القاعدة توضح العمليات التى يمكن إجراؤها على العداد ، كما تمكننا من إجراء هذه العمليات بدون الاستعانة بالعداد .

يعتمد تمثيل العدد فى الطريقة الهندية العربية على قاعدة الموضع فى بعد واحد فقط ، أى على ترتيب معين يوضح متسلسلة قوى فى خط مستقيم . أما الطريقة الوضعية ، أى قاعـــدة إجراء الحسابات فهى تستخدم ضمنياً نفس الفكرة فى ترتيب ذى بعدين . فمثلا يمكننا إجراء الخطوة الأولى من عملية

ضرب ٤٢٦١ فى ٣١٥ حسب نظام رقعة الشطرنج التالى (صف وعمود) :

...   ...   ١×٣   ٦×٣   ٢×٣   ٤×٣

...   ١×١   ٦×١   ٢×١   ٤×١

١×٥   ٦×٥   ٢×٥   ٤×٥

ومن الممكن أيضاً تمثيل هذه العملية كما يأتى

١×٥   ٦×٥   ٢×٥   ٤×٥   ...   ...

...   ١×١   ٦×١   ٢×١   ٤×١   ...

...   ...   ١×٣   ٦×٣   ٢×٣   ٤×٣

فى مثل هذا الترتيب يدل وجود حاصل ضرب ما مثل ٥×٤ أو ٣×١ فى عمود معين على أنه معامل قوه معينة من قوى العدد ١٠ ، كما أن موضع حواصل الضرب هذه فى الصفوف الأفقية قد لوحظ فيه أن يكون كل من هذه المعاملات فى عموده الرأسى الصحيح . والكلمة الفنية لمثل هذا الترتيب هى « مولدة » وهو ترتيب يجعل من السهل أن نتذكر مجموعة من العمليات ، كما يجعلنا نقتصد فى استخدام الرموز وذلك بإعطاء معنى خاص لكل واحد منها نتيجة للخلية التى يشغلها فى المصفوفة .

وأى فرع من فروع عـــلم الجبر التى تعتمد على طريقة التميز بالخلية هذه هو جبر مولدات وقواعد مثل هذا الجبر لا تتوقف إلا على الهدف الذى نتطلع إليه .

فى القرنين السابع عشر والثامن عشر وصل العـــلماء إلى نتائج باهرة فى بحوثهم عن متسلسلات القوى وخواصها ، تلك المتسلسلات التى تبسط عملية أعداد جداول اللوغاريتمات والنسب المثلثية ، وكانت هذه الدراسة تعتمد على قاعدة الموضع فى بعد واحد فقط .

وفى القرن التاسع عشر ، بدأ اكتشاف علوم الجبر الأخرى التى تعتمد على نفس الفكرة فى بعدين . وأول علم من هذه العلوم ثبتت فائدته هو جبر المحددات ، وهو ليس إلا طريقة لحل المعادلات الآنية . ولكى نفهم فائدة

المحددات هذه ، فرجع أولا إلى ما نقوم به عادة عند حل معادلتين خطيتين فى متغيرين س ، ص ، بواسطة الحذف . نفرض مثلا أن المعادلتين هما

٣ س = ٥ ص + ٤ ، ٤ ص — ٣ س = — ٢

الخطوة الأولى هى أن نكتب المعادلتين بحيث تأخذ الحدود المتناظرة نفس الموضع :

٣ س — ٥ ص = ٤
— ٣ س + ٤ ص = — ٢

أو

٣ س — ٥ ص — ٤ = ٠
— ٣ س + ٤ ص + ٢ = ٠

وليس للترتيب الذى نختاره أية أهمية ، ما دمناه نحافظ عليه . وسنأخذ هنا دائماً الترتيب الآتى لأى معادلتين آنيتين خطيتين فى متغيرين :

ا س + ب ص + ح = ٠
ى س + ه ص + و = ٠

وأبسط طريقة يمكن اتباعها فى الحل ، هى أن تختصر مثل هاتين المعادلتين التى تحتوى كل منهما على حدين مجهولين ، إلى معادلة واحدة محتوية على حد مجهول واحد . لإجراء ذلك ، أما أن نحذف س وذلك بأن نضرب كل حد فى إحدى المعادلتين بمعامل س فى المعادلة الأخرى ، والعكس ، أو نحذف ص بضرب كل حد فى إحدى المعادلتين فى معامل ص فى الأخرى والعكس . والخطوات هى كما يأتى :

ا ى س + ب ى ص + ح ى = ٠
ا ى س + ا ه ص + ا و = ٠
∴ (ب ى — ا ه) ص = ا و — ح ى
∴ — ص = (ا و — ح ى) / (ا ه — ب ى)

ا ه س + ب ه ص + ح ه = ٠
ب ى س + ب ه ص + ب و = ٠
∴ (ا ه — ب ى) س = (ب و — ح ه)
∴ س = (ب و — ح ه) / (ا ه — ب ى) . (١)

ومن الممكن اعتبار الصيغ (١) كقانون لحساب قيمة المجاهيل وبذلك نتخلص من خطوات حذف المتغيرات . لكن لا يمكن حفظ هاتين الصيغتين بسهولة . للتغلب على هذه الصعوبة ، نلاحظ أن مقام كل من س ، — ص

هو الفرق بين حاصلى الضرب التصالبيين لمعاملات س ، ص ؛ ويمكننا أن تبين ذلك إذا كتبنا المقام على الصورة

| ا ب ؛ ى ه | = (ا ه — ب ى) .

يحتوى بسط س على الفرق بين حاصلى الضرب المتصالبين للثوابت فيما عدا معاملى س ، و يمكننا أن نبين ذلك حسب الاتفاق السابق . بطرح حاصل الضرب القطرى (يمين — جنوب) من حاصل الضرب القطرى (يسار — جنوب) كما فعلنا من قبل :

| ب ح ؛ ه و | = (ب و — ح ه) .

بالمثل ، بسط ص يحتوى على الفرق بين حاصلى الضرب التصالبيين للثوابت فيما عدا معاملى ص ويمكن كتابته على الصورة

| ا ح ؛ ى و | = ا و — ح ى .

وباستخدام طريقة الرمز هذه ، تكتب :

س = | ب ح ؛ ه و | / | ا ب ؛ ى ه | ، — ص = | ا ح ؛ ى و | / | ا ب ؛ ى ه | (٦)

لدينا الآن صيغتان يمكن حفظهما بسهولة أكثر من الصيغتين (١) ومع ذلك فيمكننا ادخال تحسينات على هاتين الصيغتين بتغيير الرموز بإحدى الطريقتين الآتيتين . الطريقة الأولى هى أن تكتب المعادلتين الأساسيتين على الصورة :

ا$_1$ س + ب$_1$ ص + ح$_1$ = ٠
ا$_2$ س + ب$_2$ ص + ح$_2$ = ٠

وعلى ذلك نأخذ قاعدة الحل بالمحددات الصورة

$$\text{س} = \frac{\begin{vmatrix} \text{ب}_1 & \text{ح}_1 \\ \text{ب}_2 & \text{ح}_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ب}_1 \\ \text{ا}_2 & \text{ب}_2 \end{vmatrix}} \quad ، \quad \text{ص} = \frac{\begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ح}_1 \\ \text{ا}_2 & \text{ح}_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ب}_1 \\ \text{ا}_2 & \text{ب}_2 \end{vmatrix}}$$

ويمكننا أن نقتصد أكثر إذا كتبنا المعادلتين الأصليتين على الصورة :

$$\text{ا}_{11}\,\text{س} + \text{ا}_{21}\,\text{ص} + \text{ح}_1 = ٠$$
$$\text{ا}_{12}\,\text{س} + \text{ا}_{22}\,\text{ص} + \text{ح}_2 = ٠$$

فيأخذ الحل الصورة :

$$\text{س} = \frac{\begin{vmatrix} \text{ا}_{21} & \text{ح}_1 \\ \text{ا}_{22} & \text{ح}_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \text{ا}_{11} & \text{ا}_{21} \\ \text{ا}_{12} & \text{ا}_{22} \end{vmatrix}} \quad ، \quad \text{ص} = \frac{\begin{vmatrix} \text{ا}_{11} & \text{ح}_1 \\ \text{ا}_{12} & \text{ح}_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \text{ا}_{11} & \text{ا}_{21} \\ \text{ا}_{12} & \text{ا}_{22} \end{vmatrix}}$$

يمكننا الآن أن نكتب المحددات نفسها في صورة أكثر اختصاراً ، وذلك بأخذ الرمز العام ر للصف :

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_{21} & \text{ح}_1 \\ \text{ا}_{22} & \text{ح}_2 \end{vmatrix} = [\text{ا}_{\text{ر ص}} \ldots \text{ح}_{\text{ر}}] = \text{ا}_{21}\,\text{ح}_2 - \text{ا}_{22}\,\text{ح}_1 \,.$$

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_{11} & \text{ح}_1 \\ \text{ا}_{12} & \text{ح}_2 \end{vmatrix} = [\text{ا}_{\text{ر س}} \ldots \text{ح}_{\text{ر}}] = \text{ا}_{11}\,\text{ح}_2 - \text{ا}_{12}\,\text{ح}_1 \,.$$

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_{11} & \text{ا}_{21} \\ \text{ا}_{12} & \text{ا}_{22} \end{vmatrix} = [\text{ا}_{\text{ر س}} \ldots \text{ا}_{\text{ر ص}}] = \text{ا}_{11}\,\text{ا}_{22} - \text{ا}_{12}\,\text{ا}_{21} \,.$$

في هذه الصورة الأكثر اختصاراً يكون

$$\text{ا}_{11}\,\text{س} + \text{ا}_{21}\,\text{ص} + \text{ح}_1 = ٠$$
$$\text{س} = [\text{ا}_{\text{ر ص}} \ldots \text{ح}_{\text{ر}}] \div [\text{ا}_{\text{ر س}} \ldots \text{ا}_{\text{ر ص}}]$$

$$\text{ا}_{12}\,\text{س} + \text{ا}_{22}\,\text{ص} + \text{ح}_2 = ٠$$
$$\text{ص} = [\text{ا}_{\text{ر س}} \ldots \text{ح}_{\text{ر}}] \div [\text{ا}_{\text{ر س}} \ldots \text{ا}_{\text{ر ص}}] \,.$$

ونحن لم ندخل أي قواعد جديدة في كل ما سبق ، وإنما أدخلنا رموزاً جديدة فقط للمساعدة على تذكر طريقة الحل بدون إجراء الخطوات الأولية خطوة خطوة . وكلمة محدد ، هي ببساطة إسم لاطار الضرب التصالبي المتماثل الذي نكتبه بالكامل على هيئة مجموعة ٢ × ٢ . وعندما نعلم القيم العددية لعناصر الخلية ، نكتب قيمة المحدد ، كما فعلنا من قبل ، فمثلاً

$$\begin{vmatrix} ٣ & ٤ \\ ٢ & ٥ \end{vmatrix} = ٣ \times ٥ - ٤ \times ٢ = ٧ \,.$$

إذا حفظنا هذا الاطار ، يمكننا أن نأخذ في كل المعادلتين الآتيتين كما يأتي :

$$٤\,\text{س} + ٥\,\text{ص} = ٢ \qquad \therefore\ ٤\,\text{س} + ٥\,\text{ص} - ٢ = ٠$$
$$٣\,\text{س} + ٤\,\text{ص} = ١ \qquad ٣\,\text{س} + ٤\,\text{ص} - ١ = ٠$$

$$\text{س} = \frac{\begin{vmatrix} ٥ & -٢ \\ ٤ & -١ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} ٤ & ٥ \\ ٣ & ٤ \end{vmatrix}} \quad ، \quad \text{ص} = \frac{\begin{vmatrix} ٤ & -٢ \\ ٣ & -١ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} ٤ & ٥ \\ ٣ & ٤ \end{vmatrix}}$$

$$\therefore\ \text{س} = \frac{٥(-١) - ٤(-٢)}{٤(٤) - ٣(٥)} \quad ، \quad \text{ص} = \frac{٤(-١) - ٣(-٢)}{٤(٤) - ٣(٥)}$$

$$\therefore\ \text{س} = \frac{-٥ + ٨}{١٦ - ١٥} = ٣ \quad ، \quad \text{ص} = \frac{-٤ + ٦}{١٦ - ١٥} = ٢$$

$$\therefore\ \text{س} = ٣ \quad ، \quad \text{ص} = -٢ \,.$$

ويمكن جعل قاعدة الحل أكثر وضوحاً ، إذا كتبنا الاطار الثنائي الأساسي على هيئة مصفوفة أبعادها ٣ × ٢ :

$$\text{م} = \begin{Vmatrix} \text{ا}_{11} & \text{ا}_{21} & \text{ح}_1 \\ \text{ا}_{12} & \text{ا}_{22} & \text{ح}_2 \end{Vmatrix} = [\text{ا}_{\text{ر}} \ldots \text{ا}_{\text{ر}} \ldots \text{ح}_{\text{ر}}]$$

من هذه المصفوفة يمكننا الحصول على ثلاثة محددات لكل منها صفان وعمودان ، أى

$$\Delta(\text{س}) = [\text{ا}_{\text{رص}} \cdots \text{ح}_{\text{ر}}]$$

$$\Delta(\text{ص}) = [\text{ا}_{\text{رس}} \cdots \text{ح}_{\text{ر}}]$$

$$\Delta(\text{ح}) = [\text{ا}_{\text{رس}} \cdots \text{ا}_{\text{رص}}]$$

وباستخدام طريقة الرمز هذه نجد أن :

$$\text{س} = \Delta(\text{س}) \div \Delta(\text{ح}) \quad ، \quad \text{ص} = -\,\Delta(\text{ص}) \div \Delta(\text{ح})$$

ويمكن كتابة ذلك على الصورة :

$$\frac{\text{س}}{\Delta(\text{س})} = \frac{-\text{ص}}{\Delta(\text{ص})} = \frac{1}{\Delta(\text{ح})} \quad \cdots \quad (٣)$$

جرب استخدام هذا القانون بعمل معادلات يمكنك إختبار صحة حلولها.

من الجائز بعد ذلك أن يتساءل القارىء : هل توجد أية فائدة يمكن استخلاصها من قانون مختصر مثل هذا لعملية بسيطة للغاية مثل حل المعادلات الآتية التى تحتوى على مجهولين فقط ؟ والجواب على هذا السؤال هو أنه لا توجد أية فائدة سوى أننا وجدنا طريقاً قد يؤدى إلى تكوين نظام لتبسيط الحل الشاق للمعادلات الآتية التى نضطر فيه فى العادة إلى حذف عدد كبير من الكميات المجهولة ، ولكى نسير فى هذا الطريق يجب أن نلاحظ أولا إختلاف الإشارات فى (٣) ، وأن نأخذ فى كتابة قاعدة حل مجموعة من المعادلات الخطية المحتوية على ثلاثة مجاهيل ، على نفس الصورة (٣) . لتكن المعادلات فى الصورة الأساسية كما يأتى

$$\text{ا س} + \text{ب ص} + \text{ح ع} + \text{ء} = 0$$

$$\text{ه س} + \text{و ص} + \text{ن ع} + \text{ن} = 0$$

$$\text{ى س} + \text{ك ص} + \text{ل ع} + \text{م} = 0$$

المولدة التى أبعادها ٣ × ٤ فى هذه الحالة هى

$$\left\|\begin{matrix} \text{ا} & \text{ب} & \text{ح} & \text{ء} \\ \text{ه} & \text{و} & \text{ن} & \text{ن} \\ \text{ى} & \text{ك} & \text{ل} & \text{م} \end{matrix}\right\| \equiv [\text{ا}_{\text{رس}} \cdots \text{ا}_{\text{رص}} \cdots \text{ا}_{\text{رع}} \cdots \text{ح}_{\text{ر}}]$$

وباستخدام الاصطلاح الوارد فى (٣) ، يكون

$$\Delta(\text{س}) \equiv [\text{ا}_{\text{رص}} \cdots \text{ا}_{\text{رع}} \cdots \text{ح}_{\text{ر}}]$$

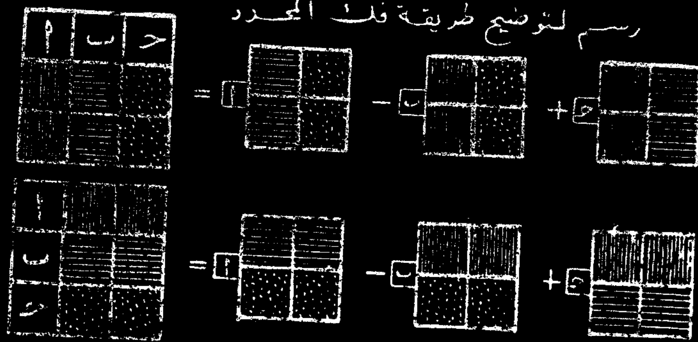
وبدون أن نسبق الحكم عن كيفية تفسير معنى هذا المحدد الذى أبعاده ٣ × ٣ ، سنعطى هنا فقط الصورة التى يأخذها هذا المحدد

$$\Delta(\text{س}) \equiv \left|\begin{matrix} \text{ب} & \text{ح} & \text{ء} \\ \text{و} & \text{ن} & \text{ن} \\ \text{ك} & \text{ل} & \text{م} \end{matrix}\right| \equiv [\text{ا}_{\text{رص}} \cdots \text{ا}_{\text{رع}} \cdots \text{ح}_{\text{ر}}]$$

بالمثل

$$\Delta(\text{ح}) \equiv [\text{ا}_{\text{رس}} \cdots \text{ا}_{\text{رص}} \cdots \text{ا}_{\text{رع}}] = \left|\begin{matrix} \text{ا} & \text{ب} & \text{ح} \\ \text{ه} & \text{و} & \text{ن} \\ \text{ى} & \text{ك} & \text{ل} \end{matrix}\right|$$

رسم لتوضيح طريقة فك المحدد



شكل (١٨٦)

نكتب الآن قاعدة الحل التى نتخليها وتتفق مع (٣) ، إلا وهى :

$$\frac{\text{س}}{\Delta(\text{س})} = \frac{-\text{ص}}{\Delta(\text{ص})} = \frac{\text{ع}}{\Delta(\text{ع})} = \frac{-1}{\Delta(\text{ح})} \quad (٤)$$

وينتج من ذلك أن

$$-\text{ع} = \begin{vmatrix} \text{ا} & \text{ب} & \text{ء} \\ \text{ه} & \text{و} & \text{ن} \\ \text{ى} & \text{ك} & \text{م} \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} \text{ا} & \text{ب} & \text{ح} \\ \text{ه} & \text{و} & \text{ن} \\ \text{ى} & \text{ك} & \text{ل} \end{vmatrix} \qquad (٥)$$

هذه الطريقة تعبر عن كل متغير كخارج قسمة محددين من الرتبة الثالثة (٣ × ٣) ، وهو تعبير لا تكون له أية قيمة إلى أن نعطى معنى للمحدد من الرتبة الثالثة . لإجراء ذلك ، يجب أن ندرس حل المعادلات الثلاث بطريقة الحذف . لحذف س من المعادلتين الأولى والثانية نكتب

$$\text{اهس + بهص + حهع + ءه = ٠}$$
$$\text{اهس + اوص + انع + ان = ٠} \qquad (٦)$$
$$\text{(به − او) ص + (حه − ان) ع + (ءه − ان) = ٠}$$

وبنفس الطريقة نحصل من المعادلتين الثانية والثالثة على

$$\text{(وى − هك) ص + (نى − هل) ع + (نى − هم) = ٠} \qquad (٧)$$

نحذف الآن ص من المعادلات الثلاث بالطريقة المألوفة ، فنحصل على

$$\text{ع} = \frac{\text{(به − او) (نى − هم) − (وى − هك) (ءه − ان)}}{\text{(وى − هك) (حه − ان) − (به − او) (نى − هل)}} \qquad (٨)$$

$$= \frac{\text{بنى − بهم + اوم − ءوى + هءك − انك}}{\text{حوى − هحك + انك − بنى + بهل − اول}}$$

$$= \frac{\text{ا(وم − نك) − ب(هم − نى) + ء(هك − وى)}}{\text{ا(نك − ول) − ب(نى − هل) + ح(وى − هك)}} \qquad (٩)$$

من الواضح الآن أن بسط (٩) يحتوى على نفس العناصر الموجودة فى محدد المرتبة الثالثة الموجود فى بسط ع (٥) ، وكذلك مقام (٩) يحتوى على نفس عناصر محدد الرتبة الثالثة الموجود فى مقام ع . يمكننا الآن إعطاء معنى لهذين المحددين من الرتبة الثالثة إذا كتبنا (٩) على الصورة :

$$-\text{ع} = \frac{\text{ا(وم − نك) − ب(هم − نى) + ء(هك − وى)}}{\text{ا(ول − نك) − ب(هل − نى) + ح(هك − وى)}} \qquad (١٠)$$

بمقارنة (١٠) ، (٥) نرى فوراً أن تعريفنا للمحدد من الرتبة الثالثة ٣ × ٣ يجب أن يعنى :

$$\begin{vmatrix} \text{ا} & \text{ب} & \text{ء} \\ \text{ه} & \text{و} & \text{ن} \\ \text{ى} & \text{ك} & \text{م} \end{vmatrix} = \text{ا(وم − نك) − ب(هم − نى) + ء(هك − وى)}$$

$$= \text{ا} \begin{vmatrix} \text{و} & \text{ن} \\ \text{ك} & \text{م} \end{vmatrix} - \text{ب} \begin{vmatrix} \text{ه} & \text{ن} \\ \text{ى} & \text{م} \end{vmatrix} + \text{ء} \begin{vmatrix} \text{ه} & \text{و} \\ \text{ى} & \text{ك} \end{vmatrix} \qquad (١١)$$

$$\begin{vmatrix} \text{ا} & \text{ب} & \text{ح} \\ \text{ه} & \text{و} & \text{ن} \\ \text{ى} & \text{ك} & \text{ل} \end{vmatrix} = \text{ا(ول − نك) − ب(هل − نى) + ح(هك − وى)}$$

$$= \text{ا} \begin{vmatrix} \text{و} & \text{ن} \\ \text{ك} & \text{ل} \end{vmatrix} - \text{ب} \begin{vmatrix} \text{ه} & \text{ن} \\ \text{ى} & \text{ل} \end{vmatrix} + \text{ح} \begin{vmatrix} \text{ه} & \text{و} \\ \text{ى} & \text{ك} \end{vmatrix} \qquad (١٢)$$

ومن الواضح أن كل من محددى الرتبة الثالثة (٣ × ٣) يمكن ردّه إلى ثلاث محددات من الرتبة الثانية (٢ × ٢) حسب قاعدة واحدة معينة يمكن وضعها على الصورة الآتية :

$$\begin{vmatrix} \text{ك}_{11} & \text{ك}_{21} & \text{ك}_{31} \\ \text{ك}_{12} & \text{ك}_{22} & \text{ك}_{32} \\ \text{ك}_{13} & \text{ك}_{23} & \text{ك}_{33} \end{vmatrix} = \text{ك}_{11} \begin{vmatrix} \text{ك}_{22} & \text{ك}_{32} \\ \text{ك}_{23} & \text{ك}_{33} \end{vmatrix} - \text{ك}_{21} \begin{vmatrix} \text{ك}_{12} & \text{ك}_{32} \\ \text{ك}_{13} & \text{ك}_{33} \end{vmatrix} + \text{ك}_{31} \begin{vmatrix} \text{ك}_{12} & \text{ك}_{22} \\ \text{ك}_{13} & \text{ك}_{23} \end{vmatrix}$$

لإيجاد مثل هذا المفكوك لمحدد من الرتبة الثالثة ، وهو مفكوك مكون من حاصل ضرب ثلاثة عناصر فى ثلاثة متممات، مناظرة (محددات من رتبة أدنى) ، مع إختلاف الإشارة من حد لحد) نأخذ كل حد فى الصف العلوى ونأخذ المتمم المناظر له على أنه المحدد الذى يبقى بعد رفع كل من الصف والعمود اللذين يلاقيان فى الحد المذكور . وهذا هو التفسير الذى نعطيه للقيمة العددية لمحدد الرتبة الثالثة . فمثلا

$$\begin{vmatrix} ٣ & ٤ & ٦ \\ ٢ & ٥ & ١ \\ ٠ & ١ & ٤ \end{vmatrix} = ٣ \begin{vmatrix} ٥ & ١ \\ ١ & ٤ \end{vmatrix} - ٤ \begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ٠ & ٤ \end{vmatrix} + ٦ \begin{vmatrix} ٢ & ٥ \\ ٠ & ١ \end{vmatrix}$$

$$= ٣\,(٢٠ - ١) - ٤\,(٨ - ٠) + ٦\,(٢ - ٠) = ٣٧$$

وكتمرين مفيد للقارىء ، كون معادلات تحتوى على ثلاثة مجاهيل وحقق أن قيم س ، ص التى تحصل عليها بالحذف متفقة مع القيم التى تحصل عليها من (٥) إذا عبرت عن المحددات من الرتبة الثالثة حسب القاعدة التى ذكرناها الآن . المثال الآتى يوضح حل ثلاثة معادلات ذات معاملات ثابتة .

$$٢س + ٣ص + ٩ = ع$$

$$٥س - ٢ص - ٤ع = ٠$$

$$٣س + ٦ص = -\,(٢ع + ٤)$$

بترتيب المعادلات على الصورة الأساسية ، نجد أن المصفوفة التى أبعادها ٤ × ٣ هى

$$\begin{vmatrix} ٢ & ٣ & -١ & ٩ \\ ٥ & -٢ & -٤ & ٠ \\ ٣ & ٦ & ٢ & ٤ \end{vmatrix}$$

وتعطى قيمة س من (٤) كما يأتى

$$-س = \Delta(س) \div \Delta(ح)\,ء$$

حيث

$$\Delta(س) = \begin{vmatrix} ٣ & -١ & ٩ \\ -٢ & -٤ & ٠ \\ ٦ & ٢ & ٤ \end{vmatrix} = ٣ \begin{vmatrix} -٤ & ٠ \\ ٢ & ٤ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -٢ & ٠ \\ ٦ & ٤ \end{vmatrix} + ٩ \begin{vmatrix} -٢ & -٤ \\ ٦ & ٢ \end{vmatrix}$$

$$= ٣\,(-١٦) + (-٨) + ٩\,(٢٠) = ١٢٤$$

$$\Delta(ح) = \begin{vmatrix} ٢ & ٣ & -١ \\ ٥ & -٢ & -٤ \\ ٣ & ٦ & ٢ \end{vmatrix} = ٢ \begin{vmatrix} -٢ & -٤ \\ ٦ & ٢ \end{vmatrix} - ٣ \begin{vmatrix} ٥ & -٤ \\ ٣ & ٢ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} ٥ & -٢ \\ ٣ & ٦ \end{vmatrix}$$

$$= ٢\,(٢٠) - ٣\,(٢٢) - ٣٦ = -٦٢$$

وعلى ذلك يكون $-س = ١٢٤ \div (-٦٢)$ ، أو $س = ٢$. بنفس الطريقة نجد أن $ص = -٣$ ، $ع = ٤$.

المحددات فى الحالة العامة : — نعرف المحدد من الرتبة الرابعة بطريقة مشابهة لتعريف المحدد من الرتبة الثالثة ، أى مجموع أربعة محددات من الرتبة الثالثة (٣ × ٣) كل منهما مضروب على الترتيب بحدود الصف العلوى مع تغيير الإشارات على التبادل . وعلى ذلك تكون قاعدة إيجاد قيمة المحدد من الرتبة الرابعة هى

$$\begin{vmatrix} ا & ب & ح & ء \\ ه & و & ن & ن \\ ى & ك & & م \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{vmatrix} = ا \begin{vmatrix} و & ن & ن \\ ك & ل & م \\ \beta & \gamma & \delta \end{vmatrix} - ب \begin{vmatrix} ه & ن & ن \\ ى & ل & م \\ \alpha & \gamma & \delta \end{vmatrix}$$

$$+ ح \begin{vmatrix} ه & و & ن \\ ى & ك & م \\ \alpha & \beta & \delta \end{vmatrix} - ء \begin{vmatrix} ه & و & ن \\ ى & ك & ل \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}$$

وبعملية أولية ، ولكنها شاقة ، يمكن إثبات أن حل مجموعة من أربعة معادلات محتوية على أربعة متغيرات ($س_١$ ، $س_٢$ ، $س_٣$ ، $س_٤$) فى الصورة الأساسية

$$ا_{ر،١}\,س_١ + ا_{ر،٢}\,س_٢ + ا_{ر،٣}\,س_٣ + ا_{ر،٤}\,س_٤ + ح_ر = ٠$$

، يمكن وضعه فى صورة متشابهة للحل (٣) ، أى

$$\frac{س_١}{\Delta(س_١)} = \frac{-س_٢}{\Delta(س_٢)} = \frac{س_٣}{\Delta(س_٣)} = \frac{-س_٤}{\Delta(س_٤)} = \frac{١}{\Delta(ح)}$$

ويمكن فك كل من المحددات المتممة الأربعة الموجودة فى هذا المفكوك على

هيئة ثلاثة محددات من الرتبة الثانية ، وعلى ذلك فبملاحظة الإشارات يكون المفكوك كله مساوياً لمجموع ٢٤ (|٤) من حواصـل الضرب التى يتكون كل منهما من أربعة حدود . وفى الحالة العامة ، يمكن فك محدد من الرتبة النونية إلى (ا) مجموع ٮ من المحددات من الرتبة (ٮ — ١) كل منهما مضروب فى الحد المناظر من الصف العلوى ، (ب) إلى |ن من حواصل الضرب التى يتكون كل منها من ٮ حداً ، ويكون نصف حواصل الضرب هذه موجب الإشارة والنصف الآخر سالب الإشارة . والعبارة السابقة صحيحة عند تطبيقها على محدد الرتبة الثانية (٢ × ٢) فهذا المحدد هو مجموع حدين (|٢) مختلفى الإشارة كل منهما هو حاصل ضرب حدين . ويتضح القانون العام لتكوين حواصل الضرب هذه الذى ينتج كل منهما من ضرب عوامل عددها ٮ ، اذا كتبنا المفكوك فى حالة محددى الرتبة الثانية والثالثة كما يأتى :

$$\begin{vmatrix} \text{أ}_1 & \text{أ}_2 \\ \text{ب}_1 & \text{ب}_2 \end{vmatrix} \equiv \text{أ}_1 \begin{vmatrix} \text{ب}_2 \end{vmatrix} - \text{أ}_2 \begin{vmatrix} \text{ب}_1 \end{vmatrix} = (\text{أ}_1 \text{ب}_2 - \text{أ}_2 \text{ب}_1)$$

$$\begin{vmatrix} \text{أ}_1 & \text{أ}_2 & \text{أ}_3 \\ \text{ب}_1 & \text{ب}_2 & \text{ب}_3 \\ \text{ح}_1 & \text{ح}_2 & \text{ح}_3 \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} \text{أ}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \text{ب}_2 & \text{ب}_3 \\ 0 & \text{ح}_2 & \text{ح}_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -\text{أ}_2 & 0 \\ \text{ب}_1 & 0 & \text{ب}_3 \\ \text{ح}_1 & 0 & \text{ح}_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & \text{أ}_3 \\ \text{ب}_1 & \text{ب}_2 & 0 \\ \text{ح}_1 & \text{ح}_2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\equiv \text{أ}_1 \begin{vmatrix} \text{ب}_2 & \text{ب}_3 \\ \text{ح}_2 & \text{ح}_3 \end{vmatrix} - \text{أ}_2 \begin{vmatrix} \text{ب}_1 & \text{ب}_3 \\ \text{ح}_1 & \text{ح}_3 \end{vmatrix} + \text{أ}_3 \begin{vmatrix} \text{ب}_1 & \text{ب}_2 \\ \text{ح}_1 & \text{ح}_2 \end{vmatrix}$$

$$= \text{أ}_1 (\text{ب}_2 \text{ح}_3 - \text{ب}_3 \text{ح}_2) - \text{أ}_2 (\text{ب}_1 \text{ح}_3 - \text{ب}_3 \text{ح}_1)$$

$$+ \text{أ}_3 (\text{ب}_1 \text{ح}_2 - \text{ب}_2 \text{ح}_1) = \text{أ}_1 \text{ب}_2 \text{ح}_3 + \text{أ}_2 \text{ب}_3 \text{ح}_1$$

$$+ \text{أ}_3 \text{ب}_1 \text{ح}_2 - \text{أ}_1 \text{ب}_3 \text{ح}_2 - \text{أ}_2 \text{ب}_1 \text{ح}_3 - \text{أ}_3 \text{ب}_2 \text{ح}_1$$

جميع حواصل الضرب التى عددها |ن والتى يتكون كل منهما من ٮ حداً فى بعضها ، تشمل جميع تباديل حدود عددها ٮ مقيدة بشرط واحد وهو ألا يحتوى أى حاصل ضرب إلا على حد واحد فقط من كل صف أو عمود . ويتضح قانون الإشارات بالنسبة لحواصل الضرب فى مفكوك محدد إذا استخدمنا طريقة الرمز المزدوجة (أ ر و) التى تميز بين الترتيب العمودى

والترتيب الأفقى . وعند ترتيب حواصل الضرب ترتيباً أفقياً كما فعلنا (هنا ا ، ب ، ح) ، فإن الرموز العددية تبين الموضع العمودى . فمثلا فى حالة حواصل الضرب الناتجة من ضرب ثلاثة كميات نلاحظ أن :

(١) تبديل واحد أو ثلاثة تبديلات تلزم فى حالة الحد السالب لكى ترجع إلى الترتيب الأساسى لدليل العمود .

فمثلا ٢٣١ إلى ٣٢١ ، ٣١٢ إلى ٣٢١ ، ١٢٣ إلى ٢١٣ ، ٢٣١ إلى ٣٢١ .

(٢) وفى حالة الحدود الموجبة نرجع إلى الترتيب الأساسى لدليل العمود بدون إجراء أى تبديل أو بإجراء تبديلين اثنين .

فمثلا ١٣٢ إلى ٣١٢ إلى ٣٢١ ، ٢١٣ إلى ٢٣١ إلى ٣٢١

وفى الحالة العامة تكون القاعدة بالنسبة للمحدد من أى رتبة هى أن حواصل الضرب السالبة تتطلب عدداً فردياً من التبديلات بينما تتطلب حواصل الضرب الموجبة عدداً زوجياً منها .

حساب القيمة العددية للمحددات : حتى هذه المرحلة ، لا توجد إلا فائدة واحدة للمحددات ألا وهى إعطاء نظام مناسب سهل الحفظ لحل مجموعة من المعادلات الخطية . وليست هذه بالفائدة القليلة القيمة ، حيث بدون استخدام المحددات يتحتم علينا أن نقوم بإجراء عمليات حذف المتغيرات الواحدة تلو الأخرى . وتنشأ فائدة أخرى أهم من هذه من احتمال استخدام الخواص العددية للمحددات فى المساعدة على إجراء العمليات الحسابية بسرعة . وسنلخص الخواص الأساسية ، من وجهة النظر هذه ، فى القواعد الآتية التى تكاد لا تحتاج إلى إثبات . واختبار هذه القواعد فى حالة المحددات من الرتبة الثانية والثالثة يكفى لإمكان تطبيقها للمحددات من الرتب الأعلى ، وذلك لأن عملية فك محدد من الرتبة الثالثة على هيئة ثلاثة محددات من الرتبة الثانية تشابه تماماً عملية فك محدد رتبته ٮ إلى محددات عددها ٮ ورتبة كل منها (ٮ — ١) . ولكى يرى القارئ المبتدئ فائدة استخدام كل قاعدة يستحسن تطبيقها معاً بدلا من إعطاء مثال توضيحى لكل منهما .

القاعدة الأولى — دوران الصفوف والأعمدة °٩٠ ، بحيث يصبح الصف الذى رتبته ر هو العمود الذى رتبته ر وبالعكس ، لا يغير قيمة المحدد .

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ا}_2 \\ \text{ب}_1 & \text{ب}_2 \end{vmatrix} = \text{ا}_1\text{ب}_2 - \text{ا}_2\text{ب}_1 = \begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ب}_1 \\ \text{ا}_2 & \text{ب}_2 \end{vmatrix}$$

وتتضح القيمة العملية لهذه القاعدة من دراسة المحدد

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 6 & 6 & 4 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 6 & 6 \end{vmatrix}$$

بتطبيق قاعدة إمكان تغيير الترتيب ، يمكننا حذف أحد العناصر فى خطوة واحدة ، وذلك لأن من الممكن كتابة المحدد على الصورة

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 4 & 2 & 6 \\ 5 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}$$

وتغيير الترتيب هذا ليس ضرورياً ، وذلك لأنه حسب القاعدة ، يمكن فك المحدد بإحدى طريقتين :

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ا}_2 & \text{ا}_3 \\ \text{ب}_1 & \text{ب}_2 & \text{ب}_3 \\ \text{ج}_1 & \text{ج}_2 & \text{ج}_3 \end{vmatrix} \equiv \text{ا}_1\begin{vmatrix} \text{ب}_2 & \text{ب}_3 \\ \text{ج}_2 & \text{ج}_3 \end{vmatrix} - \text{ا}_2\begin{vmatrix} \text{ب}_1 & \text{ب}_3 \\ \text{ج}_1 & \text{ج}_3 \end{vmatrix} + \text{ا}_3\begin{vmatrix} \text{ب}_1 & \text{ب}_2 \\ \text{ج}_1 & \text{ج}_2 \end{vmatrix}$$

$$\equiv \text{ا}_1\text{ب}_2\text{ج}_3 + \text{ا}_2\text{ب}_3\text{ج}_1 + \text{ا}_3\text{ب}_1\text{ج}_2 - \text{ا}_1\text{ب}_3\text{ج}_2 - \text{ا}_2\text{ب}_1\text{ج}_3 - \text{ا}_3\text{ب}_2\text{ج}_1$$

$$\equiv \text{ا}_1\begin{vmatrix} \text{ب}_2 & \text{ب}_3 \\ \text{ج}_2 & \text{ج}_3 \end{vmatrix} - \text{ب}_1\begin{vmatrix} \text{ا}_2 & \text{ا}_3 \\ \text{ج}_2 & \text{ج}_3 \end{vmatrix} + \text{ج}_1\begin{vmatrix} \text{ا}_2 & \text{ا}_3 \\ \text{ب}_2 & \text{ب}_3 \end{vmatrix}$$

القاعدة الثانية : تبادل عمودين كل محل الآخر ، أو تبادل صفين كل محل الآخر يغير إشارة القيمة العددية للمحدد . فمثلا

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ا}_2 \\ \text{ب}_1 & \text{ب}_2 \end{vmatrix} \equiv -\begin{vmatrix} \text{ا}_2 & \text{ا}_1 \\ \text{ب}_2 & \text{ب}_1 \end{vmatrix} \equiv -\begin{vmatrix} \text{ب}_1 & \text{ب}_2 \\ \text{ا}_1 & \text{ا}_2 \end{vmatrix}$$

وتتضح القيمة العملية لهذه القاعدة من حقيقة أنها تمكننا من الحصول على الصف العلوى . أو العمود الأول ، محتوياً على صفر أو أكثر ، وبذلك نتخلص من عناصر المحدد المناظرة ، فمثلا

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = +\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= -2(3)\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 2(6)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} .$$

$$= -6(9-4) - 12(2-12) - 3(4-6) - 6(8-1) = 54 \text{ ،}$$

القاعدة الثالثة : تتلاشى قيمة المحدد إذا تساوى فيه صفان أو عمودان أى أن

$$\begin{vmatrix} \text{ا} & \text{ب} & \text{ج} \\ \text{د} & \text{ه} & \text{و} \\ \text{ا} & \text{ب} & \text{ج} \end{vmatrix} \equiv 0 \equiv \begin{vmatrix} \text{ا} & \text{ب} & \text{ب} \\ \text{د} & \text{ه} & \text{ه} \\ \text{م} & \text{ن} & \text{ن} \end{vmatrix}$$

تتضح إحدى فوائد هذه القاعده من نفسها عند دراسة معنى القاعدة الآتية :

القاعدة الرابعة : ضرب جميع حدود أحد الصفوف أو أحد الأعمدة لمحدد فى نفس العامل ك ، يكافىء ضرب القيمة العددية للمحدد فى ك ، فمثلا

$$\begin{vmatrix} \text{ا}\text{ك} & \text{ب}\text{ك} & \text{ج}\text{ك} \\ \text{د} & \text{ه} & \text{و} \\ \text{م} & \text{ن} & \text{ى} \end{vmatrix} \equiv \text{ك}\begin{vmatrix} \text{ا} & \text{ب} & \text{ج} \\ \text{د} & \text{ه} & \text{و} \\ \text{م} & \text{ن} & \text{ى} \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} \text{ا} & \text{ب}\text{ك} & \text{ج} \\ \text{د} & \text{ه}\text{ك} & \text{و} \\ \text{م} & \text{ن}\text{ك} & \text{ى} \end{vmatrix}$$

احدى فوائد هـذه القاعدة هى اختصار القيم العددية لحدود المحـدد قبل إيجاد مفكوكه ، فمثلا ،

$$\begin{vmatrix} ١ & ٣ & ١ \\ ٧ & ٨ & ٨ \\ ٧ & ٣ & ٣ \end{vmatrix} ٣^{٢} \times ٥^{٢} = \begin{vmatrix} ٣ & ٩ & ١ \\ ٢١ & ٢٤ & ٨ \\ ٢١ & ٩ & ٣ \end{vmatrix} (٥)^{٢} = \begin{vmatrix} ١٥ & ٤٥ & ٢٥ \\ ٢١ & ٢٤ & ٤٠ \\ ٢١ & ٩ & ١٥ \end{vmatrix}$$

وتستخدم هذه القاعدة مع سابقتها (٣) كما يأتى

$$\text{صفرا} = \begin{vmatrix} ٥ & ٤٥ & ٥ \\ ٨ & ٢٤ & ٨ \\ ٣ & ٩ & ٣ \end{vmatrix} ٢ \times ٥ = \begin{vmatrix} ١٠ & ٤٥ & ٢٥ \\ ١٦ & ٢٤ & ٤٠ \\ ٦ & ٩ & ١٥ \end{vmatrix}$$

وعلى ذلك يمكننا أن نهمل أى عناصر فى المفـكوك ، إذا كانت النسبة بين الحدود المتناظرة فى صفين أو فى عمودين ثابتة .

القاعدة الخامسة : جمع أو طرح حـدود صف أو عمود من الحـدود التى تناظرها فى صف أو عمود آخر يوازيه لا يغير قيمة المحد ، أى أن

$$\begin{vmatrix} ى - ل & و - د & ح - ا \\ ن & ه & ب \\ ى & و & ح \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ل & د & د + ا \\ ن & ه & ه + ب \\ ى & و & و + ح \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ل & د & ا \\ ن & ه & ب \\ ى & و & ح \end{vmatrix}$$

باستخـدام القواعـد السابقة يمـكننا حذف أى عنصر وذلك بتغيير ترتيب الصفوف والأعمدة إلى نحصل على حد يساوى صفرا فى الصف العلوى أو فى العمود الأول . باستخدام القاعدة الأخيرة يمكننا (أولا) أن ندخل حدودا صفرية جديدة وذلك بجعل الحـدود المتناظرة فى الأشعة المتوازية متساوية ، (ثانيا) تخفيض القيمـة العـددية التى علينا أن نحسبها بدرجـة كبيرة . والمثال الآتى يبين جميـع خطوات الاختصار التى يجريها الشخص المتمرن باستخدام مساحة من الورق أقل بكثير من المستخدمة هنا :

$$\begin{vmatrix} ٣٩ & ٤ & ٣ \\ ١٣ & ٨ & ٠ \\ ٢٦ & ١٠ & ٨- \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٣٩ & ٤ & (٣٩ - ٤٢) \\ ١٣ & ٨ & (١٣ - ١٣) \\ ٢٦ & ١٠ & (٢٦ - ١٨) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٣٩ & ٤ & ٤٢ \\ ١٣ & ٨ & ١٣ \\ ٢٦ & ١٠ & ١٨ \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} (٣ - ٢) & (٥ - ٢) & (٨ + ٣) \\ ١ & ٤ & ٠ \\ ٢ & ٥ & ٨- \end{vmatrix} ٢٦ = \begin{vmatrix} ٣ & ٢ & ٣ \\ ١ & ٤ & ٠ \\ ٢ & ٥ & ٨- \end{vmatrix} ١٣ \times ٢ =$$

$$\begin{vmatrix} ١ & ٣- & ١١ \\ ١ & ٤ & ٠ \\ (١ - ٢) & (٤ - ٥) & (٠ - ٨-) \end{vmatrix} ٢٦ =$$

$$\begin{vmatrix} ١ & ٣- & ١١ \\ ١ & ٤ & ٠ \\ ٠ & (٤ - ١) & (٠ - ٨-) \end{vmatrix} ٢٦ = \begin{vmatrix} ١ & ٣- & ١١ \\ ١ & ٤ & ٠ \\ ١ & ١ & ٨- \end{vmatrix} ٢٦ =$$

$$\begin{vmatrix} ٣- & ١١ & ١ \\ ٧ & ١١- & ٠ \\ ٣- & ٨- & ٠ \end{vmatrix} ٢٦ = \begin{vmatrix} ١ & ٣- & ١١ \\ ٠ & (٣ + ٤) & (١١ - ٠) \\ ٠ & ٣- & ٨- \end{vmatrix} ٢٦ =$$

$$\begin{vmatrix} ٧ & ١١ \\ ٣- & ٨ \end{vmatrix} ٢٦ - =$$

$$.٢٣١٤ = ٨٩ \times ٢٦ = (٥٦ - ٣٣ -) ٢٦ - =$$

القاعدة السادسة : جمع أو طرح مضاعفات حدود شعاع (أو أشعة) من حدود شعاع (أو أشعة) مواز (أو موازية) لا يغير قيمة المحدد ، فمثلا

$$\begin{vmatrix} ل & د & ل\beta - د\alpha - ا \\ ن & ه & ن\beta - ه\alpha - ب \\ ى & و & ى\beta - و\alpha - ح \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} ل & د & ا \\ ن & ه & ب \\ ى & و & ح \end{vmatrix}$$

هذه القاعدة هى تعميم للقاعدة السابقة باستخدام القاعدة الرابعة نستخدم هذه القاعدة فى حساب قيمة المحدد السابق .

$$\begin{vmatrix} ٣٩ & ٤ & ٤٢ \\ ١٣ & ٨ & ١٣ \\ ٢٦ & ١٠ & ١٨ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٢٦\times٢-٣٩ & ١٠\times٢-٤ & ١٨\times٢-٤٢ \\ ١٣ & ٨ & ١٣ \\ ٢٦ & ١٠ & ١٨ \end{vmatrix}$$

$$= ١٣\times٢ \begin{vmatrix} ١- & ٨- & ٦ \\ ٢ & ٥ & ١٨ \\ ١ & ٤ & ١٣ \end{vmatrix} = ١٣\times٢ \begin{vmatrix} ١- & ٨- & ٦ \\ ١ & ٤ & ١٣ \\ ١ & ١ & ٥ \end{vmatrix} = ١٣\times٢ \begin{vmatrix} ١- & ٨- & ٦ \\ ٠ & ٢ & ٨ \\ ١ & ١ & ٥ \end{vmatrix}$$

$$=٢٦ \begin{vmatrix} ١- & ٨- & ٦ \\ ٠ & ٣ & ٨ \\ ٠ & ٧- & ١١ \end{vmatrix} =-٢٦ \begin{vmatrix} ٨- & ٦ & ١ \\ ٣ & ٨ & ٠ \\ ٧- & ١١ & ٠ \end{vmatrix} =-٢٦ \begin{vmatrix} ٢ & ٨ \\ ٧- & ١١ \end{vmatrix}$$

$$= -٢٦ \left(-٥٦ - ٣٢ \right) = ٢٦ \times ٨٩ = ٢٣١٤ .$$

القاعدة السابعة : تتلاشى قيمة المحدد إذا كانت حدود أى صف أو أى عمود جميعها أصفار .

يتضح برهان هذه القاعدة إذا نقلنا صف الأصفار إلى أعلى صف أو عمود الأصفار إلى أول عمود من اليمين مع ملاحظة الإشارات (القاعدة الثانية) . تصبح جميع العوامل التي ستضرب في العناصر في مفكوك المحدد أصفاراً وبذلك يتلاشى المفكوك معه .

وتتوقف الاستفادة من استخدام هذه القواعد على التمرين . وإذا حصل القارئ على الخبرة الكافية فإنه يستطيع أن يختزل أى محدد من أي رتبة إلى آخر تكون فيه جميع حدود الصف العلوى ، فيما عدا الحد الأول ($ا_{11}$) أصفاراً ، أو تكون فيه جميع حدود العمود الايمن فيما عدا الحد العلوى ($ا_{11}$) أصفاراً . وعلى ذلك تختفي جميع عناصر المحدد فيما عدا العنصر المضروب في $ا_{11}$. وهذه العملية تختزل رتبة المحدد من ن إلى (ن − ١) . وعلى ذلك فإن التطبيق المتتالى للقواعد يؤدى في النهاية إلى اختزال المحدد الأصلى إلى محدد من الرتبة الثانية . وأحسن طريقة للتمرين على استخدام هذه القواعد هو أن

تكتب معادلات معلوم حلها ثم حلها بطريقة الحذف وبعد ذلك باستخدام المحددات . فمثلا افرض أن س = ١ ، ص = ٢ ، ع = ٣ ، فيكون

$$٢ س + ٣ ص + ع = ١١$$
$$٥ س + ٣ ص - ٢ ع = ٥$$
$$٤ س + ٢ ص - ٣ ع = -١$$

يتحتم على السباح المبتدئ أن يقوم بحركات كثيرة يستطيع السباح الماهر أن يجريها معاه بالمثل فإن استخدام القواعد السابقة معا بطرق أخرى قد يعطى نتائج مفيدة . وننصح الطالب الذى يريد الوصول إلى درجة عالية من المعرفة بقراءة كتاب حساب المشاهدات لمؤلفيه ويتكر وروبنسون . ويكفى ماذكرناه لبيان كيف أن طريقة المحددات تخفف المجهود المطلوب لحل مجموعة من المعادلات الآتية ، وتقلل من خطر الوقوع في أخطاء حسابية أثناء عملية الحل

وكما ذكرنا من قبل ، يمكن أن يحصل الطالب على خبرة لا حد لها بعمل معادلات آنية ، ثم حلها بواسطة المحددات والتحقق من صحة النتيجة بالتعويض

التطبيقات الهندسية للمحددات : — لقد نظرنا إلى استخدام المحددات حتى الآن على أنه نظام اقتصادى لإجراء العمليات الحسابية المتعلقة بحل مجموعة من المعادلات الآنية الخطية . وتذهب تطبيقات المحددات إلى أبعد من هذا الغرض العملى الهام بكثير . ومن بين تطبيقات المحددات تعريف كثير من الأسس العامة في الهندسة التحليلية . وسنعطى مثالين يكفيان لتوضيح استخدام المحددات في هذه الناحية : (ا) شرط وقوع ثلاث نقط على خط مستقيم ، (ب) شرط تلاقى ثلاث مستقيمات أو أكثر واقعة في مستو واحد في نقطة واحدة .

إذا وقعت الثلاثة النقط ($ن_1$ ، $ن_2$ ، $ن_3$) على خط مستقيم واحد فإن الزاوية التي يميل بها المستقيم الواصل بين $ن_1$ ، $ن_2$ على محور س تساوى الزاوية التي يميل بها المستقيم الواصل بين $ن_2$ ، $ن_3$ على محور س ولتكن هذه الزاوية α مثلا . يجب على القارئ أن يرسم شكلا مناسباً ، ترمز فيه للنقط الثلاث بالإحداثيات ($س_1$ ، $ص_1$) ، ($س_2$ ، $ص_2$) ، ($س_3$ ، $ص_3$) .

من تساوى زاوية ميل المستقيمين $ن_1ن_2$ ، $ن_1ن_3$ على محور السينات نجد أن

$$\frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1} = طا\,\alpha = \frac{ص_3 - ص_2}{س_3 - س_2}$$

$$\therefore (س_3 - س_2)(ص_2 - ص_1) = (ص_3 - ص_2)(س_2 - س_1)$$

$$س_3ص_2 - س_3ص_1 - س_2ص_2 + س_2ص_1 = س_2ص_3$$
$$- س_1ص_3 - س_2ص_2 + س_1ص_2$$

$$\therefore س_3ص_2 + س_2ص_1 + س_1ص_3 - س_2ص_3 - س_3ص_1$$
$$- س_1ص_2 = ٠$$

$$\therefore س_1(ص_3 - ص_2) - س_2(ص_3 - ص_1) + س_3$$
$$(ص_2 - ص_1) = ٠$$

$$\therefore س_1(ص_2 - ص_3) - س_2(ص_1 - ص_3) + س_3$$
$$(ص_1 - ص_2) = ٠$$

يمكن كتابة $(ص_2 - ص_3)$ على هيئة محدد :

$$\begin{vmatrix} ص_2 & ١ \\ ص_3 & ١ \end{vmatrix}$$

وعلى ذلك فالمعادلة الأخيرة يمكن كتابتها على الصورة

$$س_1\begin{vmatrix} ص_2 & ١ \\ ص_3 & ١ \end{vmatrix} - س_2\begin{vmatrix} ص_1 & ١ \\ ص_3 & ١ \end{vmatrix} + س_3\begin{vmatrix} ص_1 & ١ \\ ص_2 & ١ \end{vmatrix} = ٠$$

الثلاثة محددات ومعاملاتها الموجودة فى الطرف الأيمن من هذه المعادلة تكافىء محدداً واحداً من الرتبة الثالثة ، ويكون :

$$\begin{vmatrix} س_1 & ص_1 & ١ \\ س_2 & ص_2 & ١ \\ س_3 & ص_3 & ١ \end{vmatrix} = ٠$$

وعلى ذلك فإن تلاشى المحدد الموجود فى الطرف الأيمن هو شرط وقوع

النقط الثلاث $ن_1(س_1 ، ص_1)$ ، $ن_2(س_2 ، ص_2)$ ، $ن_3(س_3 ، ص_3)$ على خط مستقيم واحد .

مثال : إحدى الطرق لاختبار ما إذا كانت النقط (١ ، ٨) ، (٣ ، ١٨) ، (٦ ، ٣٣) واقعة على خط مستقيم واحد ، هى حساب قيمة المحدد :

$$\begin{vmatrix} ١ & ٨ & ١ \\ ٣ & ١٨ & ١ \\ ٦ & ٣٣ & ١ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٠ & ٨ & ١ \\ ٢ & ١٨ & ١ \\ ٥ & ٣٣ & ١ \end{vmatrix} = -٢\begin{vmatrix} ٨ & ١ \\ ٣٣ & ١ \end{vmatrix} + ٥\begin{vmatrix} ٨ & ١ \\ ١٨ & ١ \end{vmatrix}$$

$$= -٢\begin{vmatrix} ٨ & ١ \\ ٢٥ & ٠ \end{vmatrix} + ٥\begin{vmatrix} ٨ & ١ \\ ١٠ & ٠ \end{vmatrix} = (٥٠ - ٥٠) = ٠$$

وكان من الممكن طبعا اتباع طريقة أخرى ، وذلك بحل المعادلة $ص = (م\,س + ب)$ لكل زوج من المتغيرات . فيكون :

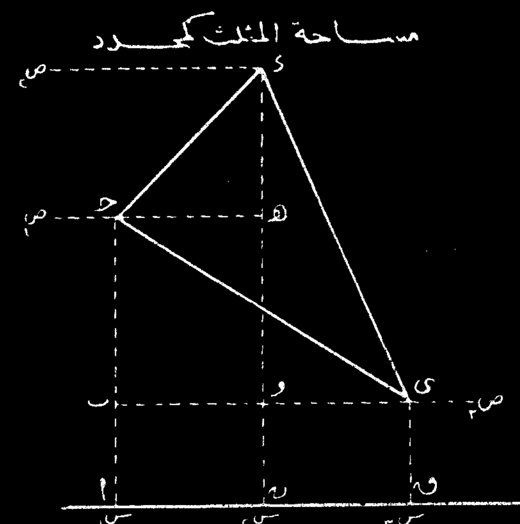
$$٨ = م + ب$$
$$١٨ = ٣م + ب$$
$$\therefore ١٠ = ٢م \quad أو \quad م = ٥ \;،\; ب = ٣$$

أى أن الخط المستقيم الواصل بين النقطتين (١ ، ٨) ، (٣ ، ١٨) هو $ص = (٥\,س + ٢)$. بتعويض قيمة س الخاصة بالنقطة الثالثة نجد أن $ص = ٥ \times ٦ + ٣ = ٣٣$ ، أى أن النقطة التى إحداثياها $س = ٦$ ، $ص = ٣٣$ تقع أيضاً على نفس الخط المستقيم .

لبحث تلاقى ثلاثة مستقيمات مستوية فى نقطة واحدة أكتب المعادلات الثلاث المناظرة على الصورة

$$(١)\quad ص = م_1س + ب_1 \qquad أو \qquad م_1س - ص + ب_1 = ٠$$
$$(٢)\quad ص = م_2س + ب_2 \qquad\qquad م_2س - ص + ب_2 = ٠$$
$$(٣)\quad ص = م_3س + ب_3 \qquad\qquad م_3س - ص + ب_3 = ٠$$

وعلى حسب الطريقة البيانية لحل معادلتين آنيتين فى متغيرين ، التى نحصل فيها على إحداثيات النقطة التى يتقاطع فيها المستقيمان الناظران للمعادلتين ، نجد



(شكل ١٨٧)

أن المستقيمين (١) ، (٢) يتقاطعان فى النقطة

$$\text{حـ ء ى} = \text{ا حـ ء ى ن}$$
$$- \text{ا حـ ى ن} = (\text{ا حـ هـ ن} + \text{حـ ء هـ} + \text{ء و ى} + \text{و ن ى ن})$$
$$- (\text{ب حـ ى} + \text{ا ب ى ن})$$

$$= ص_1 (س_2 - س_1) + \tfrac{1}{2} (ص_2 - ص_1)(س_2 - س_1)$$
$$+ \tfrac{1}{2} (ص_2 - ص_3)(س_3 - س_2) + ص_3 (س_3 - س_2)$$
$$- \tfrac{1}{2} (ص_1 - ص_3)(س_3 - س_1) - ص_3 (س_3 - س_1)$$

$$= \tfrac{1}{2} (ص_1 + ص_2)(س_2 - س_1) + \tfrac{1}{2} (ص_2 + ص_3) \times$$
$$(س_3 - س_2) - \tfrac{1}{2} (ص_1 + ص_3)(س_3 - س_1)$$

$$2 (\text{حـ ء ى}) = ص_1 س_2 - ص_1 س_1 + ص_2 س_2 - ص_2 س_1$$
$$+ ص_2 س_3 - ص_2 س_2 + ص_3 س_3 - ص_3 س_2 - ص_1 س_3$$
$$+ ص_1 س_1 - ص_3 س_3 + ص_3 س_1$$
$$= (ص_2 س_3 - ص_3 س_2) - (ص_1 س_3 - ص_3 س_1)$$
$$+ (ص_1 س_2 - ص_2 س_1)$$

$$= \begin{vmatrix} ص_2 & س_2 \\ ص_3 & س_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} ص_1 & س_1 \\ ص_3 & س_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ص_1 & س_1 \\ ص_2 & س_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & ص_1 & س_1 \\ 1 & ص_2 & س_2 \\ 1 & ص_3 & س_3 \end{vmatrix}$$

التى احداثياها ($س_ن$ ، $ص_ن$) هما حل المعادلتين ، أى أن

$$س_ن = \frac{\begin{vmatrix} -1 & ب_1 \\ -1 & ب_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} م_1 & -1 \\ م_2 & -1 \end{vmatrix}} \qquad ، \quad ص_ن = \frac{\begin{vmatrix} م_1 & ب_1 \\ م_2 & ب_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} م_1 & -1 \\ م_2 & -1 \end{vmatrix}}$$

إذا المستقيم الذى معادلته المعادلة الأخيرة يمر أيضاً بالنقطة ($س_ن$ ، $ص_ن$) ، فان

$$م_3 س_ن - ص_ن + ب_3 = 0$$

$$\therefore م_3 \begin{vmatrix} -1 & ب_1 \\ -1 & ب_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} م_1 & ب_1 \\ م_2 & ب_2 \end{vmatrix} + ب_3 \begin{vmatrix} م_1 & -1 \\ م_2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore م_3 \begin{vmatrix} 1 & ب_1 \\ 1 & ب_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} م_1 & ب_1 \\ م_2 & ب_2 \end{vmatrix} + ب_3 \begin{vmatrix} م_1 & 1 \\ م_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore \begin{vmatrix} م_3 & 1 & ب_3 \\ م_1 & 1 & ب_1 \\ م_2 & 1 & ب_2 \end{vmatrix} = 0 = \begin{vmatrix} م_1 & -1 & ب_1 \\ م_2 & -1 & ب_2 \\ م_3 & -1 & ب_3 \end{vmatrix}$$

مثال : ابحث فيما إذا كانت المستقيمات

$$ص = 5 س + 3$$
$$ص = 6 س + 2$$
$$ص = 4 س + 4$$

تتلاقى فى نقطة واحدة

يجب علينا أن نحسب قيمة المحدد

$$\begin{vmatrix} ٥ & -١ & ٣ \\ ٦ & -١ & ٢ \\ ٤ & -١ & ٤ \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} ٥ & ١ & ٣ \\ ٦ & ١ & ٢ \\ ٤ & ١ & ٤ \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} ٥ & ١ & ٣ \\ ١ & ٠ & -١ \\ ٤ & ١ & ٤ \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} ١ & ٠ & -١ \\ ١ & ٠ & -١ \\ ٤ & ١ & ٤ \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ١ & ٠ & -١ \\ ٤ & ١ & ٤ \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

حيث أن المحدد يتلاشى ، فإن المستقيمات تتلاقى فى نقطة واحدة ، هى فى الواقع النقطة $س = ١$ ، $ص = ٩$

يمكن للقارىء أن يقوم بتعميم هذه النتيجة لإيجـــاد الشرط الذى يجب توفره لكى تتحقق أربعة معادلات محتوية على ثلاثة مجاهيل نقط على الصورة

$$ا_م س + ب_م ص + حـ_م ع + ء_م = ٠$$

الشرط المطلوب هو :

$$\begin{vmatrix} ا_١ & ب_١ & حـ_١ & ء_١ \\ ا_٢ & ب_٢ & حـ_٢ & ء_٢ \\ ا_٣ & ب_٣ & حـ_٣ & ء_٣ \\ ا_٤ & ب_٤ & حـ_٤ & ء_٤ \end{vmatrix} = ٠$$

وهندسيا ، هذا هو الشرط الذى يجب توفره لكى تتلاقى أربعة مستويات فى نقطة واحدة $ن = (س_ن ، ص_ن ، ع_ن)$. وطبعاً يكون هذا الشرط ضروريا إذا كانت المستويات تمر بنقطة الأصل ، أى عندما $ء_م = ٠$ ، وبأخذ المحدد الصورة

$$\begin{vmatrix} ا_١ & ب_١ & حـ_١ & ٠ \\ ا_٢ & ب_٢ & حـ_٢ & ٠ \\ ا_٣ & ب_٣ & حـ_٣ & ٠ \\ ا_٤ & ب_٤ & حـ_٤ & ٠ \end{vmatrix}$$

وحسب القاعدة السابقة تتلاشى قيمة هذا المحدد . بالرجوع إلى القاعدة السابقة يمكننا أن نحصل على شرط وقوع ثلاثة نقط على خط مستقيم واحد بطريقة مختلفة عن السابقة مستخدمين النتيجة للحالة التى تقع فيها أربعة نقط فى مستوى واحـد الصورة العامة لمعادلة الخط المستقيم هى $ا س + ب ص = ء$ المعاملات الثابتة ا ، ب ، ء نأخذ نفس قيمتها عند التعويض بالاحـــداثيات $(س_١ ، ص_١)$ أو $(س_٢ ، ص_٢)$ أو $(س_٣ ، ص_٣)$ وهى إحداثيات الثلاثة نقط $ن_١$ ، $ن_٢$ ، $ن_٣$ التى تقـــع جميعها على نفس المستقيم ، ولكن علينا أن نعين هذه المعاملات الثابتة .

يمكننا كتابة المعادلات على الصورة .

$$ا س_١ + ب ص_١ = ء$$
$$ا س_٢ + ب ص_٢ = ء$$
$$ا س_٣ + ب ص_٣ = ء$$

وذلك لحل المعادلات فى المجاهيل ا ، ب ، ء باستخدام المحددات حيث الكميات $س_م$ ، $ص_م$ معلومة . قيمة ا التى نحصل عليها هى

$$ا = \frac{\begin{vmatrix} ص_١ & -١ & ٠ \\ ص_٢ & -١ & ٠ \\ ص_٣ & -١ & ٠ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} س_١ & ص_١ & -١ \\ س_٢ & ص_٢ & -١ \\ س_٣ & ص_٣ & -١ \end{vmatrix}}$$

وإذا استخدمنا الطريقة المختصرة للرمز للمحددات يمكن وضع ذلك على الصورة

$$ا \times [س_م \quad ص_م \quad -١] = [ص_م \quad -١ \quad ٠]$$

وحيث أن كلا من ا ، ب لا تساويان الصفر ، والمحدد الموجود فى

الطرف الأيسر يساوى صفراً (باستخدام القاعدة السابعة) ، فإنه ينتج أن

$$[\text{س}_{\text{ر}}\ \text{ص}_{\text{ر}} - \text{١}] = \text{٠} = [\text{س}_{\text{ر}}\ \text{ص}_{\text{ر}}\ \text{١}]$$

وللحصول على الشرط اللازم لوقوع النقطتين $\text{ن}_{\text{١}}$ ، $\text{ن}_{\text{٢}}$ على خط مستقيم يمر بنقطة الأصل ، نلاحظ أنه فى هذه الحالة $\text{س}_{\text{٣}} = \text{ص}_{\text{٣}} = \text{٠}$ ويكون الشرط المطلوب هو

$$\begin{vmatrix} \text{س}_{\text{١}} & \text{ص}_{\text{١}} & \text{١} \\ \text{س}_{\text{٢}} & \text{ص}_{\text{٢}} & \text{١} \\ \text{٠} & \text{٠} & \text{١} \end{vmatrix} = \text{٠} = \begin{vmatrix} \text{س}_{\text{١}} & \text{ص}_{\text{١}} \\ \text{س}_{\text{٢}} & \text{ص}_{\text{٢}} \end{vmatrix}$$

$$\therefore \text{س}_{\text{١}}\,\text{ص}_{\text{٢}} - \text{س}_{\text{٢}}\,\text{ص}_{\text{١}} = \text{٠}$$

$$\therefore \text{س}_{\text{١}}\,\text{ص}_{\text{٢}} = \text{س}_{\text{٢}}\,\text{ص}_{\text{١}}$$

$$\therefore \frac{\text{س}_{\text{١}}}{\text{س}_{\text{٢}}} = \frac{\text{ص}_{\text{١}}}{\text{ص}_{\text{٢}}}$$

وينتج هذا الشرط مباشرة من المعادلات الخطية الموضوعة على الصورة $\text{ص} = \text{م}\,\text{س} + \text{ب}$ ، لأنه فى هذه الحالة $\text{ب} = \text{٠}$.

$$\text{ص}_{\text{١}} = \text{م}\,\text{س}_{\text{١}}\ ،\ \text{ص}_{\text{٢}} = \text{م}\,\text{س}_{\text{٢}}\ .$$

جبر ورق اللعب

قـــد ذكرنا باختصار فى الباب الخامس الدور الذى تلعبه المضروبات والأعداد الشكلية فى موضوع تبويب الاختبارات ، وفى الباب التالى سنرى كيف أن المسائل الناتجة عن سحب عدد من أوراق اللعب من مجموعة من هذه الأوراق قد أضافت الكثير إلى معارفنا عن نظرية الاحتمالات وعند الكلام عن إختيار عينة من ٣ ورقات مثلا يحسن أن نوضح بادئ ذى بدء ما إذا كان هذا الاختيار يحدث فى آن واحد أو إختيار الورقات الثلاث يكون على التعاقب . فإذا كان الاختيار آنياً فلا يكون فيه تكرار بمعنى أنه لا يمكن إختيار الورقة الواحدة أكثر من مرة واحدة . أما الاختيار على التعاقب فإنه قد يكون فيه تكرار بالمعنى السابق . وهذا يحدث إذا أرجعنا الورقة المسحوبة إلى مجموعة الورق قبل السحبة التالية . ولسبب لا يعنينا أمره فى هـذا المكان سنقصر الـكلام على إختيار العينات التى نرد فيها الورقة إلى المجموعة قبـــل السحبة التالية كما أننا سنفترض أن مجموعة الورق قد أعيد تفنيطها قبل كل سحبة .

وعند الكلام عند تبويب الاختيارات قد نأخذ فى الاعتبار فقط تكوين العينة باعتبار أنها إختيار خاص ، أو نأخذ فى الاعتبار تركيب مـكونات هذا الاختيار باعتبار أنه تبديل خاص . فيما يلى سنتكلم عن التراتيب الخطية أى التراتيب التى تتميز بأن عناصرها ترتب فى خط مستقيم ، وهو ما يحدث عندما نسحب ٥ ورقات من ورق اللعب ونضعها الواحدة بجانب الأخرى فى خط مستقيم بحيث تكون وجوهها إلى أعلى . سنبدأ بتذكير القارىء بمـا سبق أن تعلمناه فى الباب الخامس . وسؤالنا الأول هو : عن عـدد الطرق المختلفة التى يمكن بها ترتيب أوراق مجموعة ورق اللعب جميعها فى خط مستقيم ؟

لتبسيط المسألة سنبدأ بمجموعة تحتوى على ثلاثة أوراق فقط ، ا ، ب ، حـ . نبدأ أولا بتثبيت وضع ا عند أول المستقيم ، ونبحث عن عدد الترتيبات المختلفة للورقتين ب ، حـ . من الواضح أنه توجـد طريقتان فقط لترتيب ب ، حـ : ا ب حـ ، ا حـ ب ، ثبت ب الآن فى الوضع الأول وأوجد الطرق المختلفة لترتيب ا ، حـ . مرة أخرى نجد طريقتين فقط : ب ا حـ ، ب حـ ا . وأخيراً تبقى طريقتان فقط هما حـ ا ب ، حـ ب ا . من ذلك نرى أن ورقتان مختلفتانُ لهما طريقتان للترتيب .

ثلاث ورقات مختلفة لها ست طرق للترتيب

سأل أنفسنا بعـد ذلك عن الطرق المختلفـة التى يمـكن بها ترتيب جميع الأوراق فى صف واحـد إذا كان عـدد الأوراق ٤ (ا ، ب ، حـ ، د) . نبدأ ، كما فعلنا من قبل ، بتثبيت وضع ورقة معينة كل مرة على التوالى ونجـد الطرق المختلفة لترتيب الأوراق الباقية :

ا أولا	ب أولا	ح أولا	ء أولا
ا ب ح ء	ب ا ح ء	ح ا ب ء	ء ا ب ح
ا ب ء ح	ب ا ء ح	ح ا ء ب	ء ا ح ب
ا ح ب ء	ب ح ا ء	ح ب ا ء	ء ب ا ح
ا ح ء ب	ب ح ء ا	ح ب ء ا	ء ب ح ا
ا ء ب ح	ب ء ح ا	ح ء ا ب	ء ح ا ب
ا ء ح ب	ب ء ا ح	ح ء ب ا	ء ح ب ا

يثبت ا فى أول الصف لا يلزمنا فى الواقع إلا الترتيبات المختلفة للثلاثة ورقات الأخرى التى نعلم أن عددها هو ٦ ؛ ونفس الشيء صحيح عند تثبيت ب أو ح أو ء . عدد الطرق المختلفة لترتيب الأربعة أوراق هو ٤ × ٦ = ٢٤ وإذا كان المطلوب ترتيب خمسة أوراق ، فإنه يمكننا تثبيت كل من الأوراق الخمس على التوالى فى أول الصف ويكون عدد طرق ترتيب الأربعة الباقية ٢٤ فى كل مرة . ينتج أن عدد الطرق المختلفة التى يمكن بها ترتيب الخمسة أوراق هى ٥ × ٢٤ = ١٢٠ لدينا الآن الجدول الآتى

شيئان	طريقتان للترتيب	أى	٢ × ١ = ٢!
ثلاثة أشياء	٦ طرق »	أى	٣ × ٢ × ١ = ٣!
أربعة أشياء	٢٤ طريقة »	أى	٤ × ٣ × ٢ × ١ = ٤!
خمسة أشياء	١٢٠ طريقة »	أى	٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ٥!

لقد درسنا هذه الأعداد ، فهى مضروبات وبالاستمرار فى العملية السابقة نجد أن عدد الطرق التى يمكن بها ترتيب ستة أشياء هو ٦! ، وسبعة أشياء هو ٧! وهكذا . والرمز الذى سنعطيه لتباديل أشياء عددها ں وجميعها مختلفة ، مأخوذة جميعها معاً هو :

$$ل^{ں}_{ں} = ں!$$

وفيما يلى بعض الأمثلة لتوضيح استخدام هذه الصيغة :

ما هو عدد الطرق التى يمكن بها ترتيب الكروت المحتوية على صور فى فى صف واحد ؟ (الجواب ٤٧٩٠٠١٦٠٠)

ما هو عدد الطرق المختلفة التى يمكن بها ترتيب سبعة كتب على رف ؟ (الجواب ٥٠٤٠)

ما هو عدد الطرق المختلفة التى يمكن بها جلوس عشرة أطفال على جانب واحد من منضدة ؟ (الجواب ٣٦٢٨٨٠٠)

ما هو عدد الطرق المختلفة التى يمكن بها قرع مجموعة من الأجراس عددها ٨ ؟ (الجواب ٤٠٣٢٠)

ما هو عدد الترتيبات الخطية المختلفة لألوان الطيف ؟ (هذه الألوان هى الأحمر والبرتقالى والأصفر والأخضر والأزرق والبنفسجى) ؟ (الجواب ٧٢٠) .

الرمز $ل^{٥٢}_{٥٢}$ (= ٥٢!) يدل على جميع الطرق التى يمكن بها ترتيب أوراق مجموعة ورق اللعب فى صف . نتساءل الآن : ما هو عدد الطرق التى يمكن بها ترتيب أوراق عددها ر ، مأخوذة من مجموعة الورق السابقة ، فى صف ؟ سنرمز لهذا العدد بالرمز $ل^{ں}_{ر}$ عند اختيار الأوراق آنيا — أو وهو نفس الشيء ، عند اختيارها على التوالى بدون إعادة الأوراق المسحوبة إلى المجموعة ثانية قبل سحب غيرها . لا يوجد أى رمز متفق عليه لعدد تباديل أشياء عددها ر من أشياء عددها ں ، عند ما يسمح بالإعادة قبل الاختيار التالى . وسنرمز إلى هذا العدد هنا بالرمز $ه^{ں}_{ر}$. وستساعدنا الطريقة التى حصلنا بها على قيمة $ل^{ں}_{ں}$ فى الحصول على صيغة جواب للسؤال السابق ، عندما لا يسمح بالتكرار فى الاختيار .

تتلخص الطريقة السابقة فيما يأتى : نبدأ بعدد معين (ں) من المواضع المواضع الخالية فى صف ثم نملأها بنفس العدد (ں) من الأوراق . بذلك

يكون لدينا طرق مختلفة عددها ن لشغـــل المكان الأول . بعد ذلك تكون لدينا أشياء مختلفة عددها (ن — ١) يمكن لكل منها أن يشغل المكان الخالى الثانى ، أى تكون لدينا (ن — ١) طريقة مختلفة لشغل هذا المكان الثانى . بعد كل ورقة من الأوراق التى عددها ن التى يمكن شغل المكان الأول بها يمكننا شغل المكان الثانى بأى ورقة من الأوراق الباقية التى عددها (ن — ١). أى أنه يمكن شغل المكانين الأول والثانى بطرق مختلفة عددها ن (ن — ١) . وعلى ذلك يكون ل^ن_٢ = ن (ن — ١) . لدينا الآن أوراق عددها (ن — ٢) يمكن شغل المكان الثالث بأى ورقة منها . وعلى ذلك ينتج أنه توجد طرق مختلفة عددها ن (ن — ١) (ن — ٢) لشغل الأمكنة الثلاثة الأولى معا . أى أن ل^ن_٣ = ن (ن — ١) (ن — ٢) . ويمكننا الاستمرار فى هذه العملية لشغل الأماكن الباقية الخالية ، ويكون

ل^ن_٣ = ن (ن — ١) (ن — ٢) = ن (ن — ١) (ن — ٣ + ١)

(ثلاثة عوامل)

ل^ن_٤ = ن (ن — ١) (ن — ٢) (ن — ٣) = (ن — ٤ + ١)

(أربعة عوامل)

ل^ن_٥ = ن (ن — ١) (ن — ٢) (ن — ٣) ن (ن — ١) (ن — ٢) (ن — ٤ + ١) ×
(ن — ٣) (ن — ٥ + ١) (خمسة عوامل)

وعلى ذلك فإن القانون المطلوب هو :

ل^ن_ر = ن (ن — ١) (ن — ٢) .... (ن — ر + ١) (عوامل عددها ر)

وللاقتصاد ، يمكن كتابة هذا القانون على صورة تذكرنا بالرمز المألوف :

ن^ر = ن . ن . ن . . . ر من العوامل . وهذه الصوره هى

ن^(ر) = ن (ن — ١) (ن — ٢) . . . (ن — ر + ١) = ن ×
(ن — ١) (ن — ٢) . . إلى ر من العوامل .

وبطريقة الرمز المختصرة هذه ، يكون ل^ن_ن = ن^(ن) = ن ! .

وزيادة على فائدة هذه الطريقة من ناحية الاقتصاد ، فإنها تبين الفرق بين جوابنا على السؤال المذكور فيما سبق على فرض عدم التكرار فى الاختيار ، والجواب على نفس السؤال عند ما يسمح بهذا التكرار فى الحالة الأخيرة ، توجد طرق عددها ن لشغل أى مكان ، وعلى ذلك توجد ن^٢ طريقة لشغل المكانين الأول والثانى ، و ن^٣ طريقة لشغل الأماكن الثلاثة الأولى . وهكذا . من الممكن أن تكتب

بدون تكرار فى الاختيار ل^ن_ر = ن^(ر)

مع التكرار فى الاختيار هـ^ن_ر = ن^ر .

إذا لم يسمح بالتكرار فى الاختيار ، فإن ر لا يمكن أن تزيد عن ن ؛ ولكن إذا سمح بالتكرار فى الاختيـــار فمن الممكن أن تزيد ر عن ن .

وترتبط هذه الحالة بلعبة أخرى تعتمد على الحظ . إذا كانت لدينا مجموعة من ورق اللعب تحتوى على ست أوراق فقط ، فمن الجائز أن نتساءل : ما هو عدد الطرق التى يمكن بها ترتيب ١٢ ورقة مأخوذة من هذه المجموعة ، (حيث يمكن إعادة الأوراق إلى المجموعة بعد اختيارها) ؟ والجواب هو هـ^٦_١٢ = ٦^١٢ .

وهذا السؤال يتفق تماماً مع السؤال الآتى : ما هو عدد الطرق التى يمكن بها كتابة نتائج ١٢ رمية فى خط واحد ؟ أو نتائج رمية واحدة لكل من اثنى عشر زهراً ؟

وفيما يلى بعض المسائل للتمرين ، إذا كان القارئ يحتاج إليه قبل الاستمرار فى القراءة . فى كل حالة ، يمكنك أن تسأل نفسك هل مسألة التكرار فى الاختيار ذات أهمية ؟ وابحث عن الجوابين إذا كانت الحالة كذلك .

ما هو عدد تبادل حرفين من الحروف ا ، ب ، حـ ، ى ، هـ
(الجواب ٢٠ أو ٢٥)

ما هو عدد المجموعات المختلفة التى تحتوى كل منها على أربعة حروف والتى يمكن الحصول عليها من الحروف ا ، ب ، حـ ، ى ، هـ ، و ؟
(الجواب ٣٦٠ أو ١٢٩٦)

ما هو عدد الترتيبات المختلفة لخمسة حروف من بين الحروف الأبجدية اللاتينية ؟ (الجواب ٧٫٨٩٣٫٦٠٠)

ما هو عدد التليفونات المختلفة التى يتكون كل منها من خمسة أرقام (جميع الخمسة الأرقام مختلفة) التى يمكن الحصول عليها من الأرقام ٠ — ٩ ؟
(الجواب ٣٠٢٤٠)

يترك العدد ١١ ، ومضاعفاته (مثل ٤٤) ، ما هو عدد الأعداد الواقعة بين ١٠ ، ١٠٠ ؟ (حقق النتيجة)

ما هو عدد الأعداد الواقعة بين ١٠٠ ، ١٠٠٠ والتى لا يحتوى أى منها على نفس الرقم أكثر من مرة ؟ (حقق النتيجة)

ما هو عدد الأعداد التى يتكون كل منها من أربعة أرقام فردية (١ ، ٣ ، ٠) تكون جميعها مختلفة ؟ (الجواب ١٢٠)

ما هو عدد الترتيبات التى يمكن عملها لثلاثة ورقات من الأوراق الأربعة الكسرية العليا (الآس والملك والملكة والولد) ؟ حقق النتيجة باستخدام مجموعة من ورق اللعب . (الجواب ٢٤ أو ٦٤)

ما هو عدد الترتيبات المختلفة لخمسة أوراق دينارى من مجموعة عددها ١٣ ورقة دينارى إذا كنت لا تستخدم أى ورقة أكثر من مرة واحدة فقط ؟
(الجواب ١٥٤٤٤٠)

ما هو عدد الترتيبات المختلفة لأربعة أوراق من الأوراق العليا التى عددها ١٦ ؟ (الجواب ٤٣٫٦٨٠ بدون تكرار فى الاختيار .)

توجد أربعة جوائز مختلفة فى مسابقة هى إوزة وديك رومى وبطة ودجاجة . إذا كان يوجد عشرون متسابقاً وإذا كان يتعذر الحصول على أكثر من جائزة واحدة فما عدد النتائج الممكنة لهذه المسابقة ؟ (الجواب ١١٦٢٨٠)

خمسة وعشرون طفلا يجلسون فى امتحان مسابقة . توجد ثلاثة جوائز قيمتها ٨٠ ، ٥٠ ، ٢٠ جنيها على الترتيب ما هو عدد النتائج المختلفة الممكنة ؟
(الجواب ١٣٨٠٠)

يجرى اثنى عشر طفلا فى سباق المائة ياردة . ما هو عدد الطرق المختلفة التى يمكن بها منح جوائز للأربعة الأوائل ؟ (الجواب ١١٨٨٠)

افترضنا حتى هذه المرحلة أن أوراق اللعب يمكن التمييز بينها بواسطة اللون أو الأسرة أو العلامات أو الصور . وتنشأ مسائل جديدة إذا رتبنا الأوراق بطريقة ما مع إهمال ما يميز بين الأوراق الفردية التى من نفس الفصيلة . فمثلا لو كان لدينا مجموعة من الأوراق عددها ٩ كما يأتى :

بسطونى : الآس والسبعة ، كوبه الملك والآس والثلاثة ، دينارى : الثمانية والعشرة والملكة والولد . لقد رتبنا الأوراق على حسب أسرة كل منها ، وعلى ذلك فإننا نعتبر أى ترتيب للأوراق فى صف واحد مكافىء لأى ترتيب آخر فى صف واحد . إذا كان المكان الأول مشغولا بورقة من نفس الأسرة فى كل من الترتيبين والمكان الثانى مشغولا بورقة من نفس الأسرة فى كل من الترتيبين وكذلك المكان الثالث مشغولا بورقة من نفس الأسرة فى كل من الترتيبين . يمكننا أن نتساءل الآن : ما هو عدد هذه الترتيبات (ن = ا + ب + حـ) الممكنة لجميع الأوراق فى صف إذا كانت ا تنتمى إلى الأسرة اَ ، ب إلى الأسرة بَ ، حـ إلى الأسرة حـَ ؟

عند إمكان تقسيم أوراق عددها ن إلى ثلاثة أقسام ، فإننا سنرمز إلى عدد الترتيبات التى عدد أقسامها ن بالرمز $ل^{ن}_{ا،ب،..} = ل^{ن}_{ا،ن-ا-ب}$

للحصول على جواب للسؤال السابق نفكر فيما يحدث لو أننا أهملنا حقيقة أن الأوراق التى من أسرة واحدة تنتمى إلى نفس الشعبة . النتيجة المطلوبة للمثال السابق هى $ل^{٩}_{٢،٣،٤}$ حيث عدد البسطونى ٢ . فى كل من هذه الترتيبات يوجد مكانان ثانيان خاصان للأوراق البسطونى . ويمكننا وضعها بالترتيب آس ، ٧ أو ٧ ، آس . وعلى ذلك فإن هذه الشعبة تحتوى على ترتيبات عددها ٢ ($ل^{٢}$ ـ) بالمثل يمكننا أن نفصل الترتيبات التى من نفس النوع على حسب مكان الأوراق

الكوبة الثلاثة الثابت إلى ثلاثة طرق لشغل ثلاثة أمكنة، أى ١٣ من الطرق كل منها لا يتعارض مع الطرق التى عددها ١٢ لملء المكان الثابت الذى تشغله الأوراق البسطونى وعلى ذلك فإن التباديل ذات نفس الصفة يمكن عملها من ١٢ × ١٣ من الأنواع فتميز عن بعضها على حسب الورقة البسطونى الخاصة والورقة الكوبة الخاصة تشغل مكانا معينا لا يزال فى الإمكان شغل الأربعة أماكن الباقية بالأربع ورقات الديناري الباقية لها، ويكون لدينا طرق عددها $(١٢) \times (١٣) \times (١٤)$ لترتيب جميع الأوراق الباقية ترتيبا خاصا من نوع واحد لا يتغير وعلى ذلك فإن العدد الكلى لجميع طرق ترتيب الأوراق التسع هو $(\,)(\,)(\,)\, ل^{٩}_{٢،٣،٤}$، ولكننا نعلم أن عدد طرق ترتيب ٩ أوراق هو $ل^{٩}_{٩} = ١٩!$. من ذلك نحصل على النتيجة المطلوبة وهى:

$$(١٢!)(١٣!)(١٤!)\; ل^{٩}_{٩} = ١٩!$$

$$\therefore\; ل^{٩}_{٢،٣،٤} = \frac{١٩!}{١٢!\;١٣!\;١٤!}$$

والصورة العامة للصيغة ٩ $ل^{ن}_{أ،ب،حـ،ء}$ تتضح مما سبق، وهى

$$ل^{ن}_{أ،ب،حـ،ء} = \frac{ن!}{أ!\;ب!\;حـ!\;ء!\;\cdots}$$

ويستطيع القارىء أن يلاحظ، (وسيستفيد من ذلك) الصورة المألوفة التى يأخذها هذا القانون (أنظر ص٢١٨) عندما نوجد نوعين فقط

$$ل^{ن}_{أ} = ل^{ن}_{أ،ن-أ} = \frac{ن!}{أ!\,(ن-أ)!} = ق^{ن}_{أ}$$

هذه النتيجة تستحق الملاحظة لأن $ق^{ن}_{أ}$ هو فى نفس الوقت عدد توافيق ن من

ن ورقة، وهو أيضا معامل الحد الذى رتبته أ فى مفكوك ذات الحدين للقوة ن، عندما نعطى الحد الأول الرتبة صفر. وسنرى فيما بعد أن حدود ذات الحدين لها معنى غريب فى نظرية الاحتمالات، ولكن ينشأ هذا المعنى نتيجة لأن التعريف الرياضى للاحتمال يتوقف على التباديل. وعلى ذلك فإن ظهور $ق^{ن}_{أ}$ فى هذا الموضوع يؤدى إلى بلبلة فكر الطالب المبتدىء فليأخذ حذرك

فى هذه المرحلة تساعد بعض التمرينات الطالب المبتدىء وفيما يلى بعض الألغاز

مجموعة من أوراق اللعب عددها ١٣ منها ورقة واحدة بسطونى وثلاث ورقات دينارى وأربعة ورقات كوبة وخمسة ورقات سباتى ما هو عدد الطرق التى يمكن بها تنظيم تبادلها على حسب الأسرة ؟
(الجواب ٣٦٠٣٦٠).

ما هو عدد الطرق المختلفة التى يمكن بها ترتيب ست مليمات وسبعة قطع من ذات القرشين وثمانية قطع من ذات الخمسة قروش فى صف ؟
(الجواب ٣٤٩١٨٨٨٤٠).

ما هو عدد الأعداد المختلفة التى يمكن تركيبها من الأرقام العشرة ١، ٢، ٢، ٣، ٣، ٣، ٤، ٤، ٤، ٤ ؟ (الجواب ١٢٦٠٠).

ما هو عدد الترتيبات الخطية المحتملة التى يمكن الحصول عليها لأربعة برتقالات وستة ليمونات وثمانية تفاحات وعشرة رمانات ؟

توجد خمسة عشر كتابا على رف: اربع نسخ من هاملت ونسختان من العلم للمواطن وثلاثة نسخ من الفرسان الثلاثة وست نسخ من الأنجيل. ما هى عدد الترتيبات المختلفة الممكنة ؟ (الجواب ٦٣٠٦٣٠٠).

يوجد فى حديقة خمسة صفوف من الفاصوليا وأربعة صفوف من الفول وصفان من الخس وصفان من الفجل. ما هى عدد الترتيبات المختلفة للصفوف؟
(الجواب ٥٤٠٥٤٠).

من الممكن أن نتبين كيفية الحصول على القانونين $^{ن}ل_{ر} = ن^{(ر)}$ ، $^{ن}هـ_{ر} = ن^{ر}$ (شكلى ١٨٨، ١٨٩) ، بالتفكير فى رقعة الشطرنج

	♠	♥	♦	♣
♠	♠♠	♠♥	♠♦	♠♣
♥	♥♠	♥♥	♥♦	♥♣
♦	♦♠	♦♥	♦♦	♦♣
♣	♣♠	♣♥	♣♦	♣♣

(شكل ١٨٨)

تساوى الاحتمال (اختيار ذى شقين)

الترتيبات الخطية من أربعة أشياء :

مع التكرار (جميع الأزواج) $٤ \times ٤ = ٤^{٢}$

بدون تكرار (الأزواج المختلفة فقط) $٤ \times ٣ = ٤^{(٢)}$

وهذا يجعلنا نوجه اهتمامنا إلى العلاقة بين التباديل والاحتمال . كما سنبينها فى الباب التالى . هذان الشكلان يشيران إلى مجموعة مكونة من أربعة أشياء ، مثلا مجموعة ورق لعب مكونة من أربعة أوراق فقط ، ورقة سباتى ، وورقة كوبة ، وورقة ديناري ، وورقة إسطونى . إذا أعدنا كل ورقة إلى المجموعة قبل اختيار غيرها ، فإن كلا من الطرق التى عددها $ن^{٢}$ (هنا $٤^{٢}$) للحصول على عينة مكونة من ورقتين تناظر أحد ازواج لوحة أبعادها $ن \times ن = ن^{٢}$. وكل صف من صفوف اللوحة يناظر أحد أوراق المجموعة ، والأماكن المتتالية لنفس الصف تبين نتيجة اختيار أى واحدة من أوراق المجموعة بعد

أخذ الورقة التى يدل عليها المكان الموجود على يمين هذا المكان . وإذا كان الاختيار بدون تكرار ، يسقط زوج واحد من هذا النوع من كل صف ، وبذلك يتبقى ($ن - ١$) من الازواج فى كل صف ، ويكون العدد الكلى هو $ن (ن - ١) = ن^{(٢)}$ من الازواج .

	♠	♥	♦	♣
♠♠	♠♠♠	♠♠♥	♠♠♦	♠♠♣
♠♥	♠♥♠	♠♥♥	♠♥♦	♠♥♣
♠♦	♠♦♠	♠♦♥	♠♦♦	♠♦♣
♠♣	♠♣♠	♠♣♥	♠♣♦	♠♣♣
♥♠	♥♠♠	♥♠♥	♥♠♦	♥♠♣
♥♥	♥♥♠	♥♥♥	♥♥♦	♥♥♣
♥♦	♥♦♠	♥♦♥	♥♦♦	♥♦♣
♥♣	♥♣♠	♥♣♥	♥♣♦	♥♣♣
♦♠	♦♠♠	♦♠♥	♦♠♦	♦♠♣
♦♥	♦♥♠	♦♥♥	♦♥♦	♦♥♣
♦♦	♦♦♠	♦♦♥	♦♦♦	♦♦♣
♦♣	♦♣♠	♦♣♥	♦♣♦	♦♣♣
♣♠	♣♠♠	♣♠♥	♣♠♦	♣♠♣
♣♥	♣♥♠	♣♥♥	♣♥♦	♣♥♣
♣♦	♣♦♠	♣♦♥	♣♦♦	♣♦♣
♣♣	♣♣♠	♣♣♥	♣♣♦	♣♣♣

شكل (١٨٩)

تساوى الفرصة (اختيار ذى ثلاث شعب)

الترتيبات الخطية لثلاثة أشياء من مجموعة مكونة من أربعة أشياء :

مع التكرار $٤^{٢} \times ٤ = ٤^{٣}$ بدون تكرار $٤^{(٢)} \times ٢ = ٤^{(٣)}$

وعند توضيح الاختيار الثنـــــائى للعينات لأى النوعين بهذه الطريقة ، نلاحظ أن الفكرة الأساسية هى أن أى ورقة تؤخذ أولا لها فرصة متساوية لكى ترتبط بأى ورقة من الأوراق الباقية . ويمكن تعميم طريقة اللوحة لتمثيل الترتيبات الخطية للعينات الثلاثية أو للعينات الأعلى وذلك بالتطبيق المتتالى للفكرة التى استخدمت فى شكل ١٨٨ . وإذا كان الاختيار يسمح فيه بالتكرار ، فإنه توجد طرق عددها ر^{٢} لترتيب الشيئين اللذين يؤخذان أولا لعمل عينة ثلاثية ، وتوجد طرق عددها ر لاختيار الشىء الثالث . وعلى ذلك نضع الطرق التى عددها ر^{٢} لاختيار العينة المزدوجة فى الجانب الأيمن ونعطى كل عينة من هذه العينات فرصة متساوية لكى تزدوج مع كل من أشياء المجموعة التى عددها ن والتى نجمعها عليها ثانية بإعادة الأوراق المختارة قبل أخذ غيرها . الشبكة الناتجة لها عيون عددها ن^{٢} × ن = ن^{٣} . وإذا لم يسمح بالتكرار فى الاختيار فإن الشبكة سيكون لها صفوف عددها ن$^{(٢)}$ فقط بدلا من ن^{٢} من الصفوف ، وسنسقط اثنتان من العينات الثلاثية من كل صنف فيتبقى (ن — ٢) من الازواج فى كل صف ، ويكون المجموع الكلى هو

ن$^{(٢)}$ (ن — ٢) = ن$^{(٣)}$.

والسؤال الذى جوابه هو الصيغة ل$^{ن}_{ا . ب . هـ}$ يستبعد مسألة الإعادة أو التكرار ، ولكن شرط الإعادة يكون ذا صفة إذا سألنا سؤالا مثل الآتى : ما هو عدد الطرق التى يمكن بها اختيار عشرة أوراق من مجموعة كاملة من ورق اللعب بحيث تحتوى هذه الأوراق العشرة على أربعة أوراق كوبة . وثلاثة أوراق دينارى ، وورقتان سباتى ، وورقة بسطونى ؟ وبصورة عامة يمكن صياغة السؤال كما يأتى : مجموعة من الأشياء عددها ن ، منها أشياء عددها ا تنتمى إلى أسرة ا' ، وأشياء عددها ب إلى أسرة ب' ، وأشياء عددها حـ إلى أسرة حـ' ، وهكذا . ما هو عدد الطرق التى يمكن بها اختيار ر من أشياء هذه المجموعة بحيث ينتمى عدد د منها إلى الأسرة ا' ، وعدد هـ منها إلى الأسرة ب' ، وعدد و منها إلى الأسرة حـ' ، وهكذا ؟

سنرى فى الباب القادم أن الجواب على هذا السؤال هى المفتاح العام للباب الذى يفصل بين الاختيار والخط بمساعدة صورة ٢ (شكل ١٩٠ ، ١٩١)

ستزول صعوبة إيجاد هذا المفتاح . ينشأ نظام معين من حالة الثلاثة أسر ، أى الحالة التى توجد فيها ثلاثة أسر مثل ، الآسات ، والأوراق ذات الصور ، والأوراق الأخرى . فى مجموعة كاملة من ورق اللعب توجد أربعة أوراق تنتمى إلى الأسرة الأولى ، اثنى عشر ورقة تنتمى إلى الأسرة الثانية ، وست وثلاثون ورقة منتمية إلى الأسرة الثالثة . نفرض أننا نريد أن نعلم عدد الترتيبات فى صف والتى يكون فيها وجه الأوراق إلى أعلى لتسعة أوراق تتكون من أربعة آسات ، وثلاثة أوراق ذات صور وورقتان أخريتان . عدد أسر التباديل للست أوراق كما حددناها هو ٩ ل$_{٢،٣،٤}$ ، ويمكننا أن نقسم هذه الأسر إلى أفرادها النهائية ، إذا اتضح لنا إمكان أو عدم إمكان إرجاع كل من الأوراق الثمانية المختارة أولا قبل اختيار غيرها .

إذا كان الإرجاع ممكنا ، فإن كلا من الترتيبات التى عدد ٩ ل$_{٢،٣،٤}$ لها أربعة أماكن ثابتة خاصة بالآسات ، وعلى ذلك فلها ^{٤}هـ$_{٤}$ = ٤ طرق لشغل هذه الأماكن ، وكل من هذه الطرق متفق مع الطرق التى عددها ^{١٢}هـ$_{٣}$ = ١٢^{٣} لشغل الأماكن الثلاثة الباقية والخاصة بالأوراق ذات الصور وبعبارة أخرى طرق عددها ٤^{٤} × ١٢^{٣} لشغل الأماكن الخاصة بالآسات والصور . وكل من هذه الطرق لا يتعارض مع شغل المكانين الباقيين بورقة لا تكون آسا ولا صورة بطرق عددها ٣٦ هـ$_{٢}$ = ٣٦^{٢} . وعلى ذلك فإن العدد الكلى لأخذ عينة عدد أوراقها تسعة وتتكون من أربع آسات وثلاثة ورقات ذات صور وورقتين أخريتين هو :

$$٤^{٤} \times ١٢^{٣} \times ٣٦^{٢}\ ٩\ ل_{٢،٣،٤} = \frac{ل_{٩}}{ل_{٤} \times ل_{٣} \times ل_{٢}}\ ٤^{٤} \times ١٢^{٣} \times ٣٦^{٢}$$

شكل ١٩٠ صيغة المفتاح العام — مع التكرار

الطرق المختلفة للحصول من مجموعة كاملة من ورق اللعب على عينة تتكون من أربعة أوراق ، منها إثنتان سباتى ، وواحدة كوبة وواحدة دينارى ، عندما يعيد اللاعب كل ورقة بأخذها قبل أخذ غيرها

$$\frac{ل_٤}{ل_٢ \times ل_١ \times ل_١} ١٣^٢ \times ١٣^١ \times ١٣^١$$

شكل (١٩١)

صيغة المفتاح العام - بدون إعادة (تكرار)

الطرق المختلفة لاختيار خمسة أوراق ثلاثة منها سباتى والورقتان الباقيتان كوبة ، آنياً من مجموعة كاملة من ورق اللعب .

$$\frac{ل_٥}{ل_٣ \times ل_٢} \times ١٣^{(٣)} \times ١٣^{(٢)} .$$

يمكن للقارىء الآن أن يسير بخطوات البرهان فى الحالة التى لا يكون فيها تكرار وينتج أنه توجد $ل_٤ = ٤^{(٤)}$ من الطرق لشغل الأماكن المشغولة بالأساتات فى أى تباديل للون واحد . أى أن العدد الكلى للتباديل هو

$$٤^{(٤)}.١٢^{(٣)}.٣٦^{(٢)}\ ل^{٩}_{٤.٣.٢} = \frac{٩!}{٤!\ ٣!\ ٢!}\ ٤^{(٤)}.١٢^{(٣)}.٣٦^{(٢)}.$$

وأخيراً يتضح الإطار الذى يجيب على السؤال الذى سألناه فى أعم صورة ، ألا وهو

مع إمكان (التغيير فى الترتيب) الأعادى $\frac{ن!}{ى!\ و!\ ف!}\ ا^{ى}\ ب^{و}\ ح^{ف}\ ....$

بدون إعادة $\frac{ن!}{ى!\ و!\ ف!}\ ا^{(ى)}\ ب^{(و)}\ ح^{(ف)}$

وستجرنا الصيغتان الأخيرتان إلى كثير من اللبس حول ما يقصده عالم الرياضة ، على خلاف الرجل العادى ، بكلمة الاحتمال . فى أغلب الأحيان يكون الاهتمام موجها إلى المجموعات ذات الفصيلتين . وفى هذه الحالة تكون النجاح عند اختيار ورقة من إحدى الفصيلتين (صورة مثلا) ، والفشل عند اختيار أى ورقة أخرى . وعلى ذلك فإن مجموعة الأوراق التى معنا والتى عددها ن تتكون من ى ورقة من النوع الأول ، ف = ن — ى ورقة من النوع الثانى ويصبح القانون العام لأخذ س ورقة من أوراق عددها ر من الفصيلة الأولى ، ر — س من الأوراق من الفصيلة الثانية هو

مع الاعادة $\frac{ر!}{س!\ (ر-س)!}\ ى^{س}\ ف^{ر-س}$

بدون اعادة $\frac{ر!}{س!\ (ر-س)!}\ ى^{(س)}\ ف^{(ر-س)}$

وتوجد نقطة واحدة تحتاج إلى التدقيق . القانون العام يعتمد على الفرض بأن التمييز بين أوراق المجموعة هو تمييز قاطع ، كحالة الفصيلتين (مثل الأوراق المصورة والأوراق الأخرى ، أو الآسات والأوراق الأخرى) . أما إذا تكلمنا عن عينة من مجموعة مكونة من آس وصورة مأخوذين من مجموعة كاملة

من الأوراق ، فإن التمييز لا يكون قاطعاً إلا إذا اعتبرنا الأوراق الباقية وعددها ٣٦ وهى الأوراق التى تحتوى على آسات أو صور ، فصيلة مستقلة . وفى هذه الحالة يلزم توضيح طريقة استعمال القانون العام ، وسيظهر ذلك نوراً عند كتابة هذا القانون :

مع الاعادة $\frac{٢!}{١!\times ١!\ ٠!}\ ٤^{١}\times ١٢^{١}\times ٣٦^{٠}$

بدون الاعادة $\frac{(٢)!}{(١)!\ (١)!\ (٠)!}\ ٤^{(١)}\times (١٢)^{(١)}\times ٣٦^{(٠)}$

نحن نعرف ما نعنيه بالرمز ٠! ، ولكننا للآن لم نعرف أى الرمزين (٠)! أو $ا^{(٠)}$. والذى يسميه عالم الرياضة المعنى الصحيح لأى هذين الرمزين هو المعنى الذى يتفق مع التطبيق العام للقواعد التى أعطيناها . ويمكننا اختبار معنى (٠)! بطريقتين فأولا نعلم (الباب الخامس) أن عدد توافيق ر من ن من الأشياء هو

$$ق^{ن}_{ر} = \frac{ن!}{ر!\ (ن-ر)!}$$

وعلى ذلك فعدد توافيق ن من الأشياء مأخوذة جميعاً هو

$$ق^{ن}_{ن} = \frac{ن!}{ن!\ (ن-ن)!} = \frac{ن!}{ن!\ (٠)!} = \frac{١}{(٠)!}$$

ولكن لا يوجد إلا توفيق واحد لأشياء عددها ن مأخوذة ، جميعها معاً ، أى أن $ق^{ن}_{ن} = ١$ ، وعلى ذلك فإن

$$\frac{١}{(٠)!} = ١ \quad ، \quad (٠)! = ١$$

والقانون العام الذى أعطيناه يتطلب نفس المعنى للرمز (٠)! . إذا أخذنا

ورقة مصورة واحدة من مجموعة من ورق اللعب ، فإنه توجد ١٢ طريقة مختلفة لأخذ هذه الورقة ، ويكون التمييز الضمنى للأوراق هو تمييز زوجى ، أى أوراق مصورة وأوراق أخرى . وحيث أن السماح بإعادة الأوراق لا يؤثر فى حالة الاختيار الواحد ، فإن القانون العام يكون واحداً فى حالتى السماح بالإعادة أو عدمه ، أى أن

$$\frac{\underline{\text{ل}(١)}}{\underline{\text{ل}(١)}\ \underline{\text{ل}(٠)}}(١٢)^{١}\times(٤٠)^{٠}=١٢=\frac{\underline{\text{ل}(١)}}{\underline{\text{ل}(١)}\ \underline{\text{ل}(٠)}}(١٢)^{(١)}(٤٠)^{(٠)}$$

ومن الطرف الأيمن لهذه المعادلة المزدوجة ، نجد مرة أخرى أن

$\underline{\text{ل}(٠)} = ١$. ولا يكون للطرف الأيسر معنى إلا إذا كان

$$(٤٠)^{(٠)} = ١ = (٤٠)^{٠} .$$

وفيما يلى بعض الألغاز التى يتوقف حلها على استخدام القانون العام فى حالتى الاختيار (ا) مع السماح بالإعادة (ب) مع عدم السماح بالإعادة :

ما هو عدد التنظيمات فى صف التى تتفق مع تركيب العينات الآتية من مجموعة كاملة من الأوراق :

عينة مزدوجة مكونة من آسين (الجواب ١٦ ، ١٢)

عينة ثلاثية مكونة من آس وصورتين (الجواب ١٧٢٨ ، ١٥٨٤)

عينة رباعية مكونة من آس أحمر ، و ثلاث ورقات سوداء (الجواب ١٧٢٨ ، ٩٦٠) .

عينة رباعية تتكون من ورقة سباتى وورقتين ديناريتين وورقة كوبا (الجواب ٣٤٢٧٢٢ ، ٣١٦٣٦٨) .

عينة رباعية مكونة من ثلاث ورقات حمراء وآس أسود . (الجواب ١٤٠٦٠٨ ، ١٢٤٨٠٠) .

الباب الثامن

الاحصاء

أو

حساب الاحصائيات

اقتصر استخدام الأعداد حتى القرن السادس عشر على الطريقة البدائية فى عد الأشياء المنفصلة ولذلك لم تؤثر الأعداد إلا تأثيراً ثانوياً فى تكييف تقدم الرياضيات . وكانت حاجة القدماء من إحصاء الثروة وتعداد للسكان استعداداً للحرب أو لفرض الضرائب لا تستلزم أكثر من عمليات العد البسيطة ولا تستعين بالرياضة اللهم إلا مادعت الحاجة إليه من عمليات حسابية رتيبة عندما عم استخدام النقود وتجمعت الثروات . وفى القرن الماضى دعت الحاجة إلى طرق رياضية جديدة لمعالجة الأعداد التى تمثل أشياء منفصلة وزاد الاهتمام بهذا الأمر عندما زاد الاهتمام باستنباط القوانين الاجتماعية من إحصائيات تجرى على السكان من النواحى النفسية والاجتماعية والاقتصادية . وكثير من الطرق العددية المستخدمة فى مثل هذه المواضيع بنيت على النظرية الرياضية للاحتمالات التى ستشرح مبادئها فى هذا الباب . وما زالت الآراء مختلفة فى أهمية الاحتمالات فى ظروف الحياة اليومية . ولقد برزت مختلف الآراء التى تعبر عن رأى أصحابها فى طبيعة المعرفة وقيمة الطرق الاستنباطية وغير ذلك من الأمور التى يهتم بها الرياضى المحترف كما يهتم بها القارىء العادى . وبالضرورة تكون نظرة الرياضى المحترف وهو المتأثر بفلسفة المثالية مغايرة لنظرة المؤلف الذى يهتم بظواهر الحياة كما تقع فعلا .

ولقد أفادت النظرية الحديثة للاحتمالات من أمرين يبدو أنهما مستقلان أحدهما مستمد من الخبرة والآخر من اللعب . فقد نجم عن الأمر الأول أن اطمأن الناس تدريجياً إلى المخاطرة بالمال باعتبار أن بعض الحوادث التى

لا سلطان لنا عليها أقل أثراً على طول الزمن ممـــا لو قصرنا النظر على فترة قصيرة من الوقت ويعبر عن هذا الكلام عادة بقانون المتوسطات . ومعنى هذا مثلا أن متوسط سقوط المطر مأخوذاً فى عشر فترات مقدار كل منها عشر سنوات هو فى الغالب الأعم أقل عرضة للتذبذبات وأكثر ثبوتاً من متوسط سقوط المطر مأخوذاً فى عشر سنوات متتالية . ولقد زاد من إعتقادنا فى ثبوت الأعـداد الـــكبيرة ما دلتنا عليه خبرتنا فى ألعاب الزد والورق والمراهنات . كما أن خبرتنا هذه قـــد أيقظت إهتمامنا وساعدت على تفهمنا لقوانين الانتخاب . أما تطبيق الرياضيات على الصدفة فيبنى على تعرفنا على الظروف التى يحق لنا فيها إفتراض صحة تطبيق قوانين الانتخاب فى الحياة اليوميـــة .

أول إضافة هامة للنظرية الرياضية للإحتمال وجدت فى مراسلة بين عالمين رياضيين فرنسيين هما فرما وباسكال متراهنتين فى إحدى لعب الحظ . وكتاب باسكال مؤلف عن الأعداد التشكيلية لم ينشر إلا فى عام ١٦٦٥ بعـــد موت باسكال . وبعد ذلك بسنوات قليلة أخذت الدراسة الرياضية للمجازفة تتطور فى صورة أخرى . ففى عام ١٦٩٣ نشرت المقتطفات الفلسفية للجمعية الملكية بلندن جدولا للحياة مبنى على المواليد والوفيات فى مدينة برسلو . وكان الغرض من جدول هامى للحياة هو « معادلة تقدير قيمة أقساط الحياة » . وعلى ذلك فيمكننا أن نقتفى أثر بدء النظرية الرياضية للإحتمال إلى الولع بألعاب الحظ ونشأة التأمين . وأوراق اللعب أصلها صينى مثلها فى ذلك مثل الأعداد التشكيلية . وقد انتشرت ألعاب الورق فى القصور الملكية الأوروبية فى القرن الرابع عشر وأصبح إنتاج ورق اللعب من أهم الفوائد التجارية التى وجدت للطباعة من الكتل الخشبية ، وهى كذلك اكتشاف صينى ، قبل إنتاج الكتب بطريقة الطبع المتحركة . وفى هذه الحقبة كان التأمين على الحياة قد أصبح تجارة كبيرة ، أما التأمين على السفن فقد أصبح صورة هامة للمعاملات المالية فى الفترة التى أخذت فيها تجارة البحار تتسع فى أوروبا العصور الوسطى . ويمكننا بدراسة تاريخ التجارة البحرية الهولندية أن نقتفى أثره إلى بداية القرن الرابع عشر . وفى القرن السادس عشر كان التأمين قد أصبح معاملة مالية معترف بها ، وقد

تساءل السير نيكولاس بيكون فى حديثه إلى أول برلمان فى عهد الملكة اليزابيث قائلا : ألا يضحى التاجر العاقل بجزء من تجارته ليأمن على الباقى ؟ . والكتاب القدامى لم يجمعوا على ربط التأمين بالحرص . وفى هذه المراحل الإبتدائية كان يعتبر التأمين مغامرة بحتة وكان يوضع فى صف التنبؤات ذات السمعة الغير الطيبة . ويرتبط أصل التأمين على الحياة بهذه الأعمال ذات السمعة السيئة . لم يكن إقراض المال بفائدة عالية إلى الأمراء ، مع إحتمال خطير بفقد القرض بعد عدد من السنين ، ولا منح القروض للمعاملات التجارية فى الأسواق هما الأساس الوحيد للقوة التى بدأت تظهر للمال فى القرنين الرابع والخامس عشر . فإلى جانب القروض التجارية التى كانت تعقد فى الأسواق ، أخذ الناس فى مزاولة الرهان على حياة الأشخاص ومولد الأطفال وغيرها من الأمور الغريبة . وخلال القرن السادس عشر ، صدرت قوانين كثيرة للحد من نشاط البورصات والدوائر المالية الأوروبية فى عقد القروض التجارية ، بينما حرمت هذه القوانين أنواعاً مختلفة من التأمين بالمراهنة لاعتراض السلطات الدينية على مزاولته بشدة .

ويشكو أحد كتاب القرن السادس عشر فيقول « بعض النبلاء والتجار ... يستخدمون كل ما لديهم من رأس مال فى المضاربات المالية . . . بينما تبقى الأرض بدون حرث وتهمل تجارة المواد الأساسية للحياة ، وكثيراً ما ترتفع الأسعار » . والمتنبىء كيرز ، الذى كان يستخدم الهروسكوب ليتنبأ بأسعار الفلفل والبنجر مدة أسبوعين مقدماً ، كان « محاطاً بالعمل دائماً مثل رجل معه ماء وموجود فى المحيط » . ولم تكن المضاربات المالية التى أثرت أمراء تجارة المراكز المتوسطة تستند إلى أساس أقوى من التنبؤ ، وعلى ذلك فهى كانت إلى حد كبير مقامرة بكل ما فى الكلمة من معنى . ففى أسواق العصور الوسطى كان التجار أصحاب رأس المال يقامرون على جنس الطفل قبل ولادته أو على ميعاد وفاة شخص ما . وقد أعطى جوريز فى مؤلفه عن مستعمرات التجار الجنوبية أمثلة على هذا النوع من التأمين بالمقامرة وهو أصل التأمين على الحياة . فمثلا يوجد تعاقد بين رومنيجو سيمون ماير وأخيه برناردو وبين امرأتين ينص على أن يدفع الأخوان إليهما مبلغ ثلاثين جنيها إذا كان الطفل أنثى بينما

تدفع المرأتان للأخوين ثمانية وأربعين جنيها فى حالة كون المولود ذكراً . وقد كتب فيلانون فى سنة ١٥٤٢ يقول « لقد ظهر أخيراً شئ فظيع فى هولندا . هو نوع من المعاملة القاسية التى ابتدعها التجار فيما بينهم . فهم يراهنون على سعر التبادل فى أسواق أسبانيا وهم موجودون فى انورب . وهم يسمون هذه المراهنات بالمشاركة . على حسب ما كانوا يفعلون من قبل عندما يراهن رجل على أن المولود سيكون ذكراً ويكسب مالا لو تحقق ذلك . فمثلا يراهن أحد الأشخاص على أن سعر التبادل سيكون ٢ ٪ بالزيادة أو النزول ، بينما يراهن آخر على أنه سيكون ثلاثة فى المائة وهكذا . . . . . وهم يعدون بعضهم بعضاً بدفع الفرق على حسب النتيجة . ويبدو لى أن هذا النوع من المراهنات شبيه بأعمال التأمين البحرية لأن العمليات التى من هذا النوع لا تتم إلا بين التجار الذين يملكون رأس مال كبير . . . . . ونتيجة لكبر رأس مالهم وحيلهم ، يستطيعون دائماً ترتيب الأمور بحيث تعود عليهم العملية بربح فى أية حال من الأحوال !! .

والجملة الأخيرة تبين الارتباط العملى بين النظرية الرياضية للإحتمال وبين النجاح فى التنبؤات وقد كانت الطرق العددية التى استخدمت مدة طويلة فى مزاولة السحر ، كانت هذه الطرق هى الأساس لنظرية إحتمال رياضية عندما إحتاج المموّلون الذين كانوا يقامرون فى الدوائر المالية إلى دليل أكثر تأكيداً من الذى يقدمه لهم المنبؤن .

الاختيار النسبي . كان هذا هو أساس كتاب باسكال عن الأعداد الشكلية ،

وقد علقنا باختصار فى باب سابق عن علاقته بمسألة الاختيار . وفى الباب السابق رأينا كيف أن الدراسة الرياضية للاختيار تنحصر فى عدد الطرق التى تستطيع ترتب أشياء مختلفة بها عند اختيار عينة ؛ وفى انه يمكننا التمييز بين العينات بوسيلتين . فإذا كنا نعتبر أن العينتين تكونان مختلفتين إلا إذا كان كل عنصر من عناصر الأولى يناظره عنصر مثله تماما فى الثانية ، فإننا نقول عن فصيلة هذه العينات انها توافيق . فمثلا نستطيع أن نقول أن عدد طرق اختيار حرفين من المتتابعة ا ب ح د هى ست توافيق مختلفة ا ب أو

ب ا أو ا ح أو ح ا أو ا د أو د ا أو ب ح أو ح ب أو ب د أو د ب أو ح د أو د ح . أما إذا كان تمييز العينات يتوقف على مكوناتها وترتيبها ، فإننا نقول عن فصيلة هذه العينات أنها تباديل . ومن الواضح أنه توجد تباديل عددها ١٢ للعينات الثنائية من مجموعة مكونة من أربعة أشياء . (وهو ما يسمى بالمجال) .

والفكرة الجديدة التى أضافها باسكال فى تطور الحساب التحليلى للصدفة هو التفرقة بين العينات بحسب العناصر التى تتكون منها وترتيب تلك العناصر فيما بينها . وفيما يلى ، ستعنى عبارة « ما هو عدد طرق اختيار عينة » الآتى : « ما هو عدد التباديل التى تتفق مع تركيب هذه العينة » لكى نفهم مباحثة باسكال لمسألة تحديد المخاطرة يجب علينا أن ندرس علاقة مسألة اختيار عينة ذات تركيب معين بمسألة جميع الطرق المختلفة لاختيار عينة لها نفس عدد العناصر من نفس المجال . إذا كان المطلوب عينة ثلاثية من المجال الرباعى السابق بحيث تكون عناصرها هى الحروف ا ح د ، فإننا نستخدم نفس طريقة الحل كما فى صفحة ٥٩٢ — ٥٩٤ . توجد $^{٤}\text{ل}_{٣} = ٤ \times ٣ \times ٢ = ٢٤$ طريقة لاختيار أية ثلاث أشياء من بين أربعة أشياء ، إذا ميزنا التباديل المختلفة كعملية اختيار مستقلة . ومن هذه توجد فصيلة توافيق تحتوى على الحروف ا ح د ويمكننا ترتيب هذه بطرق عددها $^{٣}\text{ل}_{٣} = ٣ \times ٢ \times ١ = ٦$.

وعلى ذلك فنسبة عدد التباديل التى تتفق مع تركيب العينة إلى عدد جميع الطرق التى يمكن بها اختيار العينة الثلاثية هى ٦ : ٢٤ = $\frac{١}{٤}$ كما هو مبين .

ا ب ح   ا ب د   ا ح د   ب ح د
ا ح ب   ا د ب   ا د ح   ب د ح
ب ا ح   ب ا د   ح ا د   ح ب د
ب ح ا   ب د ا   ح د ا   ح د ب
ح ا ب   د ا ب   د ا ح   د ب ح
ح ب ا   د ب ا   د ح ا   د ح ب

وهذه النسبة ، التى يمكن تسميتها « نسبة الاختيار » للحروف الثلاث ا ح د : لا يظهر لأول وهلة أن لها علاقة واضحة باحتمال اختيار ثلاثة حروف

بهذه الطريقة . والذى وجده باسكال هو العلاقة الضمنية بين شكلى ١٨٨، ١٨٩ فى الباب الثانى عشر . وبتعريف الطرق المختلفة لاختيار عينة ذات تركيب معين بدلالة عدد التباديل المختلفة التى تتفق مع تركيبها ، نكون قد أدخلنا فكرة تساوى الفرصة لأى عنصر اختير أولا لأن يوجد مع أى العناصر الباقية وهكذا . . . ويمكننا فهم طريقة دراسة باسكال للمسألة إذا حاولنا كالآتى. إذا داومنا تفنيط مجموعة من ورق اللعب ، فإننا نعطى كل ورقة فرصة أفضل لكى تزدوج مع أى ورقة أخرى . وإذا أخذنا فى اختيار عينات (ثلاث ورقات كما سبق) من المجموعة ، فإن النتائج التى نحصل عليها من تكرار هذه التجربة تبين أن فرصة كل ورقة لتزدوج مع أى ورقة أخرى تتساوى . والخبرة بألعاب الورق تؤيد هذا الغرض ، ومع ذلك فمن الممكن اختبار صحته. وسنعطى فيما بعد نتائج تجربة من هذا النوع

لقد افترضنا أنه فى عملية اختبار ثلاثة حروف من بين أربعة ، أو ورقتى لعب من بين ٥٢ ورقة ، تستبعد حالة اختيار نفس الشىء مرة أخرى . وطبعا الممكن حدوث ذلك (أى تكرار اختيار نفس الشىء) إذا كنا نعيد هذا الشىء إلى مكانه فى ما يسمى بالمجال قبل اجراء عملية الاختيار مرة أخرى . فى هذه الحالة توجد (٥٢)^{٢} طريقة مختلفة لاختيار أى ورقتين مع العناية بترتيب الاختيار ، (١٢)^{٢} طريقة لاختيار ورقتين مصورتين . وعلى ذلك فإن نسبة الاختيار ، أو كما سنسميها الاحتمال الرياضى أو الفرصة لهذا الحدث الذى وصفناه هو ١٢^{٢} : ٥٢^{٢} = $\frac{٩}{١٦٩}$. لقد حصلنا على النتيجتين السابقتين من المبادىء الأولية ، ولكن يمكننا أن نحصل عليهما بطريقة أسهل إذا استخدمنا القانون العام الذى أعطيناه فى نهاية الباب الثانى عشر ، وبذلك نحصل أيضا على اختبار آخر لصحة العلاقتين لـ = ١ = س$^{(٠)}$

نسبة الاختيار مع الإعادة :

$$\frac{ل^{٢}}{ل^{٢}\ ل^{٠}}\quad ١٢^{٢}\ ٤٠^{٠} \div ٥٢^{٢} = \frac{١٢^{٢}}{٥٢^{٢}} = \frac{٩}{١٦٩}$$

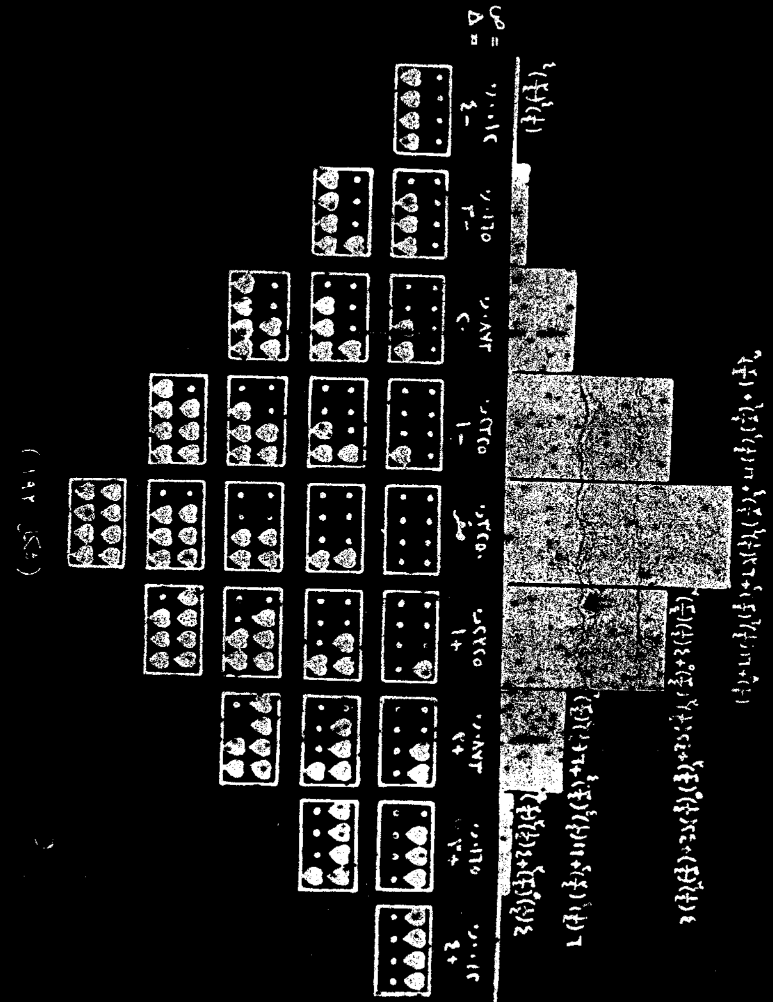
نسبة الاختيار بدون الإعادة :

$$\frac{ل^{٢}}{ل^{٢}\ ل^{٠}}\quad ١٢^{(٢)}\ ٤٠^{(٠)} \div ٥٢^{(٢)} = \frac{١٢^{(٢)}}{٥٢^{(٢)}} = \frac{١١}{٢٢١}$$

ويكون التمييز بين عدد التباديل فى حالتى الاعادة وعدم الاعادة مهما عند تعميم التعريف الذى أعطيناه لاختيار العينة إلى حالة تسجيل رمى فرد أو قطعة نقود . من الضرورى أن تسمح عينة خماسية لسلوك قطعة النقود ، أى نتيجة خمسة رميات من الضرورى أن تسمح هذه العينة بالاعادة فلنضع الآن جميع التباديل المختلفة لرميتين : وجهان ، وجه يليه ظهر ، ظهر يليه وجه ، ظهران . من بين هذه التباديل الأربعة يوجد واحد فقط يتفق مع الشرط بأن كليهما وجه وعلى ذلك نقول أن الاحتمال الرياضى للحصول على وجهين فى رمية مزدوجة هو $\frac{١}{٤}$ وعند تقرير ذلك يجب أن نتذكر أن القيمة العملية لأى نتيجة يحصل عليها من مثل هذه العملية نفترض من قبل إجرائها معلومات خارج نطاق الرياضة ، وهى فى حالتنا هذه أن تركيب قطعة النقود يتفق مع تساوى الفرصة لكل من الوجه والظهر لأن يزدوجا فى الرميات المتتالية (شكل ١٩٢)

ويكون الفرق بين نتيجة الاختيار مع الإعادة وبدونها بسيطا للغاية فى بعض الحالات إذا مزجنا عشرة مجموعات من ورق اللعب ، فإن النسبة بين الأوراق المصورة إلى عدد الأوراق الكلى ستظل ١٢ : ٥٢ أو ٣ : ١٣ ، ولكن الاحتمال الرياضى لاختيار ورقتين مصورتين بدون إعادة ستكون

$ل^{١٢٠}_{٢} : ل^{٥٢٠}_{٢}$ = ١٢٠ × ١١٩ : ٥٢٠ × ٥١٩ = ٠,٠٥٣٩ وهذه النسبة تختلف اختلافاً بسيطاً عن ١٢^{٢} : ٥٢^{٢} = ٠,٠٥٣٣ وعلى ذلك إذا أخذنا عينة من مجال كبير جداً ، لايهم إذا كان الاختيار مع الإعادة أو بدونها وهذا الكلام مقبول ، وذلك لأن أخذ العينة لا يغير تركيب المجال تغيراً ملحوظاً إذا كان هذا المجال كبيراً جداً . وفى الإحصاء العملى ، تكون هذه هى الحال فى أغلب الأحيان ، وذلك من حسن الحظ لأن الرياضة التى تدخل فى الاختبار مع الاعادة هى أبسط بعض الشىء عنها فى الحالة الأخرى . وهذا هو السبب



الذى من أجله تعطى كتب الإحصاء الدراسية أمثلة رمى النقود والنرد كأمثلة على اختيار لا يحتوى فعلا على الإعادة .

ومن الجائز أن نبدأ دراسة علم الوراثة ونحصل على نتائج مفيـــدة ، إذا افترضنا تساوى الفرصة فى التعليم . ومن المؤكد أنه يمكننا أن نسلك طريقاً مباشراً إلى القوانين الأساسية للاحتمال الرياضى إذا حاولنا الإفادة من لوحة الشطرنج وذلك لتوضيح نتائج تساوى الفرصة فى إحدى لعب الحظ ، وبالتالى — فى مرحلة أخرى — لتوضيح الأخطار الفعلية التى تتورط فيها الحكومة إذا هى تصرفت على أساس فروض معينة عن الأخطار التى يمكنها أن تواجهها . وللسبب الذى ذكرناه فى الفقرة السابقة ، ستقوم بدراسة ذلك أولا على أساس أن عدد الحوادث التى قد تحدث كبير جداً ، أو بمعنى آخر ، أن نوع الأخطار التى قد تتعرض لها الحكومة يمكن مقارنتها بالأخطار فى حالة رمى قطعة نقود .

ولكى نحسن حالتنا النفسية قبل أن نستمر فى هذه الدراسة ، فلنوضح الأمور التى تتضمنها إحدى أنواع النتائج التى يحاول الإحصاء أن يوضحها . تتوقف كثير من أحكامنا فى الحياة على أدلة غير قاطعة تماماً . وقد نرغب مثلا فى معرفة ما إذا كان أحد أنواع التطعيم ذا أثر فعال ، أو ما إذا كانت هناك أى قواعد حقيقية لما يدعيه بعض الدجالون الشعبيون من أن الأطفـــال يشعرون بحواسهم أكثر من الكبار . فى كل حالة من الحالات السابقة قد يكون النجاح مجرد خدعة . وهو اهتمام الاحصاء الحديث هو على الخصوص تقرير : ما هى الخدعة ؟

لا توجد إجابة حاسمة لهذا السؤال ، ولكن لا يوجد أفضل من أن نقتبس هنا ما كتبه المعاصر ر . ا . فيشر ، إذا كنا نود أن نعطى إجابة محددة غير نهائية . تدعى سيدة (بعضهن يفعل ذلك) أنها تستطيع أن تعرف إذا كانت بصفتها قد وضعت اللبن قبل أو بعد الشاى وذلك بأن ترتشف الشاى الممزوج باللبن . ولكى تثبت إمكانها معرفة ذلك تبدى استعدادها للتمييز بين ثمانية فناجيل من الشاى وضع اللبن فى أربعة منها قبل الشاى والعكس بالنسبة الأربعة الآخرين والثمانية فناجيل متساوية تماماً فيما عدا ذلك وهى تبدى

ا :. تعدأدما)يه .الآن تتذوق ك ى أ1ر-ء د أرهذءا اغنا- .! حمب)ى ر<يب
راء أله .ءز .، • | »اق آى ها مات .آفرى خلاا~ آن .ز .عق ا.-(ر هز
نوي • ها هرءا ا الآ-رء ، من أا :وع الآخر . ء ،ذاو »آن عنها ا~ ء-ة |» .ز
ذ .ى <ع د »ا-<~ .أ ه م .ء أ »وع نا الا~ن أن ذ-رع _وذءر_ ه .ء أ ألت .. .ة
ه ا_ذ ا كان :ذء .الس ر .دة ه- يعلو ، ء___ آ-ر . درطاذة _< .-ء ا -امى ؟

ه - .ذج و .ق ل1عب . ف . الذ-_ |»ة ه . أ <ر ة آ .راة . درا :. ١• ة
آ .راق ~ آ- ر ز ر ~أ ه ~ ون ء ، يةآ ءراة . ه را .آق ~ اب ه ء ين لئم > . ة ى
٧١ ة إ أ هن . | » .. .ة ، .ق ع :ء <ت ، اد »لتقساذ .. ة آ ء_ أق ذ ت ا< .-ن
مص ؟_ى ،دنو :

٧٠ ====

و ء إ ذلك فا اتر د بالمدهيح ه . و !حذ ئتا ر امد بعين وذ_هنه اذ :يار دذا
تر :آب .< دهم _ .و ت ار ذ فت _ران هذه أ ء رعة |» -آب_ . ءز اذ ر ات :
-: ء- تذ- ر :نذيبي ا-.- ب ا :ءب ح مرة تة -مبه يز مرة وذالا ء ترة أ
تذ .ئ أ ٨ رعة بيدآفى كل مرة . و ء ئذ لات نة .ل السربة ، يزذ ر مدة
اذ .يارا :-. ب ا (طـ بو< ين ذ _دة ء د- اخنباره د ى ه : وه :ر لأ ٨ ولة ،
و ء إ هي لت .ايو- د أى أساغ اداد أ ´ ء الميدة . دا ث .ر ذ المت مبيآذ ، ألاا
تن . |» أ تة ج ء .ة ؟ ل عت هذ- -مآ ئة ر بأفب • وا- ن ميد قوا ع~ دنير عن ءئر
دن عدا ء . نبجة تبرز ؟ر ا سة: ئومنوع در امة الأآق .
م تلى ذلك فنا ء ذت ر يو~ ك في ء_ننا أن نخذ مو سرلرت آ فـ وذج
معقتو سبا سر أ يقا سءليه سلا أ ننيار . :لا ار تبط يو حرء :ي ء من الظا اهر ،
وة ها اظ هذه ~ الخلئ ستم خمس لا آ- ذ الأأ فرا عما ملة ، وا ا الة نفعما .
ده)يفى |» نفتـ ظر نا _إ . ه . > ز اهت .ارا `ثو- ر :السد ._ . باج احا ه ا المبدة
بيع أآ ؟ و > .أز بمفنا جلي من كل : و ع ، :كون فز !ل راتع ق دقعنذأ__ ، ´ر ها .
و تنتثا مسانة :< :ر_ فل ن لم عسرا ا .بددة تنآ~ن نمذن : :موء أ عرنورى
و :_فم ´ أ ٧ خر هر في ء .خر . بط ك فى هذا خا ´ تة الأ أف ه ة _ذن أرته -~
لهم حديد نوؤ الفنوجا |» ثمك قوعينة نردبة ٨ر ء نلى_هتيا الات النجاح

افوشر .إ لاا .، حالة أ .اوريتو_ا<- لتصاقة نقترب تطأ 1بقة ا_(ء رفى > هذه الما ئة
ة . د ء ا • | ». اعنتئتة . وءى ذلك ر ممتتك- ´ح عاذ ~ ة وأت بتوالية
تحسر . ة ة إ ه .~ ذ ا أ ´، ~ مر . ه~ .< . .وء ئ ذتك5 ل م ن_- تها ا ا. ءاج إ .ر
ا .دتها !_: -.: . إ . - . · : ه دذ • إذا |» ت :! ميدة ئه . ع فى دذ . ابدلي الا > وي .
ه ة_ :: ، _د قة: |» ~ ا ا- .د ء د ء ! ه . تنو ة :! ذتم أ ا ا- أ ´، - ة • أن < نفي
سزبة ´• . ، |»~ _.< :-< دة : :أ او < :ذى ثراذ ؟ ة .. |» ة_ - < آ ار فى ا 1ع_ . :~ ب
ء .قواحد < ة ه : .ة ة . : ة |» ر .ع ب ك ا- ة :

ا) . : : ~ : _ >ئه در | إ ا :ر ا ب م .. م
العشرة من أى نوع | م :لا إ . ا ب وا . ا
ملكة حمراء | م < به .ا ب- :- إ
ورقة ملكية (ملكة أو ملك) آس ، ملك أو ملكة | · ا .. ا ب و~)
· الا ا ا إ ر ا ب م :. ..لا
آس أسود أو أى ورقة ملكية | ر الا إ ا ر ا ب ؤ . لا
آس ديناري أو أى ورقة ملكى أسود | ل ٨١• ا ب •• ملا
ورقة حمراء عليها أى عدد من ٢ إلى ٩ | (الا إ ا و ا ب__ لا
عشرة حمراء أو أى آس أسود | ز ا إ . ا ب _م لا إ

الة وأ ءذ الا إ .1. - بة :_٩ :آ أ ا :ا ديأ :

باستخدام ثلاثة قواعد بسيطة نطيح)ن نتجب لثير آ من التمهيدات
عند : لبحث من نومته الحمد ل على نتيجة معينة فى إحدى لعب الحظ ومنحصل
علم دذه ا ة واعد أولا - ا •فرمنى أن الا ~ر بدمج بالا عادة ، مثل هالة
اعادن الورقة ع »´. معب عن • ئ ه رر لعب . ويد· فى هذه الحالة ملوك
الز >ء قح الا افي ى |» يبا

قا .د .. ائتهم : نبج ا ٦ مث ا ا .ملاقة قاعدة د~ ا ر ا ز ت اطية ا :. _ ساأ الاذ_ر
وأئث تنده :مت_ < اذافب |» اطئوء . ء ا أثرط أما ...) : . وهذه اقعداءعة

؟ ، . ءدأدهايف . الآن تتذوق لك أى 1 - -> ذ نه هذء الذنا . - . ا ه ب . ى تريب
. اعأهأ - -1 . > . ء • لا > 1ق آق هلمك ، اذرى خلا ~ أن آز . عة ذ . ا . - ار ه ز
~ ء • وارم ، ة الالنزعم ناا . رأ الآخر . . ذتر ›ن هذه اأ _ . . > ء . |
» . عد : . ا > »إ ء . د : أ مد . بدا ~ و ع 1 نا ا 7 مذ ان ‹ ة ر . ء ارمذوه _ ذ ، أنتد . ة
: ار آ ة . د ! ا ا أه لا ا إ . د . . ذ آ ردوء . ~ ايدعميد ة ~ _) . اا . ء _ ‹ ‹ ة اذا ه ا

ف ، ذج • رق 1 أ كب ، ف . اال - بدر ‹ ة ه . أر ، ته ار ~ اة . حر ا : ; > ، ته
أه ران آذرذ _ _ ، ه _ ون ة اية آ . ر . ق ه را . آق » < ء هه بن لا . : . > ة ~
م الاا ق ~ أذون . ء ، . - بهبه . ء ا ق ء . ا » » . اكذة ثما _ ة آ . . أ ق ذات اثا »ن
م ~ . د .) د . . !

ه ء ر نفا ا تر | » ب المفح ح ه و وأ _ د لسر بيعن ، وذرمة اذيار هذا
ة ـ . > هي ب . و ء ار ذ . فيتكار ار هذه ، ترة ءددآ الا . دآ مزأ) رت
! - : داي ـ شذ . - ر . : ، إزاة . : بلبا ~ ه ء يح درة ئا > به ن مر قوذ لألث بدرند
تذن ظ المجمرعة - يدآ في كى مرة . وء _ ذ الالت ول ان ائندبة • ن : رمة
ا _ يارا : - را » إ عئلبو . يز . ذرمةهد > . لتبار ءدى و : وه : ر كلى اوة ،
وء إ ذلئئذ . ايو . د آى أسا . ر | » ء ا > اسدة . ه إ ~ دون ذا مك مبـ اذ ، ألاا
فهتف » ة جم به ؟ لبت هذه عسر ئدر ياف ب ء ولمتزم متغق ا 1 دميرمن ء ئر
أ ‹ ن ء . ع أ . تجتنبر » رامتا ئو مذوع ‹ رامتا أ ~ تي .
ومثل ذلك فانتشر يو ~ لأف ء لا . نا آ ذ نخذ من ء لمرك آ نموذج
معين ع اسرا يقلس ء ليه لا الاختيار ، ا ار تبط يهلا ء . يزمن الط . اهر ،
وقهما ! نذأهذ ، ها احلئئشغمبى لاآ - دالأآ نوادعا ملاء وا 8 اة نفسا .
ء ه واي | » فت نلى ناا إ مذ . و ‹ تانت . ار ا اثوذ . 1 1 امد _ . باماما السيدة
ع وا ‹ ؟ ود آ ؟ معتقفناجلى من كر ‹ وع | » كون في الراقر فقيدين ' لنتيأرها .
وتسرآه _ نة) - رق إفل ين لم نطا 1 يددهسرآ ~ ن غدذء ! : مو ؟ أعز نوم
ون منم ‹ 7 خر من نر ء : خر . ~ ا ~ ، هذ ا - > الاا | » ة _ ذد أنذ _ >
تحديد نوق لا فونجا ا ‹ ثمك ت ء عبنة تردية يتب ء تلى _ حتا الا - النجاح

افف . ، الاذ . جالة ء انة رباه > . ملقتق » تمو . قالية ة ! _ 8 ء رفن ، هذه الامثة
• . - د ء ا ا . : . . . ، اعتئنة وء ابر قلك - رممتا الذجاح ثاذ ~ تأمت ه - والة
ى . . ة إ ا د ~ ذا ا : ـ امر . ده - إ . . . . . ء ، ذ لأنبة ـ ن انهك ا ا . - اح إؤ
ا ‹ دتها _ ، ـ ؛ ، ا ، ؛ ء و . : ء دء • اذ الأ ت ا نمدة 1 ‹ عل | » ذ . ا بل الا إ ر ‹ وي .
هن ، ـ . ، يا . : ، ـ ة - : . ح . ا ا : د > ه . ! . ه تذاه : » تمرات أ اه ، ة ، آن ‹ ة فه
| ر يتنمز | » > _ | » » : : ء . . : : : _ أ ا > : ذى نرا ا نذ . . . ه ة . ـ ، ا ، اذوفيا > ا ! مدء
» رة واحدةه . : ، . : ة ء • ق ! ء ملة

الجواب ٢٦	الأس البسطوني
الجواب ٢٣	
الجواب ٢٦	ملك حمراء
الجواب ٣٣	ورقة ملكية (ملكة أو ملك)
الجواب ٢٤	آس ، ملك أو ملكة
الجواب ٢٦	
الجواب ٢٦	
الجواب ٢٣	
الجواب ٢٣	

ثمى أ _ . إ أ • ر | » 1 ثنة 1 ثنة :
ا _ ر . . رأى ‹ أق • رقة ملم أسود
ورة . حم ا . عئبا أزعد ‹ ء م ي ه : : ه
ممث ة • ا . أو أى أس أسود

القواعد الأ ا . . ما ، بة ا ' . _ : آ : ' : ا - تيا ن

بامتغدا ‹ م ثلاثة قواعد بسرة نته يع أن نتجنب كثيرأ دن التهقيدات
عند البحث عن ذرمة احما » على نتيجة معينة فى إحدى لعب الحظ ومنعصل
ء _ ه ذه ت واهد أولا - إ • نومنى أن الاختبأ > بدمج بالاعادة ، مثل هالة
اعادن الورة » . مدا . . معب ء ح ؟ موعة ‹ رثر لعب . ويدذ فى مذهمئنا التسلوك
ا | » هة ثح الرف ي هفو > . _ .

قا . د ~ . ا 8 نيه . . إ » ا المتنالسات قاعدة _ ~ و ~ ة . ‹ ابة . ‹ يسا ، الا - تار
م أكتد تند ديحذ _ . اذافتب اطلاك | » _ ثلى اأ ترط أ ءا . . . آ : . وهذه القاعدة

إلا على اللون . عدد جميع الترتيبات الممكنة للثمانية أوراق ذات اللونين

(ص ٥٩٦) ...

$\times$ ... = ٧٠

والفشل كما فى حالة ثمانية رميات لقطعة نقود متطابقة السطحين . فى هذه الحالة توجد ٢^٨ ترتيبات مختلفة . وعلى ذلك ففرصة النجاح ثمانيـــة مرات متوالية محسوبة على هـــذا الأساس هى $\frac{١}{٢٥٦}$. وعلى ذلك يكون إحتمال النجاح إلى إحتمال الفشل هو ١ : ٢٥٥ ، إذا كانت السيدة لا تعلم عدد فناجيل كل نوع .

ويحسن بالنسبة للقارئ الجديد على موضوع الفقرات السابقة ، أن يقف هنا ويحاول تعيين الاحتمال الرياضى فى كل اختيار مما يأتى فى حالة السحب مرة واحدة من مجموعة ورق لعب كاملة :

...	(الجواب $\frac{١}{٥٢}$)
العشرة من أى نوع	(الجواب $\frac{١}{١٣}$)
ملك أحمر	(الجواب $\frac{١}{٢٦}$)
	(الجواب $\frac{٣}{١٣}$)
	(الجواب $\frac{٤}{١٣}$)
	(الجواب $\frac{٥}{٢٦}$)
	(الجواب $\frac{٥}{٥٢}$)
ورقة حمراء عليها أى عدد من ٢ إلى ٩	(الجواب $\frac{٤}{١٣}$)
عشرة حمراء أو أى آس أسود	(الجواب $\frac{١}{١٣}$)

القواعد الأساسية الثلاثة للاحتمال :

ونموذج ورق اللعب المناظر لهذه التجربة هو : أربعة أوراق حمراء وأربعة أوراق أخرى سوداء تكون ثمانية أوراق مرتبة فى ترتيب معين لا يتوقف إلا على اللون . عدد جميع الترتيبات الممكنة للثمانية أوراق ذات اللونين

(ص ٥٩٦) هو :

أ ٨

وعلى ذلك فالترتيب الصحيح هو واحد فى السبعين ، وفرصة اختيار هذا الترتيب هى $\frac{١}{٧٠}$. وعلى ذلك فبتكرار هذه التجربة عدداً كبيراً من المرات ، يستطيع شخص أن يميز الترتيب الصحيح مرة كل سبعين مرة وذلك بشرط تفنيط المجموعة جيداً فى كل مرة . وعلى ذلك نقول أن النسبة بين فرصة اختيار الترتيب المطلوب وبين فرصة عدم اختياره هى ١ : ٦٩ فى كل محاولة ، وعلى ذلك لا يوجد أى أساس لادعاء السيدة . هل يكون ذلك سبباً فى ألا نثق فيما تقوم به ؟ ليست هذه بمسألة رياضية ، ولكن سيتفق الكثيرون على أن هذه النتيجة تبرر دراسة الموضوع دراسة أعمق .

وعلى ذلك فمثال فيشر يوضح كيف يمكننا أن نتخذ من سلوك أنموذج معين مقياساً يقاس عليه — لاختيار الارتباط بين مجموعتين من الظواهر ، وفى حالتنا هذه هما الحكم الشخصى لأحد الأفراد على حالة ، والحالة نفسها . وهو أيضاً يلفت نظرنا إلى ضرورة اختيار النموذج المناسب . بإحاطة السيدة علماً بوجود أربعة فناجيل من كل نوع ، نكون فى الواقع قد قيدنا اختيارها . وتنشأ مسألة أخرى إذا نحن لم نحط السيدة علماً بأن نصف المجموعة من نوع ونصفها الآخر من نوع آخر . يمكننا فى هذه الحالة الأخيرة إذن أن نعتبر تحديد نوع كل فنجال كحكم على عينة فردية يحتوى على إحتمالات النجاح

ويحسن بالنسبة للقارئ الجديد على موضوع الفقرات السابقة ، أن يقف هنا ويحاول تعيين الاحتمال الرياضى فى كل اختيار مما يأتى فى حالة السحب مرة واحدة من مجموعة ورق لعب كاملة :

- (أ) الآس ... (الجواب $\frac{٤}{٥٢}$)
- العشرة من أى نوع (الجواب $\frac{١}{١٣}$)
- ملك حمراء (الجواب $\frac{١}{٢٦}$)
- ورقة حمراء عليها أى عدد من ٢ إلى ٩ (الجواب $\frac{٤}{١٣}$)
- عشرة حمراء أو أى آس أسود (الجواب $\frac{١}{١٣}$)

ونموذج ورق اللعب المناظر لهذه التجربة هو : أربعة أوراق حمراء وأربعة أوراق أخرى سوداء تكون ثمانية أوراق مرتبة فى ترتيب معين لا يتوقف إلا على اللون . عدد جميع الترتيبات الممكنة للثمانية أوراق ذات اللونين

(ص ٥٩٦) هو :

٨ ! / (٤ ! × ٤ !) = ٧٠

والفشل كما فى حالة ثمانية رميات لقطعة نقود متطابقة السطحين . فى هذه الحالة توجد $٢^٨$ ترتيبات مختلفة . وعلى ذلك ففرصة النجاح ثمانيـــة مرات متوالية محسوبة على هـــذا الأساس هى $\frac{١}{٢٥٦}$. وعلى ذلك يكون إحتمال النجاح إلى إحتمال الفشل هو ١ : ٢٥٥ ، إذا كانت السيدة لا تعلم عدد فناجيل كل نوع .

ويحسن بالنسبة للقارئ الجديد على موضوع الفقرات السابقة ، أن يقف هنا ويحاول تعيين الاحتمال الرياضى فى كل اختيار مما يأتى فى حالة السحب مرة واحدة من مجموعة ورق لعب كاملة :

الآس البستونى	(الجواب $\frac{١}{٥٢}$)
العشرة من أى نوع	(الجواب $\frac{١}{١٣}$)
ملكة حمراء	(الجواب $\frac{١}{٢٦}$)
ورقة ملكية (ملكة أو ملك)	(الجواب $\frac{٢}{١٣}$)
آس ، ملك أو ملكة	(الجواب $\frac{٣}{١٣}$)
آس أسود أو أى ورقة ملكية	(الجواب $\frac{٧}{٢٦}$)
آس دينارى أو أى ورقة ملكى أسود	(الجواب $\frac{٧}{٥٢}$)
	(الجواب $\frac{٣}{١٣}$)
	(الجواب $\frac{١}{١٣}$)

القواعد الأساسية الثلاثة للاحتمال :

استعدادها أيضاً لأن تتذوق الشاى الموجود فى هذه الفناجيل حسب أى ترتيب يراه الممتحن ، ولا تتلقى أى معلومات أخرى خلاف أن أربعة فناجيل من نوع ، والأربعة الأخرى من النوع الآخر . سنفترض أن هذه السيدة تعين نوع كل فنجال تعييناً صحيحاً . وعلينا الآن أن نقرر على ضوء هذه النتيجة ما إذا كان ادعاء السيدة صحيحاً . وبمعنى آخر . هل لهذه النتيجة أساس ؟

ونموذج ورق اللعب المناظر لهذه التجربة هو : أربعة أوراق حمراء وأربعة أوراق أخرى سوداء تكون ثمانية أوراق مرتبة فى ترتيب معين لا يتوقف إلا على اللون

(ص ٥٩٦) هو :

وعلى ذلك فالترتيب الصحيح هو واحد فى السبعين ، وفرصة اختيار هذا الترتيب هى ١/٧٠ . وعلى ذلك فبتكرار هذه التجربة عدداً كبيراً من المرات ، يستطيع شخص أن يميز الترتيب الصحيح مرة كل سبعين مرة وذلك بشرط تقنيط المجموعة جيداً فى كل مرة . وعلى ذلك نقول أن النسبة بين فرصة اختيار الترتيب المطلوب وبين فرصة عدم اختياره هى ١ : ٦٩ فى كل محاولة ، وعلى ذلك لايوجد أى أساس لادعاء السيدة . هل يكون ذلك سبباً فى ألا نثق فيما تقوم به ؟ ليست هذه بمسألة رياضية ، ولكن سيتفق الكثيرون على أن هذه النتيجة تبرر دراسة الموضوع دراسة أعمق .

وعلى ذلك فمثال فيشر يوضح كيف يمكننا أن نتخذ من سلوك أنموذج معين مقياساً يقاس عليه — لاختبار الارتباط بين مجموعتين من الظواهر ، وفى حالتنا هذه هما الحكم الشخصى لأحد الأفراد على حالة ، والحالة نفسها . وهو أيضاً يلفت نظرنا إلى ضرورة اختيار النموذج المناسب . بإحاطة السيدة علماً بوجود أربعة فناجيل من كل نوع ، نكون فى الواقع قد قيدنا اختيارها . وتنشأ مسألة أخرى إذا نحن لم نحط السيدة علماً بأن نصف المجموعة من نوع ونصفها الآخر من نوع آخر . يمكننا فى هذه الحالة الأخيرة إذن أن نعتبر تحديد نوع كل فنجال كحكم على عينة فردية يحتوى على احتمالات النجاح

والفشل كما فى حالة ثمانية رميات لقطعة نقود متطابقة السطحين . فى هذه الحالة توجد ٢^٨ ترتيبات مختلفة . وعلى ذلك ففرصة النجاح ثمانيـــة مرات متوالية محسوبة على هـــذا الأساس هى ١/٢٥٦ . وعلى ذلك يكون احتمال النجاح إلى احتمال الفشل هو ١ : ٢٥٥ ، إذا كانت السيدة لا تعلم عدد فناجيل كل نوع .

ويحسن بالنسبة للقارئ الجديد على موضوع الفقرات السابقة ، أن يقف هنا ويحاول تعيين الاحتمال الرياضى فى كل اختيار مما يأتى فى حالة السحب مرة واحدة من مجموعة ورق لعب كاملة :

ملكة حمراء (الجواب ١/٥٢)

ورقة ملكية (ملكة أو ملك) (الجواب ١/١٣)

آس ، ملك أو ملكة (الجواب ١/٢٦)

آس أسود أو أى ورقة ملكية

آس ديناري أو أى ورقة ملكى أسود

استعدادها أيضا لأن تتذوق الشاى الموجود فى هذه الفناجيل حسب أى ترتيب يراه الممتحن ، ولا تتلق أى معلومات أخرى خلاف أن أربعة فناجيل من نوع ، والأربعة الأخرى من النوع الآخر . سنفترض أن هذه السيدة تعين نوع كل فنجال تعييناً صحيحاً . وعلينا الآن أن نقرر على ضوء هذه النتيجة ما إذا كان ادعاء السيدة صحيحاً . وبمعنى آخر . هل لهذه النتيجة أساس ؟

ونموذج ورق اللعب المناظر لهذه التجربة هو : أربعة أوراق حمراء وأربعة أوراق أخرى سوداء تكون ثمانية أوراق مرتبة فى ترتيب معين لا يتوقف إلا على اللون . عدد جميع الترتيبات الممكنة للثمانية أوراق ذات اللونين (ص ٥٩٦) هو :

[illegible]

[illegible]

ويحسن بالنسبة للقارئ الجديد على موضوع الفقرات السابقة ، أن يقف هنا ويحاول تعيين الاحتمال الرياضى فى كل اختيار مما يأتى فى حالة السحب مرة واحدة من مجموعة ورق لعب كاملة :

الآس [illegible]	(الجواب [illegible])
[illegible]	(الجواب ١/١٣)
ملكة حمراء	(الجواب ١/٢٦)
ورقة ملكية (ملكة أو ملك)	(الجواب ٣/١٣)
آس ، ملك أو ملكة	(الجواب ٤/١٣)
آس أسود أو أى ورقة ملكية	(الجواب ٨/٢٦)
[illegible]	(الجواب [illegible])
[illegible]	(الجواب [illegible])
[illegible]	(الجواب [illegible])

[illegible]

استعدادها أيضاً لأن تتذوق الشاى الموجود فى هذه الفناجيل حسب أى ترتيب يراه الممتحن ، ولا تتلقى أى معلومات أخرى خلاف أن أربعة فناجيل من نوع ، والأربعة الأخرى من النوع الآخر . سنفترض أن هذه السيدة تعين نوع كل فنجال تعييناً صحيحاً . وعلينا الآن أن نقرر على ضوء هذه النتيجة ما إذا كان ادعاء السيدة صحيحاً . وبمعنى آخر . هل لهذه النتيجة أساس ؟

ونموذج ورق اللعب المناظر لهذه التجربة هو : أربعة أوراق حمراء وأربعة أوراق أخرى سوداء تكون ثمانية أوراق مرتبة فى ترتيب معين لا يتوقف إلا على اللون

عدد جميع الترتيبات الممكنة للثمانية أوراق ذات اللونين

(ص ٥٩٦) هو :

$\binom{8}{4} = 70$

ويحسن بالنسبة للقارئ الجديد على موضوع الفقرات السابقة ، أن يقف هنا ويحاول تعيين الاحتمال الرياضى فى كل اختيار مما يأتى فى حالة السحب مرة واحدة من مجموعة ورق لعب كاملة :

الآس البستونى	(الجواب ١/٥٢)
ملكة حمراء	(الجواب ١/٢٦)
ورقة ملكية (ملكة أو ملك)	(الجواب ٢/١٣)
آس ، ملك أو ملكة	(الجواب ٣/١٣)
آس أسود أو أى ورقة ملكية	(الجواب ٧/٢٦)
آس ديناري أو أى ورقة ملكى أسود	(الجواب ٧/٥٢)
ورقة حمراء عليها أى عدد من ٢ إلى ٩	(الجواب ٤/١٣)
عشرة حمراء أو أى آس أسود	(الجواب ١/١٣)

القواعد الأساسية الثلاثة للاحتمال :

هى : إذا كان اختياران أو أكثر غير متداخلين على الإطلاق فإن احتمال الحصول على أيهما أو الآخر يساوى مجموع الاحتمالات المنفردة .

افترض عينة ثنائية تتكون من آس أحمر وملك . وعلى ذلك فعدد الأوراق الممكنة هى ٢ آس و ٤ ملك . إذا أعدنا الورقة الأولى المسحوبة وفنطنا قبل سحب ورقة أخرى ؛ فإن فرصة الحصول على مثل هذه العينة هى $\frac{٦}{٥٢}$ أو $\frac{٣}{٢٦}$. فرصة اختيار آس أحمر هى $\frac{٢}{٥٢}$ ، وفرصة اختيار ملك هى $\frac{٤}{٥٢}$ ، والقاعدة التى ذكرناها تنص على أن فرصة اختيار إما آس أحمر أو ملك من أى نوع هى :

$$\frac{٢}{٥٢} + \frac{٤}{٥٢} = \frac{٦}{٥٢} = \frac{٣}{٢٦} .$$

وهذه القاعدة تسرى على أى عدد من الاختيارات ما دامت مستقلة ، فمثلا يمكننا تحديد الاختبار فى المثال السابق حسب نسبة امكان الحصول على كل ورقة على الترتيب كالآتى :

آس واحد كوبة	$\frac{١}{٥٢}$
آس واحد دينارى	$\frac{١}{٥٢}$
ملك اسباتى	$\frac{١}{٥٢}$
ملك دينارى	$\frac{١}{٥٢}$
ملك بسطونى	$\frac{١}{٥٢}$
ملك كوبه	$\frac{١}{٥٢}$

وبتطبيق قاعدة الجمع نجد أن فرصة سحب واحد مكون إما من آس أحمر أو ملك هى ٦

$$\frac{١}{٥٢} + \frac{١}{٥٢} + \frac{١}{٥٢} + \frac{١}{٥٢} + \frac{١}{٥٢} + \frac{١}{٥٢} = \frac{٦}{٥٢} = \frac{٣}{٢٦} .$$

وفيما يلى بعض الأمثلة البسيطة ، يمكن للقارىء أن يختبر صحة القاعدة بها :

(ا) تحتوى سلة على ثلاث كرات زرقاء وخمسة كرات حمراء وأربعة كرات خضراء ، وكرتان سوداوين

أوجد فرصة سحب كرة واحدة كالآتى :

(١) كرة زرقاء أو حمراء. (الجواب $\frac{٤}{٧}$)

(٢) كرة اما زرقاء أو خضراء. (الجواب $\frac{١}{٢}$)

(٣) كرة ملونة (الجواب $\frac{٦}{٧}$)

(٤) كرة اما زرقاء أو سوداء (الجواب $\frac{٥}{١٤}$)

(ب) القيت فرداً ذو ستة أوجه مرة واحدة ، ماهى فرصة أن يكون عدد النقط على الوجه الأعلى :

(٥) أما واحدة أو ست (الجواب $\frac{١}{٣}$)

(٦) عدد زوجى (الجواب $\frac{١}{٢}$)

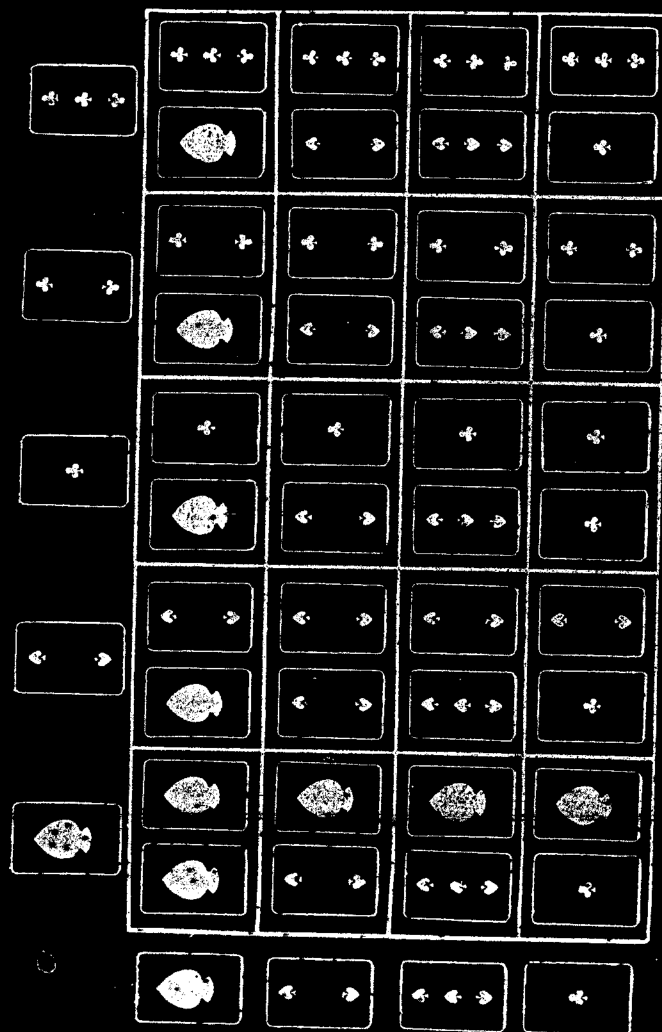
(٧) أقل من ٣ (الجواب $\frac{١}{٣}$)

(٨) أقل من ٥ (الجواب $\frac{٢}{٣}$)

قاعدة الضرب :

يمكننا أن نتصور إمكانيات سحبين آنيين باليد اليمنى واليد اليسرى من مجموعتين متطابقتين من ورق اللعب ، أو (وهو نفس الشىء) سحبين من نفس المجموعة مع إعادة الورقة الأولى قبل سحب الثانية ، يمكننا أن نتصور ذلك بالرجوع إلى ورقة الشطرنج وذلك لتوضيح مايتضمنه تساوى الفرصة وبنفس الطريقة يمكن توضيح نتيجة سحب ورقة واحدة آنياً من كل من مجموعتين من ورق اللعب تركيبها تختلف كما فى شكل ١٩٣ . وتركيب المجموعتين فى شكل ١٩٣ هو كالآتى :

المجموعة اليمنى (٤)	المجموعة اليسرى (٥)
الآس السباتى	الآس الاسباتى
الاثنين الاسباتى	الاثنين الاسباتى
الثلاثة الاسباتى	الآس البسطونى
الآس البسطونى	الاثنين البسطونى
. . . .	الثلاثة البسطونى



(شكل ١٩٢)
سحب ورقة واحدة من كل من مجموعتين من ورق اللعب على فرض تساوى الفرصة

توجد ٤ × ٥ (= ٢٠) تباديل زوجية ، أى ٢٠ امكانيات تتفق مع تساوى الفرصة

الآس الاسباتى مرتين	١
الآس الاسباتى والاثنين الاسباتى	٢
الآس الاسباتى والآس البسطونى	٢
الآس الاسباتى والاثنين البسطونى	١
الآس الاسباتى والثلاثة البسطونى	١
الاثنين الاسباتى مرتين	١
الاثنين الاسباتى والآس البسطونى	٢
الاثنين الاسباتى والاثنين البسطونى	١
المجموع	١١

الاثنين الاسباتى والثلاثة البسطونى	١
الثلاثة الاسباتى والآس الاسباتى	١
الثلاثة الاسباتى والاثنين الاسباتى	١
الثلاثة الاسباتى والآس البسطونى	١
الثلاثة الاسباتى والاثنين البسطونى	١
الثلاثة الاسباتى والثلاثة البسطونى	١
الآس البسطونى مرتين	١
الآس البسطونى والاثنين البسطونى	١
الاثنين الاسباتى والثلاثة البسطونى	١
المجموع	٩

من هذا الجدول يمكننا أن نستخلص المعلومات الآتية الخاصة بالازواج التى من نفس النوع

(١) ورقتان سباتى		ورقتان بسطونى	
الآس السباتى مرتان	١	الآس البسطونى مرتان	١
الآس السباتى والاثنان السباتى	٢	الآس البسطونى والاثنان البسطونى	١
الاثنان السباتى مرتان	١	الآس البسطونى والثلاثة البسطونى	١
الثلاثة السباتى والآس السباتى	١		
الثلاثة السباتى والاثنان السباتى	١		
المجموع	٦		٣

وعلى ذلك فإن ٦ + ٣ = ٩ إمكانيات لسحب ورقتين سباتى أو ورقتين بسطونى ، والباقى ٢٠ — ٩ = ١١ تكون الورقتان فيه واحدة سباتى والأخرى بسطونى . وعلى ذلك فإن الاحتمال الرياضى لاختيار عينة من كل من هذه الأنواع الثلاثة هو

شكل (١٩٤)

ورقتان سباتى $\frac{٦}{٢٠} = \frac{٣}{١٠} = \frac{٣}{٤} \times \frac{٢}{٥}$

ورقتان بسطونى $\frac{٣}{٢٠} = \frac{١}{٤} \times \frac{٣}{٥}$

ورقة سباتى وورقة بسطونى $\frac{١١}{٢٠} = (\frac{٣}{٤} \times \frac{٣}{٥}) + (\frac{١}{٤} \times \frac{٢}{٥})$

وإذا كان اهتمامنا محصورة فقط فى سحب تكوين واحد من هذه ، فإنه يمكن تمثيل أى ورقة بسطونى بالآس البسطونى وأى ورقة سباتى بالآس السباتى كما فى شكل ١٩٤ . ومحتويات شكل ١٩٤ التى ترد إلى النتيجة المبينة فى شكل ١٩٥ تتفق مع ما سبق . فلنضع الآن أمام النوع فى كل مجموعة احتمال الحصول عليه عند السحب مرة واحدة :

المجموعة اليمنى	المجموعة اليسرى
السباتى $\frac{٣}{٤}$	السباتى $\frac{٢}{٥}$
البسطونى $\frac{١}{٤}$	البسطونى $\frac{٣}{٥}$

وعلى ذلك فرصة الحصول على ورقتين سباتى $(\frac{٣}{١٠})$ هى حاصل ضرب فرصة $(\frac{٣}{٤})$ الحصول على ورقة سباتى من المجموعة اليمنى وفرصة $(\frac{٢}{٥})$ الحصول على ورقة سباتى من المجموعة اليسرى .

	♠ $\frac{٢}{٥}$	♣ $\frac{٣}{٥}$
♠ $\frac{٣}{٤}$	♠ ♠ $\frac{٢}{٥} \times \frac{٣}{٤} = \frac{٦}{٢٠}$	♠ ♣ $\frac{٣}{٥} \times \frac{٣}{٤} = \frac{٩}{٢٠}$
♣ $\frac{١}{٤}$	♣ ♠ $\frac{٢}{٥} \times \frac{١}{٤} = \frac{٢}{٢٠}$	♣ ♣ $\frac{٣}{٥} \times \frac{١}{٤} = \frac{٣}{٢٠}$

شكل (١٩٥)

قاعدة الضرب موضحة بكشف حساب شكل ١٩٤

بالمثل فرصة الحصول على ورقتين بسطونى ($\frac{٣}{٢٠}$) هى حاصل ضرب فرصة ($\frac{١}{٤}$) الحصول على ورقة بسطونى من المجموعة اليمنى فى فرصة ($\frac{٣}{٥}$) الحصول على ورقة بسطونى من المجموعة اليسرى . والسحب المزدوج مختلفتين فى النوع يدخل هنا قاعدة إما . . . أو (قاعدة الجمع) . فى هذه الحالة لدينا إمكانيتين مستقلتين ، أما يمـــين سباتى ويسار بسطونى أو يسار سباتى ويمين بسطونى . حسب قاعدة الضرب ، هاتان الفرصتان هما ($\frac{٣}{٤} \times \frac{٣}{٥}$) = $\frac{٩}{٢٠}$ ، ($\frac{١}{٤} \times \frac{٢}{٥}$) = $\frac{٢}{٢٠}$. والمجموع هو $\frac{١١}{٢٠}$ كما هو مبين فيما سبق .

وقد يساعد القارئ هنا تكوين جداول مشابهة للجدول السابق للمجموعات الغير الكاملة (١ — ١٠) الآتية من ورق اللعب وجميعها من نفس النوع . هـــذه الجداول تعطى جميع المعلومات اللازمة لاختبار صحة قاعدتى الجمع والضرب ، وذلك بحساب فرصة الحصول على عينة مكونة من ورقتين من نوع أو آخر مما يأتى (من ا — ى) :

(ا) آسين
(ب) ورقتين من نفس القيمة غير آسين
(حـ) ورقتين مختلفتين
(ى) ورقتين من نفس القيمة وتكون هذه القيمة زوجية

(١) يمين آس ٢ ٣ ٤ يسار آس ٢ ٣ ٤	(٦) يمين آس ٢ يسار آس ٢ ٣ ٤
(٢) يمين آس ٢ يسار آس ٢ ٣ ٤ ٥	(٧) يمين آس ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ يسار آس ٢ ٣ ٤
(٣) يمين آس ٢ ٣ ٤ يسار آس ٢ ٣	(٨) يمين آس ٢ ٣ ٤ ٥ يسار آس ٢ ٣ ٤ ٥
(٤) يمين آس ٢ ٣ يسار آس ٢ ٣	(٩) يمين آس ٢ ٣ ٤ يسار آس ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧
(٥) يمين آس ٢ ٣ ٤ ٥ يسار آس ٢ ٣ ٤	(١٠) يمين آس ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ (١١) يسار آس ٢ ٣ ٤ ٥ ٦

قاعدة الطرح :

إذا كان تبويبنا للإمكانيات النسبية أى للفرص تاماً ، فإن مجموعها الكلى لا بد وأن يساوى الوحدة كما فى المثال الذى أعطيناه فيما سبق ألا وهو :

ورقتان سباتى	ورقتان بسطونى	سباتى وبسطونى	المجموع
$\frac{٦}{٢٠}$	$\frac{٣}{٢٠}$	$\frac{١١}{٢٠}$	$\frac{٢٠}{٢٠}$ = ١

إذا فصلنا الاختيار على أنه بطريقتين على حسب ما إذا كان يتصف أولا يتصف بصفة معينة ، فإن الاحتمال ى لأن يتصف بهذه الصفة ؛ والاحتمال ك لأ لا يتصف بها يكون مجموعهما الوحدة ، أى ى + ك = ١ . وعلى ذلك

$$ى = ١ - ك \quad ، \quad ك = ١ - ى .$$

فمثلا ، فرصتا الحصول ، وعدم الحصول ، على ورقة ملكية حمراء فى سحب واحد من مجموعة كاملة من ورق اللعب هما على الترتيب $\frac{٤}{٥٢}$ ، ($١ - \frac{٤}{٥٢}$) = $\frac{٤٨}{٥٢}$ ، أو $\frac{١}{١٣}$ ، $\frac{١٢}{١٣}$. وفى كثير من الأحيان نختصر العمل كثيراً عند حل مسائل الاحتمال باستخدام قاعدة الطرح هذه ، وعلى الخصوص تظهر فائدة هذه القاعدة عندما يكون المطلوب فى المسألة هو تعيين فرصة الحصول على الأقل على اختيار واحد من نوع معين كما فى السؤال التالى : ما هى فرصة الحصول على الأقل على ورقة حمراء واحـــدة فى سحب واحد من كل من مجموعتين كاملتين من ورق اللعب ؟

والنقطة التى يجب فهمها هنا هى أنه يجب إما عدم الحصول على أى ورقة حمراء فى السحب المزدوج ، أو على الأقل على ورقة حمراء واحدة ، وبمعنى آخر أن التبويب المزدوج تاماً . وعلى ذلك فإن الفرصتين اللتين تناظران هذين النوعين من الاختيار يجب أن يكون مجموعهما الوحدة . والآن فرصة كون الورقة سوداء فى سحب واحد من مجموعة واحدة هى $\frac{١}{٢}$ ، وهى طبعاً نفس فرصة عدم كونها حمراء . الفرصة ى أمام الورقتين فى سحب آنى من مجموعتين كاملتين ، كى تكونا سوداوين هى (باستخدام قاعدة الضرب) .

$$\frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} = \frac{١}{٤}$$

وعلى ذلك فالإمكان النسبي لذلك ، كى لا تكون الورقتان سوداوين معا هو

$١ - ن = ١ - \frac{١}{٤} = \frac{٣}{٤}$.

وحيث أن شرط عدم كون الورقتين سوداوين معاً يكافئ الشرط بأن احداهما تكون حمراء ، يكون هذا هو الجواب المطلوب .

ويساوى ذلك فى البساطة ، الإجابة على السؤال ما هى فرصة الحصول على ورقة كوبة واحدة على الأقل إذا كان السحب يتكرر ثمانية مرات ومع الإعادة ؟ حسب قاعدة الضرب تكون فرصة الحصول على ثمانية أوراق من نوع غير الكوبة هى $(\frac{٣}{٤})^٨$. وعلى ذلك ففرصة الحصول على ورقة كوبة واحدة هى

$$١ - (\frac{٣}{٤})^٨ = ١ - \frac{٦٥٦١}{٦٥٥٣٦} = \frac{٥٨٩٧٥}{٦٥٥٣٦}$$

وعلى ذلك فالنسبة بين احتمال الحصول على ورقة واحدة كوبة على الأقل ، وعدم الحصول على أوراق كوبة على الاطلاق هى ٥٨٩٧٥ : ٦٥٦١ أو ٩ : ١ تقريبا .

والفرصة التى اتاحت المناقشة المشهورة بين باسكال وفرمات تعطى مثالا لقاعدة النفى التى أعطيناها للمسائل التى تحوى العبارة « على الأقل واحد » . لقد كون الفارس دى مير ثروة من الرهان بنسبة أعلى من ١١١ بقليل على الحصول على العدد ستة مرة واحدة على الأقل فى أربعة رميات لنرد ، وخسر هذه الثروة بالرهان على الحصول على عدد مرتين فى ٢٤ رمية مزدوجة . وقاعدة الطرح تعطى التفسير

فرصة الحصول على العدد ستة مرة واحدة على الأقل فى أربعة رميات :

$١ - (\frac{٥}{٦})^٤ = ٠,٥١٤$ (الفرصة أفضل للحصول على المطلوب) .

فرصة الحصول على عدد مرتين فى ٢٤ رمية مزدوجة

$١ - (\frac{٣٥}{٣٦})^{٢٤} = ٠,٤٩١$ (فرصة عدم حدوث المطلوب أكبر)

الألغاز الآتية يتطلب حلها قاعدة الطرح

(١) فى سحب آتى من مجموعتى الورق فى شكل ١٩٣ ، ما هى فرصة الحصول على ورقة بسطونى على الأقل ؟ (الجواب $\frac{١}{٤}$)

(٢) فى المثال السابق ما هى فرصة الحصول على آس واحد على الأقل ؟ (الجواب $\frac{٧}{١٠}$)

(٣) فى المثال (١) ما هى فرصة الحصول على ورقة واحدة على الأقل تكون قيمتها أقل من ٦ ؟ (الجواب $\frac{٤}{٥}$).

(٤) فى نفس المثال رقم ١ ، ما هى فرصة الحصول على ورقة سوداء واحدة على الأقل ؟ (الجواب ١)

(٥) فى رمية آنية لنردين ، ما هى فرصة احتواء أحد الأوجه المقلوبة على الأقل على ثلاثة نقاط على الأقل ؟ (الجواب $\frac{٨}{٩}$) .

(٦) فى المثال ٥ ما هى فرصة احتواء أحد الأوجه المقلوبة على الأقل على أربعة نقاط على الأقل ؟ (الجواب $\frac{٣}{٤}$)

(٧) سلتان تحتوى كل منهما على ثلاث كرات صفراء ، ٤ زرقاء ، ٥ حمراء ، ٦ خضراء ، وكرتين سوداوين . فى سحب آنى ما هى فرصة الحصول على كرة سوداء واحدة على الأقل ؟ (الجواب $\frac{١٩}{١٠٠}$)

(٨) فى التمرين السابق ما هى فرصة الحصول على كرة خضراء واحدة على الأقل ؟ (الجواب $\frac{٥١}{١٠٠}$)

(٩) فى المثال السابق ، ما هى فرصة الحصول على كرة حمراء واحدة أو كرة خضراء واحدة على الأقل ؟ (الجواب $\frac{٣١٩}{٤٠٠}$)

(١٠) فى المثال السابق ما هى فرصة الحصول على كرة زرقاء واحدة أو كرة سوداء واحد على الأقل ؟ (الجواب $\frac{٥١}{١٠٠}$) .

معنى الاستقلال

فى كثير من الأحيان تصاغ قاعدة الضرب على النحو الآتى ، احتمال حدوث حادثين مستقلين أو أكثر معاً يساوى حاصل ضرب الاحتمالات المنفردة حدوث كل منهم . أهم كلمة فى هذه العبارة هى كلمة « مستقلين » ، فالسحب

الآنى من مجموعتين من ورق اللعب ، أو الرمى الآنى لنردين، والرمى المتتابع لنفس النرد هى حوادث مستقلة . وليس من الضرورى أن يكون ذلك صحيحاً فى حالة السحب المتتالى من نفس المجموعة من ورق اللعب . أما نتيجة رمى نفس النرد مرة ثانية فلا تتوقف على ما حدث فى الرمية الأولى ، وذلك لأن عــدد أوجه النرد يبقى بدون تغيير ، ولا يكون نفس الشىء صحيحاً فى حالة مجموعة ورق اللعب إلا إذا أعيدت الورقة المسحوبة قبل سحب غيرها . وهذه العبارة لا تكون صحيحة فى حالة سحب ورقتين فى آن واحد .

وعلى ذلك سندرس الآن تطبيق القواعد الثلاث الأساسية فى حالة العينات التى لا يسمح فيها بالاعادة . نفرض أن المجموعة تحتوى على ثمانية نوعها كالآتى : ١ بسطونى ، ٣ كوبة ، ٤ دينارى . ولنطلق على هذه المجموعة (فى حالة تكوينها الابتدائى) المجموعة ا . إذا سحبنا ورقة منها فإما أن تكون هذه الورقة بسطونى أو كوبة أو دينارى . وعلى ذلك يبقى لدينا مجموعة واحدة من المجموعات الثلاث الآتية التى يتكون كل منها من سبع ورقات :

	بسطونى	كوبة	دينارى
ب	٠	٣	٤
حـ	١	٢	٤
ى	١	٣	٣

وعلى ذلك فاحتمالات سحب ورقة بسطونى فأخرى كوبة فثالثة دينارى من المجموعة الأصلية (ا) والمجموعات التى تبقى (ب ، حـ ، ى) هى

	بسطونى	كوبة	دينارى
ا	$\frac{١}{٨}$	$\frac{٣}{٨}$	$\frac{١}{٢}$
ب	٠	$\frac{٣}{٧}$	$\frac{٤}{٧}$
حـ	$\frac{١}{٧}$	$\frac{٢}{٧}$	$\frac{٤}{٧}$
ى	$\frac{١}{٧}$	$\frac{٣}{٧}$	$\frac{٣}{٧}$

وعلى ذلك يمكننا اعتبار مسألة سحب ورقتين بدون إعادة من وجهة نظر مختلفة ، ألا وهى اختيار ورقة من المجموعة (ا) باليد اليمنى واختيار ورقة ثانية من مجموعة أخرى (ب ، حـ أو ى) باليد اليسرى . يمكننا أن نعتبر الورقة التى نسحبها من المجموعة (ا) على أنها تذكرة يانصيب، تعطينا الحق فى سحب ورقة أخرى من المجموعات ب ، حـ ، ى ، وتكون كل من هذه المجموعات ثابت . وعلى ذلك فسحب ورقة بسطونى من مجموعة ثم ورقة كوبه من نفس المجموعة ، بدون إعادة الورقة الأولى ، يكافئ فى الواقع حادثى اختيار مستقلين استقلالا حقيقيا

(١) اختيار ورقة بسطونى من ا

(٢) اختيار ورقة كوبه من ب .

وعلى ذلك يمكننا تطبيق قاعدة الضرب للحوادث المستقلة . فرصتا كل من (١) ، (٢) هما على الترتيب $\frac{١}{٨}$ ، $\frac{٣}{٧}$ وعلى ذلك ففرصة اختيار الورقتين معا هى $\frac{١}{٨} \times \frac{٣}{٧} = \frac{٣}{٥٦}$ من ذلك نستطيع أن نعين جميع احتمالات اختيار ورقتين :

بسطونى وبسطونى ٠	بسطونى وكوبه $\frac{٣}{٥٦}$	بسطونى ودينارى $\frac{٤}{٥٦}$
كوبه وبسطونى $\frac{٣}{٥٦}$	كوبه وكوبه $\frac{٦}{٥٦}$	كوبه ودينارى $\frac{١٢}{٥٦}$
دينارى وبسطونى $\frac{٤}{٥٦}$	دينارى وكوبه $\frac{١٢}{٥٦}$	دينارى ودينارى $\frac{١٢}{٥٦}$

ويمكننا أيضا أن ينوب النتيجة النهائية باستخدام قاعدة الجمع للاختيار المتبادل وقاعدة الطرح فى حالة وجود الشرط ، واحد على الأقل ، فمثلا

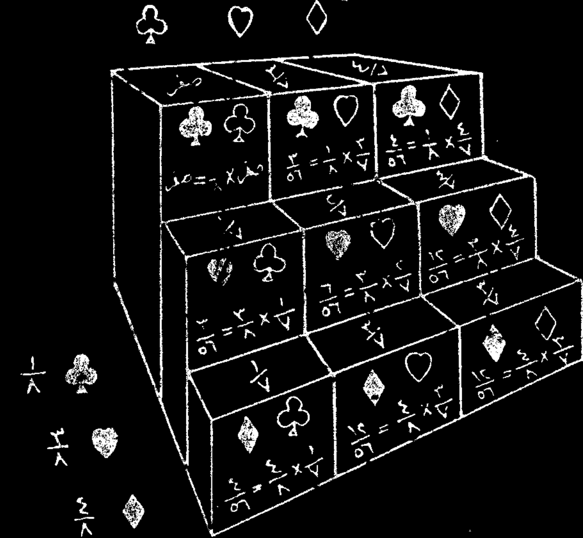
احتمال سحب ورقتين من نفس النوع ٠ + $\frac{٦}{٥٦}$ + $\frac{١٢}{٥٦}$ = $\frac{٩}{٢٨}$

احتمال سحب ورقتين مختلفى النوع ١ − $\frac{٩}{٢٨}$ = $\frac{١٩}{٢٨}$.

كما يمكننا أيضاً أن نفصل النتائج على أساس نوع الاختيار الثانى كما يأتى :

بسطونى $\frac{٣}{٥٦}$ + $\frac{٤}{٥٦}$ = $\frac{١}{٨}$

كوبه $\frac{٣}{٥٦}$ + $\frac{٦}{٥٦}$ + $\frac{١٢}{٥٦}$ = $\frac{٣}{٨}$



الاختيار المشترك

♣♣	♣♡ ♥♣	♣♢ ♦♣	♥♡	♥♢ ♦♡	♦♢
صفر/٥٦	٣+٣/٥٦	٤+٤/٥٦	٦/٥٦	٢٤/٥٦	١٢/٥٦
صفر	٣/٢٨	١/٧	٣/٢٨	٣/٧	٣/١٤ =

الاختيار الثانى

♣	♡	♢
صفر + ٣/٥٦ + ٤/٥٦	٣/٥٦ + ٦/٥٦ + ١٢/٥٦	٤/٥٦ + ١٢/٥٦ + ١٢/٥٦
١/٨	٣/٨	٤/٨ =

(شكل ١٩٦)

نموذج على هيئة سلم لاختيار مزدوج (بدون إعادة)

وباستخدام نموذج مثل الموجود فى شكل ١٩٦ . يمكننا أن نتجنب الخطأ باستمرار عند حساب الفرصة للاختيار المتتالى بدون إعادة ، ولكن يمكننا

أيضا الحصول على نفس النتائج باستخدام القانون العام الذى وجدناه . جميع التباديل الممكنة لورقتين من ثمانية أوراق هى :

$$ل^{ن}_{٢} = ٨^{(٢)} = ٨ \times ٧ = ٥٦$$

لتطبيق "القانون العام" يجب أن نتذكر أن س^(ن) = ٠ . عندما تكون ن > س .

فمثلا $٣^{(٤)} = ٣ (٣ - ١) (٣ - ٢) (٣ - ٣) = ٠ .$

بذلك نحصل على النتائج الآتية :

ورقتان بسطونى $\frac{ل_٢}{ل_٢ \; ل_٠ \; ل_٠} \; ١^{(٢)} \times ٣^{(٠)} \times ٤^{(٠)} \div ٥٦ = ٠$

ورقتان كوبه $\frac{ل_٢}{ل_٠ \; ل_٢ \; ل_٠} \; ١^{(٠)} ٣^{(٢)} ٤^{(٠)} \div ٥٦ = \frac{٦}{٥٦}$

ورقتان دينارى $\frac{ل_٢}{ل_٠ \; ل_٠ \; ل_٢} \; ١^{(٠)} ٣^{(٠)} ٤^{(٢)} \div ٥٦ = \frac{١٢}{٥٦}$

ورقة كوبا وورقة بسطونى أو العكس $\frac{ل_٢}{ل_١ \; ل_١ \; ل_٠} \; ١^{(١)} ٣^{(١)} \div ٥٦ = \frac{٦}{٥٦}$

ويمكن للقارىء أن يكمل هذه النتائج كتمرين مفيد ، ثم يستخدم كلا من القانون العام ، ونموذج السلم للحصول على فرصة سحب مزدوج بدون إعادة من نفس المجموعة فى كل من الحالات الآتية :

١ — ورقتان سباتى من مجموعة تتكون من ورقة كوبه وثلاث ورقات سباتى (الجواب ½)

٢ — ورقة سباتى وأخرى دينارى من مجموعة تتكون من ورقتين كوبه وثلاث ورقات سباتى وورقة واحدة دينارى (الجوات $\frac{١}{٥}$) .

٣ — ورقتان دينارى من مجموعة تتكون من ثلاثة أوراق كوبه وأربعة ورقات سباتى وورقتين دينارى وورقة بسطونى (الجواب $\frac{١}{٤٥}$)

٤ — ورقة كوبة وورقة سباتى من مجموعة تتكون من ورقة كوبه وورقتين سباتى وثلاث ورقات كوبه . (الجواب $\frac{٢}{١٥}$)

٥ — ورقتان بسطونى من مجموعة مكونة من ورقتين سباتى وثلاث ورقات دينارى وأربع ورقات بسطونى (الجواب $\frac{١}{٦}$)

٦ — ورقة حمراء وورقة سوداء من مجموعة مكونة من ورقتين كوبه وثلاث ورقات سباتى (الجواب $\frac{٣}{٥}$)

٧ — ورقتان لونهما أحمر من مجموعة مكونة من أربع ورقات بسطونى وثلاث ورقات كوبه وورقة واحدة دينارى (الجواب $\frac{٣}{١٥}$)

(٨) كارتان لونهما أسود من مجموعة مكونة من ورقتين سباتى وثلاثة بسطونى وأربعة ورقات كوبة (الجواب $\frac{٥}{١٨}$)

(٩) ورقة حمراء وأخرى سوداء من مجموعة مكونة من ورقة سباتى وورقة بسطونى وثلاثة ورقات دينارى (الجواب $\frac{٣}{٥}$)

(١٠) ورقة حمراء وأخرى سوداء من مجموعة مكونة من ورقتين بسطونى وخمسة ورقات دينارى (الجواب $\frac{٢}{٧}$)

التوزيع ذى الحدين :

إذا رمينا قطعة نقود مرتين ، فإنه يمكننا أن ينوب الاحتمالات المختلفة (شكل ١٩٢) كما يأتى :

النتيجة	ظهران	ظهر ووجه	وجهان
الفرصة	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٤}$

وإذا كنا نرصد النتيجة كالآتى :

١ للوجه ، صفر للظهر فإن الرصيد يكون كالآتى :

الرصيد	٠	١	٢
الفرصة	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٤}$

ويمكن استنتاج ذلك من شكل ١٩٢ إذا كان تصميم قطعة النقود يسمح بسريان قانون تساوى الفرصة ، وهذه النتيجة تتفق مع القواعد الأساسية الثلاث :

ظ ، ظ   ظ ، و   أو   و ، ظ   و ، و

$\frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢}$ $\frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} + \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢}$ $(\frac{١}{٢}) \times (\frac{١}{٢})$

نلاحظ هنا أن الاحتمالات الثلاث السابقة هى الحدود المتتالية فى مفكوك ذى الحدين $(\frac{١}{٢} + \frac{١}{٢})^{٢} = (\frac{١}{٢})^{٢} + ٢(\frac{١}{٢})^{٢} + (\frac{١}{٢})^{٢}$. وفى حالة رمى القطعة ثلاث مرات نحصل على نتيجة مشابهة :

الرصيد	٠	١	٢	٣
النتيجة	ظظظ	ظظو ، ظوظ ، وظظ	ظوو ، وظو ، ووظ	ووو
الفرصة	$(\frac{١}{٢})^{٣}$	$٣ \times (\frac{١}{٢})^{٣}$	$٣ \times (\frac{١}{٢})^{٣}$	$(\frac{١}{٢})^{٣}$

مرة أخرى نحصل على الحدود المتتالية فى مفكوك ذى الحدين $(\frac{١}{٢} + \frac{١}{٢})^{٣}$ والتطبيق المثالى للطريقة المعطاة فى شكل ١٩٧ يبين قانونا عاما لحالة اختيار عينة بدون إعادة . إذا كان رصيد نتائج النجاح فى محاولات عددها ى هو ، ١ ، ٢ ، .. ، ى ورمزنا إلى احتمال النجاح فى محاولة واحدة بالرمز و ولاحتمال الفشل بالرمز ك = (١ — و) فإن احتمالات الحصول على نقط عددها ٠ ، ١ ، ٢ ، .. ، ى هى الحدود المتتالية فى مفكوك ذى الحدين

$(ق + ك)^{ن}$ ، أى أن :

عددمرات النجاح	٠	١	٢	.... الخ
الفرصة	$ك^{ن}$	$ن ك^{ن-١} و$	$\frac{ن(ن-١)}{١٢} ك^{ن-٢} و^{٢}$	.... الخ

	$\frac{1}{4}$ ♥	$\frac{3}{4}$ ♣♦♠
$\frac{1}{4}$ ♥	♥♥ $(\frac{1}{4})^{2}$	♥• $(\frac{1}{4})(\frac{3}{4})$
$\frac{3}{4}$ ♣♦♠	♥• $(\frac{1}{4})(\frac{3}{4})$	•• $(\frac{3}{4})^{2}$
المجموع	♥♥ $(\frac{1}{4})^{2}$	♥• $2(\frac{1}{4})(\frac{3}{4})$ · •• $(\frac{3}{4})^{2}$

	♥♥	♥•	••
$\frac{1}{4}$ ♥	♥♥♥ $(\frac{1}{4})^{3}$	♥♥• $2(\frac{3}{4})(\frac{1}{4})^{2}$	♥•• $(\frac{1}{4})(\frac{3}{4})^{2}$
$\frac{3}{4}$ ♣♦♠	♥♥• $(\frac{3}{4})(\frac{1}{4})^{2}$	♥•• $2(\frac{3}{4})^{2}(\frac{1}{4})$	••• $(\frac{3}{4})^{3}$

المجموع: ♥♥♥ $(\frac{1}{4})^{3}$ ، ♥♥• $3(\frac{1}{4})^{2}(\frac{3}{4})$ ، ♥•• $3(\frac{1}{4})(\frac{3}{4})^{2}$ ، ••• $(\frac{3}{4})^{3}$

	♥♥♥	♥♥•	♥••	•••
$\frac{1}{4}$ ♥	♥♥♥♥ $(\frac{1}{4})^{4}$	♥♥♥• $3(\frac{1}{4})^{3}(\frac{3}{4})$	♥♥•• $3(\frac{3}{4})^{2}(\frac{1}{4})^{2}$	♥••• $(\frac{1}{4})(\frac{3}{4})^{3}$
$\frac{3}{4}$ ♣♦♠	♥♥♥• $(\frac{1}{4})^{3}(\frac{3}{4})$	♥♥•• $3(\frac{1}{4})^{2}(\frac{3}{4})^{2}$	♥••• $3(\frac{1}{4})(\frac{3}{4})^{3}$	•••• $(\frac{3}{4})^{4}$

المجموع: ♥♥♥♥ $(\frac{1}{4})^{4}$ ، ♥♥♥• $4(\frac{1}{4})^{3}(\frac{3}{4})$ ، ♥♥•• $6(\frac{1}{4})^{2}(\frac{3}{4})^{2}$ ، ♥••• $4(\frac{1}{4})(\frac{3}{4})^{3}$ ، •••• $(\frac{3}{4})^{4}$

شكل (١٩١)

استبدال التوزيع بمعاملات مفكوك ذى الحدين

كان يمكننا الحصول على هذه النتيجة مباشرة وذلك باستخدام القانون العام
نفرض أن لدينا مجموعة من ورق اللعب عددها ن ، منها ل (نجاحات) من نفس

النوع ، م = (ن − ل) من نوع آخر ، وعلى ذلك يكون التبويب تاما إذا
إذا سمح بالإعادة ؛ فإن عدد التنظيمات الممكنة لأوراق عددها ر هو $ل_{ر}^{ن} = ن^{ر}$
وعلى ذلك فعدد العينات الرائية التى تحتوى على مرات نجاح عددها س ،
ومرات فشل عددها (ر − س) هو

$$\frac{ر!}{س!\,(ر-س)!}\; ل^{س}\; م^{ر-س}$$

وتكون نسبة عدد هذه العينات إلى عدد جميع العينات الرائية الممكنة هى :

$$\frac{ر!}{س!\,(ر-س)!}\;\frac{ل^{س}\; م^{ر-س}}{ن^{ر}} = \frac{ر!}{س!\,(ر-س)!}\left(\frac{ل}{ن}\right)^{س}\left(\frac{م}{ن}\right)^{ر-س}$$

فى هذه العبارة $\left(\frac{ل}{ن}\right)$ هى النسبة (و) للأوراق التى يعتبر كل منها
نجاح ، $\left(\frac{م}{ن}\right)$ هى النسبة (ك) للاوراق التى يعتبر كل منها فشل ، وذلك لأن
احتمال النجاح فى محاولة واحدة هو $\left(\frac{ل}{ن}\right)$ وعلى ذلك ففرصة النجاح مرات
عددها س هى :

$$\frac{ر!}{س!\,(ر-س)!}\; ك^{ر-س}\; و^{س}$$

ولكننا نعلم فعلا (الباب السابع) أن هـــذا هو الحد الذى رتبته س فى
الفكوك $(ك + و)^{ر}$ عندما تكون رتبة الحد الأول هى الصفر . يبين شكل
١٩٨ أنه يوجد قانون مشابه بحكم اختيار الصفات مع السماح بالإعادة ، وهو
أيضا يوضح القاعدة المسماه نظرية فاندرموند أو وهى :

$$(\text{م} + \text{ل})^{(٢)} = (\text{م} + \text{ل})(\text{م} + \text{ل} - ١)$$

$$= \text{م}(\text{م} - ١) + ٢\,\text{م}\,\text{ل} + \text{ل}(\text{ل} - ١)$$

$$= \text{م}^{(٢)} + ٢\,\text{م}^{(١)}\,\text{ل}^{(١)} + \text{ل}^{(٢)}$$

فى حالة عدم الإعادة يمكن تلخيص قانون التوزيع الثنائى فى المفكوك $(\text{م} + \text{ل}) \div \text{ن}^{(\text{ر})}$ ، وعلى ذلك تكون فرصة النجاح س من المرات شكل (١٩٨)

هى $\dfrac{\text{ر}!}{\text{س}!\,(\text{ر} - \text{س})!} \cdot \dfrac{\text{م}^{(\text{ر} - \text{س})}\,\text{ل}^{(\text{س})}}{\text{ن}^{(\text{ر})}}$

ولفرض التمرين ، يمكن للقارئ أن يحاول حل المسائل الآتية : ما هى فرصة ما يأتى فى حالة السماح بالإعادة (إذا أمكن) وبدون إعادة ؟

(١) الحصول على ٠ ، ٣ أو ٥ أوراق حمراء فى سحب آنى واحد من كل من سبعة مجموعات كاملة من ورق اللعب ؟

(الجواب $\dfrac{١}{١٢٨}$ ، $\dfrac{٣٥}{١٢٨}$ ، $\dfrac{٢١}{١٢٨}$)

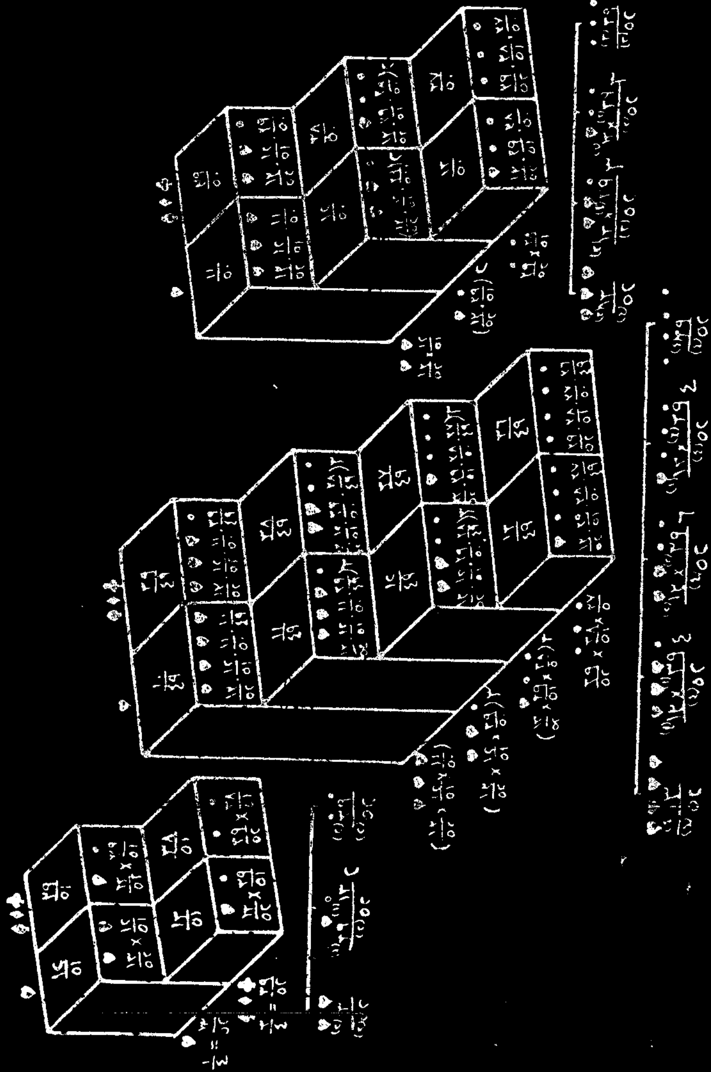
(٢) الحصول على ١ ، ٢ ، ٤ أوراق مصورة فى سحب آنى من كل من خمسة مجموعات كاملة من ورق اللعب ؟

(الجواب $\dfrac{١٥٠٠٠٠}{٣٧١٢٩٣}$ ، $\dfrac{٩٠٠٠٠}{٣٧١٢٩٣}$ ، $\dfrac{٤٠٥٠}{٣٧١٢٩٣}$)

(٣) الحصول على ٨ ، ١٠ أو ١٢ ورقة مصورة فى سحب آنى من كل من إثنى عشر مجموعة كاملة من ورق اللعب ؟

(٤) الحصول على عدد فردى من الأوراق الملكية فى سحب آنى من كل من ست مجموعات كاملة من ورق اللعب ؟ (الجواب $\dfrac{٢٣٥٤٥٨٠}{٤٨٢٦٨٠٩}$)

(٥) الحصول على عدد زوجى من الآسات فى سحب آنى من كل من



(شكل ١٩٨) توزيع فى الحالتين بدون إعادة

ست مجموعات كاملة من ورق اللعب ؟ (الجواب $\frac{٣١٣٢٠١}{٤٨٢٦٨٠٩}$)

(٦) الحصول على ورقة كوبة ، ورقتين سباتى وورقة بسطونى وثلاثة أوراق دينارى بالسحب سبع مرات من مجموعة ورق لعب كاملة بشرط أن تعادكل ورقة مسحوبة قبل سحب غيرها ؟ (الجواب $\frac{٤٢٠}{١٦٣٨٤}$)

(٧) الحصول على كرتين حمراوتين وأربعة كرات سوداء فى سحب آنى من ست سلال كل منها يحتوى على كرة حمراء وكرتين صفراوتين وثلاث كرات خضراء وأربعة كرات زرقاء وخمسة كرات سوداء ؟
(الجواب $\frac{١}{١٦١٥}$)

(٨) الحصول على كرتين صفراوتين وكرة زرقاء وأخرى سوداء بالسحب أربع مرات من إحدى السلال فى تمرين ٧ على شرط إعادة كل كرة مسحوبة إلى السلة قبل سحب غيرها ؟ (الجواب $\frac{٦٤}{٣٣٧٥}$)

(٩) الحصول على ثلاث كرات حمراء وأربعة خضراء وواحدة زرقاء بالسحب ثمانية مرات ؟ (الجواب $\frac{٢٢٤}{٦٣٢٨١٢٥}$)

(١٠) الحصول على كرتين حمراوتين وثلاث كرات خضراء وخمسة كرات زرقاء بالسحب عشرة مرات ؟

الاحتمال : عملياً ورياضياً

الاحتمال الرياضى ، وهو الموضوع الذى درسناه حتى الآن هو الإمكان النسبى ، والتعريف الذى يعطيه عالم الرياضة لما هو محتمل لا يتعلق إلا بما قد يحدث ، ولا يمكن تطبيقه للعمليات الحسابية ذات القيمة العملية إلا عندما يكون تكرار الحادث فى الحياة العملية يقارب تكراره فى المسألة المدروسة . وعند إجراء التجارب الفعلية بمجموعات ورق اللعب نجد أن الحصول على توافيق معينة من المجموعة بعد قطعها وبدون أن نعلم أين تقع الأوراق المختلفة ، يتكرر عدد من المرات يتفق لدرجة كبيرة ، ولكن ليس تماماً ، مع الفرص

الرياضية لمثل هذه التوافيق عندما يكون عدد المحاولات كبيراً جداً . وفيما يلى جدول يبين نتيجة تجربة أجريب فى معمل دراسى .فى هذه التجربة يسحب كل طالب على حده ورقة واحدة من مجموعة كاملة عشرة مرات متتالية مع إعادة كل ورقة مسحوبة قبل سحب غيرها ، وعدد الطلبة عشره . والجدل يبين نتيجة المحاولات العشرة الأولى فالمحاولات العشرين الأولى وهكذا :

عدد المحاولات	أحمر	أسود	نسبة الأوراق الحمراء
١٠	٤	٦	٤٠,
٢٠	٩	١١	٤٥,
٣٠	١٤	١٦	٤٦,٧
٤٠	١٩	٢١	٤٧,٥
٥٠	٢٧	٢٣	٥٤,٠
٦٠	٣٢	٢٨	٥٣,٣
٧٠	٣٧	٣٣	٦٢,٩
٨٠	٤٣	٣٧	٥٣,٧٥
٩٠	٤٨	٤٢	٥٣,٣
١٠٠	٥١	٤٩	٥١,٠٠

نسبة كون الورقة المسحوبة حمراء قريبة من النسبة ٥٠ ٪ أو $\frac{1}{2}$ ، وهى فى بعض الأحيان أكبر بقليل وفى أحيان أخرى أصغر بقليل من هذه القيمة ، وهى فى أسفل الجدول أقرب ما يمكن لهذه القيمة ، أى أنها تكون أقرب ما يمكن منها عند ما تكون المجال أكبر ما يمكن ، أى أنه فى عدد كبير من المحاولات يقترب التكرار النسبى لاختيار ورقة معينة من الإمكان النسبى $\frac{1}{2}$ وعند ما يكون مثل هذا التناظر موجوداً ، نقول أن الاختيار عشوائى ، بمعنى أنه يحقق قانون تساوى الفرصة ، ولكن أى حسابات نجريها خاصة بحوادث فعلية مطبقين فى ذلك قانون تساوى الفرصة لا تكون صحيحة إلا على طول الزمن .

وفيما يلي مثال بسيط يبين الارتباط بين النظرية والمسائل العملية . النسبة بين عدد المواليد الذكور والاناث تكاد تكون الوحدة ، أى أن التكرار النسبي على طول الزمن لميلاد طفل ذكر يكاد يساوى ½ والتجربة تبين أن جنس المولود لا يتأثر كثيراً بجنس المولود السابق أى أنه يمكننا أن نقول أن المواليد الذكور والأناث يصلون إلى هـذه الدنيا بطريقة مشابهة للأوراق الحمراء والسوداء والمسحوبة من مجموعات ورق مفنطة تفنيطا جيداً عند سحب ورقة واحدة من كل مجموعة على التوالى . إذا كان هذا التناظر صحيحاً فإن السؤال ، مجموعة أسر لكل منها خمسة أطفال ، ما هو تكرار كون ثلاثة منهم ذكور ؟ يكافئ السؤال : ما هو الاحتمال الرياضى للحصول على ثلاثة أوراق حمراء بالسحب خمسة مرات من مجموعة ورق بشرط اعادة كل ورقة قبل سحب غيرها ؟ . قانون ذى الحدين للتوزيع يعطينا الجواب

$$\frac{\lfloor ٥}{\lfloor ٣ \; \lfloor ٢} \left(\frac{١}{٢}\right)^{٣} \left(\frac{١}{٢}\right)^{٢} = \frac{\lfloor ٥}{\lfloor ٣ \; \lfloor ٢} \div \frac{١}{٣٢} = \frac{٥}{١٦}$$

وباستخدام قاعدة الطرح يكون احتمال عدم الحصول على ثلاثة أوراق حمراء فى مثل هذه المحاولة هو $١ - \frac{٥}{١٦} = \frac{١١}{١٦}$. وعلى ذلك فاحتمال وجود ثلاثة أطفال ذكور من بين خمسة أطفال إلى عدمه هو ٥ : ١١ . إذا لم تكن نسبة ميلاد الذكور إلى ميلاد الأناث هى ١ : ١ لما أمكن استخدام مجموعة الورق كنموذج . نفرض أن هذه النسبة كانت ٣ : ٤ النموذج المناسب فى هذه الحالة هو أخذ عينات من مجموعة مكونة من ثلاثة أوراق كوبة وأربعة سباتى ، ويكون احتمال وجود ثلاثة أطفال ذكور فى أسرة لها خمسة أطفال هو

$$\frac{\lfloor ٥}{\lfloor ٣ \times \lfloor ٢} \left(\frac{٣}{٧}\right)^{٣} \times \left(\frac{٤}{٧}\right)^{٢} = \frac{٤٣٢٠}{١٦٨٠٧}$$

يمكننا الآن أن نرى كيف يمكن لصاحب نادى الميسر أن ينظم عملياته بحيث يرضى نسبة كبيرة من عملائه بينما يضمن لنفسه ربحا ثابتاً . فإذا هو راهن

على أن يحصل على الأقل على ثلاثة أوجه فى ستة رميات ، فإن نسبة احتمال كسبه إلى عدمه هى ٣١ : ١١ .

فإذا كان لديه رأس مال كاف ليجعله يستمر فى الرهان مدة كافية فمعنى ذلك أنه ينجح فى حوالى ⅔ المراهنات بينما ينجح عملاؤه فى ⅓ المراهنات . وعلى ذلك فالرجل الذى يحاول أن يكسب معاشه من المراهنات ، مثل مراهنات التأمين التى كان يقوم بها برولو انتورب فى القرن السادس عشر ، يتمكن مثل هذا الرجل من كسب معاشه إذا كان لديه رأس مال كاف فى البداية وإذا حسب المخاطرة على طول الزمن حسابا صحيحاً . إذا كانت نسبة المواليد الذكور إلى المواليد الأناث هى الواحد الصحيح فإننا نتبين أن عدداً كبيراً من المراهنات مثل التى كان يجريها برناردو ودومنيجو تعنى ربحاً قدره ٢٤ جنيهاً عن كل خسارة مقدارها ٣٠ جنيها ، أو ربحا صافيا قدره ٦٠ ٪ . ويتضح أيضاً أنه إذا كان احتمال ميلاد طفل ذكر هو ½ فإن احتمال خسارة رجل رأس ماله ٦٠ جنيها أكبر بكثير من احتمال خسارة رجل رأس ماله ٣٠٠ جنيهاً . وذلك لأن الرجل الأول يمكنه أن يراهن مرتين فقط واحتمال أن كلا المولودين سيكون أنثى هو ¼ . أى أنه من بين عدد كبير من الرجال الذين يملك كل منهم ٦٠ جنيهاً ويراهنون بها سيفقد ربعهم رأس ماله جميعه . أما إذا كان رأس المال ٣٠٠ جنيهاً فمن الممكن المراهنة عشرة مرات . نسبة احتمال كون الأطفال أناثاً إلى عدمه هى ١ : ١٠٢٣ . وعلى ذلك فمن بين عدد كبير من الرجال الذين يملك كل منهم ٣٠٠ جنيهاً ، أقل من الواحد فى الألف سيفقد جميع رأس ماله قبل أن يربح رهاناً واحداً برأس مال كبير يمكن الرجل أن يدخل بنفس شروط برناردو ودومنيجو فى عمليات تحتاج تغطيتها إلى مال أكبر من رأس ماله دون أن يخشى الإفلاس . وعلى ذلك فمثل رأس المال هذا (الكبير) يستمر فى النمو بينما تتلاشى رؤوس الأموال الصغيرة التى تدخل فى مثل هذه العمليات ، أو على الأقل تبعد مكاناً على سلم يعقوب . وبمجرد

أن يحصل الرجل على رأس مال يكفى لحمايته من أى احتمال جدى للافلاس يصبح فى إمكانه إخراج منافسيه الصغار من التعامل وذلك بمنح شروط أفضل للعملاء.

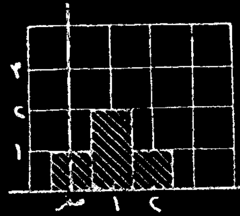
النسبة الفعلية للمواليد الذكور إلى المواليد الاناث أكبر قليلا من الوحدة. وعلى ذلك فهى تُمثل باحتمال نظرى يناظر عملية سحب كرات من سلة عدد الكرات الحمراء الموجودة بها أكبر بقليل من نصف العدد الكلى. تعرض أن نسبة المواليد الذكور إلى عدد المواليد الكلى بالنسبة لجميع السكان هى ٥١ ٪. فى هذه الحال يمكن للضارب أن يمنح عميله ربحاً قدره مائة فى المائة فى حالة عدم توفيقه ومع ذلك يضمن لنفسه ربحاً ٢٪ على طول الزمن. ولا يتوقف نجاحه إلا على إمكانه الحصول على رأس المطلوب. وعلى ذلك فالنجاح فى الرهان يتوقف على المبدأ: «من عنده يعطى ويزاد ومن ليس عنده يؤخذ منه ولو كان القليل الذى يملكه». ولقد حصل الرأسماليون على ثرواتهم الضخمة على أساس هذا المبدأ بينما كان النبلاء يخسرون ثرواتهم نتيجة لعدم فهمهم الارتباط بين الاحتمال وبين حدوث ظاهرة من الظواهر، كان معاصروهم الأكثر حنكة قد تبينوا وجود طريق أكثر ضماناً للربح من طريق الإعتماد على الحظ وحده. ومن السهل أن نفهم كيف أن مراسلات باسكال وفرمات قد أثارت الاهتمام فى مجال أعم بكثير من منضدة اللعب إذا تبينا أن التجار الأغنياء كانوا فى هذه الفترة يبحثون عن ميادين جديدة للربح.

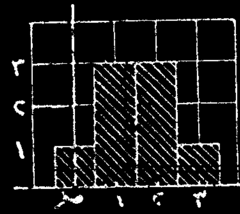
نسبة النجاح فى الرهان والمساحة :

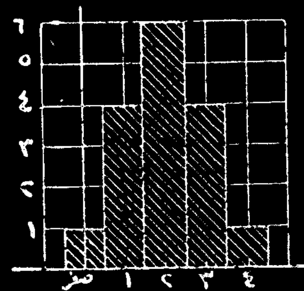
إن الفقرات الثلاث الأخيرة لتقصر عن بيان ما يمكن لعلم الرياضة أن يؤديه لحل المسائل الهامة المعاصرة، ولكنها على الأقل تبين لقراء كتاب «الرياضة للمليون» أن تعريف الرياضيين للاحتمال له علاقة بما تعنيه هذه الكلمة فى الحياة العامة. وعلى ذلك سنتريث هنا قليلا ونحاول أن نحصل على

فوائد الاحتمال الرياضى فى صورة مبسطة، وسيكون ذلك باستخدام الوسيلة القديمة ألا وهى لغة الصور.

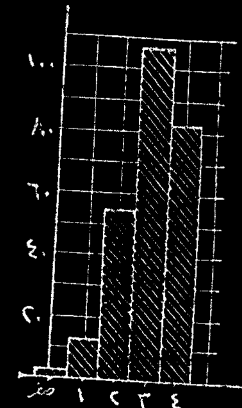
نحن نمثل نمو شىء يمكن قياسه بمنحنى وذلك بفرض أن هذا الشىء ينمو بدون أن يقفز فى نموه قفزات فجائية. يهتم عالم الاحصاء بالأعداد الصحيحة. والأعداد الصحيحة فى نموها لا تزداد بهذه الطريقة. ولسبب سيتضح لنا أكثر فيما بعد، سيكون من الأنسب تمثيل دوال الاعداد الصحيحة بطريقة أخرى تسمى الهستوجرام. والهستوجرام هو صورة وهمية لا تحتاج فى الحقيقة إلى إيضاح بالاشكال ١٩٩ -- ٢٠٣. هذه الاشكال تبين كيف أن ($ص_{س}$) احتمال النجاح مرات عددها ٠، ١، ٢، ..... الخ يتوقف على (س) عدد مرات النجاح نفسه. ونحن نمثل $ص_{س}$، قيمة معينة من قيم ص تناظر قيمة معينة من قيم س، نمثلها بارتفاع عمود قاعدته على محور السينات ومنتصفها هو النقطة س. وهذه الطريقة وهمية من وجهة نظر أن $ص_{س}$ ليس لها قيمة بين س (ثلاثة رميات مثلا)، (س + ١) (أربعة رميات) أو (س — ١) (رميتان) ولكن لها فوائد كما سترى فيما بعد.



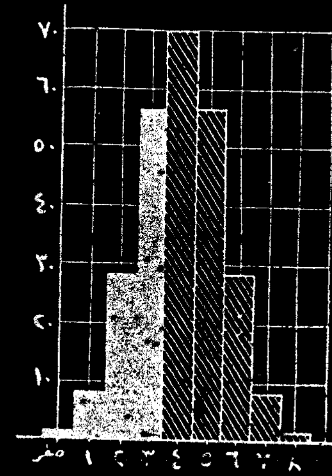




(شكل ١٩٩)



شكل (٢٠٠)



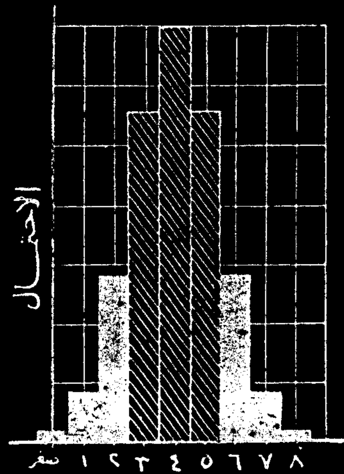
(شكل ٢٠١)

حيث أن منتصف كل عمود هو س ، فإن نهاية كل عمود هى $\text{س} + \frac{1}{2}$ ، وحيث أن الفرق بين أى قيمتين متتاليتين للمتغير س هى ١ ، فإن العرض $\Delta\text{س}$ للعمود يساوى الوحدة أيضا . أى أن $\text{ص}_{\text{س}}\,\Delta\text{س} = \text{ص}_{\text{س}}$. فرصة الحصول على قيمة أو أخرى من قيم س هى الوحدة وذلك يتفق مع قاعدتى الجمع والطرح . وإذا كان عدد عناصر العينة ر ، فإنه بناء على ذلك يمكننا أن نكتب مجموع قيم مرات النجاح التى تزداد من صفر إلى ر بخطوات كل منها يساوى الواحدة على الصورة

$$\sum_{\text{س}=0}^{\text{س}=\text{ر}} \text{ص}_{\text{ر}} = 1 = \sum_{\text{س}=0}^{\text{س}=\text{ر}} \text{ص}_{\text{س}}\,.\,\Delta\text{س}$$

وإذا كان المجـــال كبيراً نوعا فإن المنحنى الأملس الذى يمر بمنتصفات الأضلاع العليا لأعمدة الهستوجرام الخاص بالتوزيع ذى الحدين (كما فى شكل ٢٠٣) يكون له شكل مميز . ونحن نطلق على هذا المنحنى إسم المنحنى الاعتيادى عندما تكون ر كبيرة كبراً لا نهائياً . ومن الواضح أنه فى هذه

الحالة لا تختلف المساحة تحت المنحنى عن مساحة الهستوجرام إلا إختلافاً طفيفاً ، وذلك لأن المثلثات التى نضيفها تكاد تساوى المثلثات التى نهملها .



(شكل ٢٠٢)

يبدو لأول وهلة أنه لا توجد فائدة جديدة فى ذلك ، ولكن قاعدة الجمع تعطينا دليلا جديداً نتبعه . فرصة النجاح مرات عددها س هى $\text{ص}_{\text{س}}$ ، $\text{ص}_{\text{س}} = \text{ص}_{\text{س}}\,\Delta\text{س}$ ، وذلك لأن $\Delta\text{س} = 1$. وعلى ذلك ففرصة النجاح (س + ١) من المرات [هـ (س + ١)] هى :

$$\text{ص}_{\text{س}-1} + \text{ص}_{\text{س}} + \text{ص}_{\text{س}+1} = \text{ص}_{\text{س}-1}\,\Delta\text{س}$$

$$+\ \text{ص}_{\text{س}}\,\Delta\text{س} + \text{ص}_{\text{س}+1}\,\Delta\text{س}$$

$$\text{هـ}(\text{س}+1) = \sum_{\text{ر}=\text{س}-1}^{\text{س}+1} \text{ص}_{\text{ر}}\,\Delta\text{س}\,.$$

وللاختصار يمكننا أن نكتب فرصة النجاح (س + ١) من المرات على الصورة

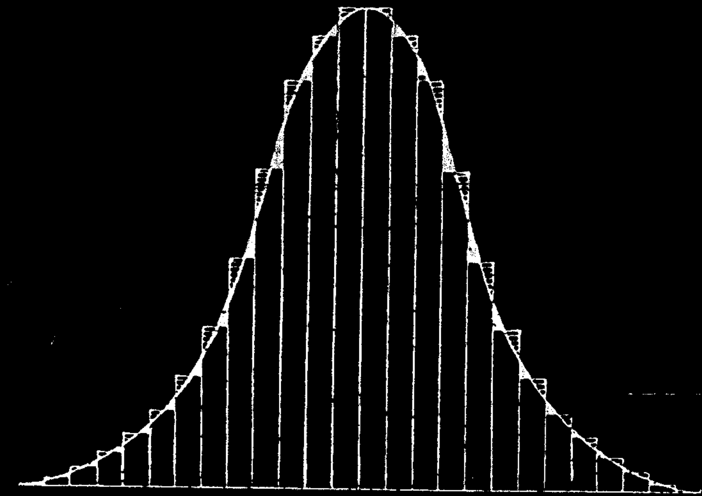
$$\text{هـ}(\text{ا}) = \sum_{\text{ر} = \text{س} - 1}^{\text{س} + 1} \text{ص}_{\text{ر}} \, \Delta \, \text{س} \, .$$

إذا كانت ر كبيرة جداً ، يمكننا أن نقرب التقريب الآتى

$$\text{هـ}(\text{ا}) = \int_{\text{س} - 1}^{\text{س} + 1} \text{ص}_{\text{ر}} \, \text{ء}\,\text{س}$$

أما إذا لم تكن ر كبيرة بهذه الدرجة فيجب علينا أن نلاحظ أن المنحنى يمر بالنقطة المتوسطة ، ويمكن للطالب أن يختبر صحة ذلك برسم منحنى مثل الموجود فى شكل ٢٠٣ . ولن نكون بعيدين كثيراً عن الصواب إذا كتبنا

$$\text{هـ}(\text{ا}) = \int_{\text{س} + 1 + \frac{1}{2}}^{\text{س} + 1 - \frac{1}{2}} \text{ص}_{\text{ر}} \, \text{ء}\,\text{س}$$



شكل (٢٠٣)

لا تظهر علاقة الاحتمال الرياضى بالحياة العملية إلا على طول الزمن .

وهى تؤدى بنا إلى نتائج تكون أهميتها على حسب كبر العينة التى ندرسها . إن حساب النسبة بين فرصة النجاح وفشله باستخدام قانون التوزيع ذى الحدين أو أى مكون مشابه لعمل شاق للغاية إذا كانت الأعداد المستخدمة كبيرة . أما عملية عمل جداول لقيم تكامل بين الحدين س ± ا فإنها تكون فى العادة عملية سهلة إذا أمكن التعبير عن $\text{ص}_{\text{ر}}$ ، فرصة النجاح س من المرات ، فى صورة يمكن تكاملها أو إذا أمكن إيجاد عبارة فى $\text{ص}_{\text{س}}$ يمكن تكاملها وتساوى ص تقريباً . فمثلا فى حالة التوزيع ذى الحدين لرصيد يزداد بخطوات كل منها يساوى الوحدة ، العبارة المضبوطة لنعينة الرائية هى

$$\text{ص}_{\text{س}} = \frac{\text{ن}!}{\text{س}!\,(\text{ن} - \text{س})!} \, \text{ل}^{\text{س}} \, \text{ك}^{\text{ن} - \text{س}}$$

المنحنى الاعتيادى المناظر الذى يصف هذه الحالة بدقة كبيرة عندما $\text{ل} = \frac{1}{2}$ ، $\text{ن} = 16$ ، أو على العموم عندما $\text{ن}\,\text{ل} > 8$ هو

$$\text{ص} = \frac{1}{\sqrt{2\,\text{ط}\,\text{ن}\,\text{ل}\,\text{ك}}} \, \text{هـ}^{-\frac{(\text{س} - \text{ن}\,\text{ل})^2}{2\,\text{ن}\,\text{ل}\,\text{ك}}}$$

وكيفية ايجاد مثل هذا المنحنى المناسب هى إحدى المسائل التى تهتم بها نظرية الاحصاء ، ولا يمكننا فى هذا المجال الضيق أن ندرس هذه المسألة الدراسة الوافية التى تستحقها . وكل ما يمكننا القيام به فى هذا الباب هو اثارة شهية القارئ لدراسة أعم من هذه وأن نبين له المسائل التى تقع فى مجال الاحصاء الرياضى .

تبسيط نظرية مندل :

قد يكون القارئ ، مثله فى ذلك مثل المؤلف ، قد نشأ نشأة دينية . فى هذه الحالة قد يقول القارئ (أو القارئة) : كل ما تعلمناه عن الاحتمال الرياضى هو كيفية المقامرة ولكننا لا نريد أن نقامر . وهو تعليق عادل . سنفترض

أيضاً أن القارئ قد قرأ كتاب المؤلف « العلم للمواطن » وبذلك يكون قد وصل إلى علمه كيف أن علم الوراثة قد ساعد على زيادة انتاج القمح والذرة والطباق والسكر فى العالم . فى هذه الحالة سيعلم القارئ أن علم الوراثة يفيد فى تنظيم موارد العالم لخدمة المطالب البشرية العامة ، ولن ينقاد إلى تصديق أن نظرية الجينات لمندل تؤدى بنا إلى عدم الاستمتاع بالاصغاء إلى المغنى الزنجى بول رويسون فى « مسرح امريكا » .

بدأت نظرية الجينات لمندل باكتشاف أن النباتات الهجينة من أبوين نقيين تماما ومن نوعين مختلفين تكون النسبة بين النوعين فى سلالتها نسبة عددية محددة . وقد أدى هذا إلى الاعتقاد بأن التكوين الوراثى للفرد يتوقف على جسيمات مفردة (الجينات) مثل جزيئات الغاز . فى نظرية الحركة نفترض أن سرعة الجزيئات المختلفة تتغير كما فى توزيع ذى حدين . فى نظرية الجين نفترض أن فرصة إخصاب بويضة معينة من بويضات الأم بخلية ذكرية من الأب هى نفس فرصة سحب كرة من كرات ملونة موجودة فى [illegible]لة .

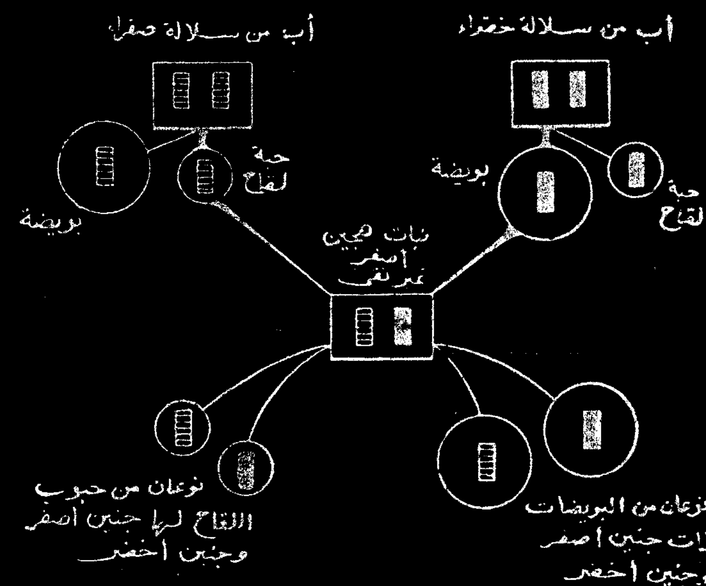
وتبين لنا إحدى تجارب مندل الأولى استخدام الاحتمال فى وضع أسس نظرية الجين . هجن مندل أنواعاً نقية (من سلالة واحدة) من الباذلاء . النوع الأول بذرته صفراء والثانى بذرته خضراء فوجد أن بذرة النبات الهجين صفراء . وعندما خصبت هذه النباتات الهجينة بنفس حبوب لقاحها ، وجد أن ربع سلالتها كانت بذرته خضراء ، كما وجد أن سلالته ، (أى سلالة هذا الربع) عندما خصب بحبوب لقاحه كانت ذات بذرة خضراء . أما الباقى فكانت بذرته صفراء . وثلث هذا الباقى ، أى ربع السلالة الكلية ، كانت سلالته ذات بذرة صفراء عندما خصب بنفس حبوب لقاحه مشابها فى ذلك النباتين الجدين ذوا البذرة الصفراء . أما السلالة الباقيه ذات البذرة الصفراء ، فعند أخصابها بنفس حبوب لقاحها ، وجد أن سلالتها تحتوى على نباتات صفراء وخضراء بنسبة ٣:١ مثل سلالة والديها . وعلى ذلك فالتهجين بين الأنواع النقية يتميز بالصفتين الهامتين اللتين يتميز بهما التفاعل الكيميائى واللتين أدتا للنظرية الذرية للاتحاد الكيميائى . الصفة الأولى هى

أنه يمكن الحصول على مميزات الوالدين الأصليين للنبات الهجين مرة أخرى بنفس النقاء . والصفة الثانية هى أن التركيبات المختلفة لصفات الوراثة تحدث بنسب عددية ثابتة . الجدول الآتى يبين نتائج العلماء الذين قاموا بإجراء نفس التجارب على نفس أنواع الباذلاء فى الدول المختلفة وفى مناسبات مختلفة .

(ا) الباحث	(ب) التاريخ	(ح) سلالة النباتات الهجينة ذات البذرة الصفراء عند اخصابها بنفس حبوب لقاحها		
		النسبة المئوية للأصفر	النسبة المئوية للأخضر	الأعداد الكلية
مندل	١٨٦٥	٧٥,٠٥	٢٤,٩٥	٨٠٢٣
كورنز	١٩٠٠	٧٥,٤٧	٢٤,٥٣	١٨٤٧
تشرماك	١٩٠٠	٧٥,٠٥	٢٤,٩٥	٤٧٧٠
هرست	١٩٠٤	٧٤,٦٤	٢٥,٣٦	١٧٥٥
باتسون	١٩٠٥	٧٥,٣٠	٢٤,٧٠	١٥٨٠٦
لوك	١٩٠٥	٧٣,٦٧	٢٦,٣٣	١٩٥٢
داربشير	١٩٠٩	٧٥,٠٩	٢٤,٩١	١٤٥٢٤٦

النتائج التجريبية لمثل هذا التهجين تؤدى إلى استنتاجين . لون البذرة يتوقف على شىء ما يحصل عليه كل نبات من كل من أبويه . فى حالة الباذلاء ذات البذرة الخضراء إما أن تكون بذرة كل من الأبوين خضراء أو أن يكون كل من الأبوين ناتج من سلالة أبوين بذرة كل منهما خضراء . وعلى ذلك فهذا الشىء الذى عليه النبات الهجين من أبيه الأخضر يجعل بذرته خضر . إذا هو حصل عليه من كل من أبويه سنسمى هذا الشىء « جينا » . إذا افترضنا وجود جسيمات تتوقف عليها النسبة العددية للنباتات الهجينة ، مثل الفرض بوجود جسيمات تتوقف عليها قوانين الاتحاد الكيميائى ، فإنه يكفينا لتفسير النتائج المتعددة لتجارب الوراثة المختلفة أن نفترض فرضين بسيطين : الأول هو أن نوع الجين التى تحويه البويضة لا يؤثر على فرصة أخصابها بحبة لقاح

ذات جين من نوع أو آخر . والفرض الثانى هو أنه عندما يكون النبات بويضات أو حبات لقاح فإن كل بويضة أو حبة لقاح تحتوى على جين واحد من أحد النوعين . النبات الهجين الأصفر فى هذه التجربة يحصل الأب الأصفر على جين واحد نسميه الجين الأصفر والجين الآخر وهو الجين الأخضر



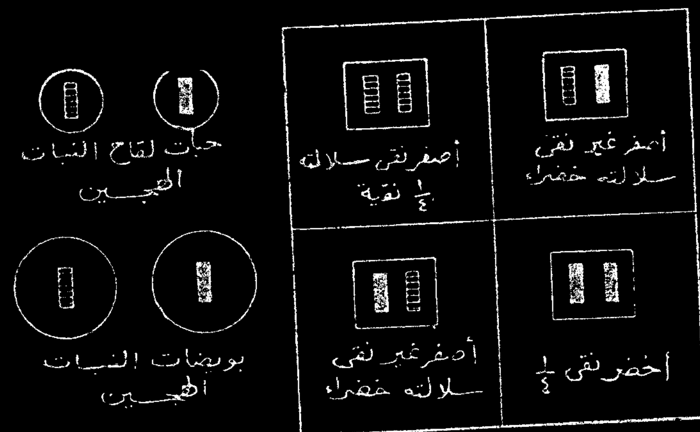
شكل (٢٠٤)

رسم يوضح الجينات التى تؤثر على لون بذرة البازلا.

يأتى من الأب الأخضر. نصف حبات اللقاح ونصف البويضات حصلت على جين من أحد الأبوين والنصف الآخر حصل على جين الأب الثانى . وتطبيق هذين الفرضين مبين بالرسم فى شكلى ٢٠٤ ، ٢٠٥

حسب رأى مندل يتكون التركيب الوراثى للفرد من أزواج من الجينات مأخوذة من كل أب . وكل حبة لقاح أو بويضة تحصل على جين واحد فقط من هذا الزوج من الجينات ، وفرصة ازدواج حبوب اللقاح والبويضات من اللونين (الأصفر والأخضر) متساوية واحتمال اخصاب بويضة من نوع معين

بحبة لقاح من نوع آخر يتوقف على نسبة وجود الأنواع المختلفة ونسبة كل من الأزواج الصفراء (أو الخضراء) إلى غير الصفراء هى ١ : ٣ وهذا يكافى.



شكل (٢٠٥)

النسبة ٣ : ١ الخاصة بمندل موروثة

قولنا أن النتائج التى نحصل عليها تشابه نتيجة رمى قطعة نقود مرتين ، أو نتيجة أخذ كرة من سلتين تحتوى كل منهما على كرات سوداء أو حمراء بنفس العدد الجدول الذى أعطيناه فيما سبق والذى يبين نتائج باحثين آخرين قاموا باجراء نفس التجربة التى استخدمت لتوضيح النظرية الأولية للجينات ، يظهر منه أن النسبة العددية للأنواع المختلفة ليست ثابتة . تماما هذه النسب يمكن اعتبارها ثابتة من وجهة النظر الاحصائية .

هذه العبارة الأخيرة التى أنقذتنا تحتاج إلى أن تدرس بعناية كبيرة . عند افتراضنا الفرض الذى يفسر النتائج ، اخترنا نموذجا احصائيا يمكن تطبيق النظرية الرياضية للاحتمال عليه وهذا يعنى أن الأعداد التى يحصل عليهما من العينات المتساوية فى عدد أفرادها تختلف عن متوسط الأعداد التى يحصل عليها من عدد كبير من العينات وذلك حسب قاعدة ذى الحدين يبين شكل ٢٠٦ أنه عند تهجين البازلاء الصفراء غير النقية بالبازلاء الخضراء فان فرصة الحصول على

أخضر

نبات هجين أصفر

بويضات

حبات لقاح

أصفر غير نقي

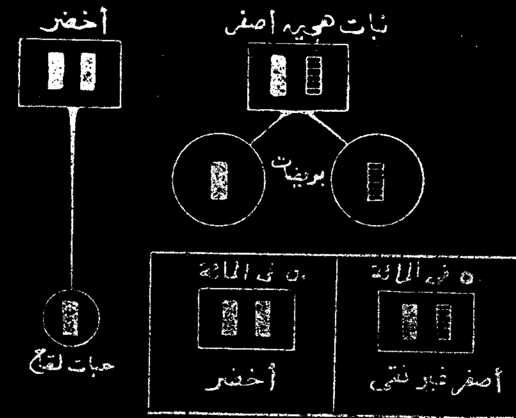
أخضر

م = ١ (م المتوسط)

$$\frac{792 + 924 + 792}{4096} = \frac{2508}{4096}$$

وعلى ذلك فالنسبة بين احتمال النجاح والفشل هى ٢٥٠٨ : ١٥٨٨ أو ٥ : ٣ تقريبا . والنجاح هنا يعنى أن عدد النباتات ذات البذرة الخضراء لن يكون أكبر من ٧ أو أقل من ٥ . أما احتمال كون هذا العدد ٦ أى النصف بالضبط فهو

$$\frac{924}{4096} = \frac{231}{1024}$$



(شكل ٢٠٦)

بذرة خضراء أو صفراء غير نقية هى ½ . نفرض أننا حصلنا على اثنى عشر نباتا فقط . يجب ألا نتوقع وجود ستة نباتات بذرتها خضراء وستة بذرتها صفراء والحصول على عدد متساو من النوعين يكون مستحيلا طبعا إذا كان عدد عناصر العينة فرديا . نفرض فى تجربة معينة أننا حصلنا على اثنى عشر نباتا هجينا . من الممكن فى هذه التجربة أن يكون عدد النباتات ذات البذرة الخضراء من صفر إلى ١٢ ؛ وإذا كان النموذج الطبيعى الذى اخترناه من نوع يصف النتائج وصفا مضبوطاً فإن فرصة الحصول على هذه الاعداد هى حدود مفكوك ذى الحدين .

$$\frac{ن!}{٠!\,ن!}\left(\frac{١}{٢}\right)^{ن} ، \frac{ن!}{١!\,(ن-١)!}\left(\frac{١}{٢}\right)^{ن} ، \ldots ، \frac{ن!}{ن!\,٠!}\left(\frac{١}{٢}\right)^{ن}$$

إذا كانت ك (= ½) هى احتمال كون أحد النباتات أخضراً فإن متوسط عدد النباتات الخضراء فى جميع العينات الاثنى عشر يساوى ن . ك = ٦

إذا كنا نحصل فى تجربة واحدة على خمس نباتات وسبع صفراء ، فإن النتيجة تفترق عن المتوسط بواحد صحيح . واحتمال وقوع العدد فى المدى م ± ١ (م المتوسط) هو

$$\frac{١٢!}{٥!\,٧!}\left(\frac{١}{٢}\right)^{١٢} + \frac{١٢!}{٦!\,٦!}\left(\frac{١}{٢}\right)^{١٢} + \frac{١٢!}{٧!\,٥!}\left(\frac{١}{٢}\right)^{١٢}$$

$$= \frac{٧٩٢ + ٩٢٤ + ٧٩٢}{٤٠٩٦} = \frac{٢٥٠٨}{٤٠٩٦}$$

وعلى ذلك فالنسبة بين احتمال النجاح والفشل هى ٢٥٠٨ : ١٥٨٨ أو ٥:٣ تقريبا . والنجاح هنا يعنى أن عدد النباتات ذات البذرة الخضراء لن يكون أكبر من ٧ أو أقل من ٥ . أما احتمال كون هذا العدد ٦ أى النصف بالضبط فهو

$$\frac{١٢!}{٦! \times ٦!}\left(\frac{١}{٢}\right)^{١٢} = \frac{٩٢٤}{٤٠٩٦} = \frac{٢٣١}{١٠٢٤}$$

وعلى ذلك فالنسبة بين احتمالى كون هذا العدد ٦ وعدم كونه هى ٢٣١ : ٧٩٣ أو ١ : ٣ ½ تقريبا . إذا طالبنا باتفاق نتائج المشاهدة مع النتائج النظرية تكون فى الواقع قد طالبنا بالكثير . وعلى ذلك يجب علينا الا نغضب إذا وجدنا أن النتيجة المشاهدة أكبر بقليل أو أصغر بقليل من المتوسط . ولكن احتمال الحصول على عدد يفترق عن المتوسط بأكثر من الوحدة هو أقل من عكسه . وعلى ذلك فيجب ألا نقنع بنتيجة الفرق بينها وبين المتوسط أكثر من الوحدة وعلى ذلك يدخل فى تقرير اتفاق يبين النتائج النظرية والعملية من وجهة النظر الاحصائية مجموعة من القيم ؛ وبذلك لا نقسو كثيراً على النظرية أو نقتصد فى طلباتنا منها . الأعداد التى تدخل فى المسألة السابقة صغيرة بدرجة لا ترضى العالم العملى ، وقد اخترنا هذا المثال لسبب واحد هو أن حله لا يتطلب مجهوداً كبيراً . فى الحياة الواقعية ، لا يهمنا الحصول على نتيجة مضبوطة يمكننا إجراء التجارب بعينات كبيرة واستخدام تكامل المنحنى الاعتيادى . كما يستخدم المهندسون جداول الجيوب والظلال بدلا من حل المسائل من المبادئ الأولية على أساس هندسة اقليدس . وهذا

يبين كيف يحصل علماء الرياضة على أجـــرهم حتى ولو كان عملهم يجلب السرور لهم .

العثور على فرق حقيقى

يوجد نوع من الأسئلة له علاقة وثيقة بنظرية الاحتمال مثل السؤال الآتى : هل التطعيم ضد الجدرى يعطى مناعة ضده ؟ لا يكون هنـاك داعيا على الاطلاق لأن نلجأ إلى علم الرياضة إذا كان جميع الأشخاص الذين يطعمون لا يمرضون بالجدرى أبداً أو إذا كان عدد كبير من الذين لا يطعمون يصابوا بهذا المرض . والواقع أن كلا من هاتين العبارتين غير صحيح . يجب أن يكون حكمنا على الموضوع مبنياً على الإجابة على السؤال الآتى :

هل الإصابة بالجدرى بين الأشخاص الذين لم يطعموا ضـــده أعلى بدرجة ملحوظة منها بين الأشخاص اللذين طعموا ؟ وأهم كلمة فى هذه العبارة هى ملحوظة .

لا يمكننا فى هذا المجال أن نحاول إعطاء إجابة شاملة لسؤال من هذا النوع . وكل ما يمكن عمـــله هو إعطاء مفتاح للاجابة . طريقة دراسة عالم الإحصاء لهذه المسألة هى أن يسأل أولا : هل نتيجة تجربة على التطعيم لا تستند إلى أساس ؟ أو بصيغة أخرى هل هى من نوع النتائج التى نعتبرها غريبة للغاية فى إحدى لعب الحظ ؟ وعلى ذلك نصغ نموذجاً . ولكى يكون هذا النموذج أولياً على قدر الإمكان ، سنفترض أنه يمكننا ملاحظة ما يحدث عند تطعيم ، أو عدم تطعيم نفس المجموعة من الأفراد . وطبعاً هـــذا تبسيط للمسألة ، ولكن ليس من الصعب أن نتبع طريقة للحل يمكن بها أن نقارن فيما بعد بين إحصائيات التطعيم لمجموعات الأفراد المختلفة فى العدد . فى حدود هذه القيود ، يصبح من الأسهل توجيه اهتمام القارئ إلى مسألة العثور على فرق حقيقى .

نفرض أننا وجدنا أن نسبة الذين يصابون بالجدرى من الذين يطعّمون ضده أقل منها فى حالة عدم التطعيم ، ونتساءل : هل هذا الفرق لا أساس له ؟

أو بمعنى آخر ما لا ينتظر حدوثه فى إحدى لعب الحظ ، إذا أخذنا عينتين عدد أوراق كل منهما معين من مجموعتين متساويتين . فى الواقع أن عدد الأفراد الذين يطعمون والذين لا يطعمون ضد الجدرى كبير جداً ، وقد رأينا أن الاعادة فى هذه الحالة لا تؤثر كثيراً على حساب الاحتمال . وعلى ذلك تكون نموذجا من نماذج لعب الحظ بدون شرط الإعادة . مجموعتا ورق اللعب تناظران مجموعتى الأفراد اللتين نقارنهما . وعدد الأوراق الكوبة يناظر عدد المصابين بالجدرى . نحن نبغى الآن معرفة هل كثيراً ما يكون الفرق بين الأوراق الكوبة التى نحصل عليها من كل مجموعة يساوى مقدارا معينا أم أن ذلك نادر الحدوث . شكلا ٢٠٧، ٢٠٨ يبينان كيف يمكن الحصول على إجابة وذلك باستخدام ما تعلمناه عن التوزيع ذى الحدين وقاعدة لوحة الشطرنج معا والذى يمكننا عمله بعينات عدد أفراد كل منها ؛ يمكننا تعميمه للعينات الأكبر .

إذا وضعنا الآن فرضا عكسيا ، أى فرضا يحسم الخلاف فى مسألة مثل هذه . نسأل أنفسنا : هل الفرق الذى نلاحظه فى هذه الحالة النموذجية نادر الحدوث بدرجة تجعلنا نشك فى حقيقة تساوى مجموعتى الورق ؟ وعلى ذلك فنحن نسلم بالفرض العكسى وهو فى هذه الحالة أن الأفراد على العموم لا يستفيدون من التطعيم . إذا كنا نعلم احتمال إصابة فرد من الأفراد بالجدرى فى هذه الحالة ؛ فإن طريقة شكلى ٢٠٧ — ٢٠٨ توضح كيفيـــة حساب عدد المرات التى يتعدى فيها الفرق بين عدد الاصابات بالجدرى فى عينتين متساويتين عدد أفرادها معلوم الحد الأدنى لجميع القيم التى قد نأخذها .

لدينا هنا عقبة أخرى يجب تخطيطها . وذلك لأنه لا يوجد لدينا عدد يدل على نسبة الذين سيصابون بالجدرى فى هذه الحالة . إذا كان الفرض العكسى الذى فرضناه صحيحا — وان كل من العينتين اللتين ندرسهما — طعمت ضد الجدرى أم لم تطعم — تشابه احدى مجموعتى ورق متطابقتين شكل ٢٠٧ .

وبتكون مجموعة واحدة من هاتين المجموعتين نحصل على عينة أكبر من نفس المجال ، وبالتالى على رقم أدق لاحتمال الأصابة بالجدرى من نسبة مجموع

	$و^{٤}$ ♥♥♥♥	$٤و^{٣}ل$ ♥♥♥•	$٦و^{٢}ل^{٢}$ ♥♥••	$٤ول^{٣}$ ♥•••	$ل^{٤}$ ••••
•••• $ل^{٤}$	♥♥♥♥ $و^{٤}ل^{٤}$	♥♥♥• $٤و^{٣}ل^{٥}$	♥♥•• $٦و^{٢}ل^{٦}$	♥••• $٤ول^{٧}$	•••• $ل^{٨}$
♥••• $٤ول^{٣}$	♥♥♥• $٤و^{٥}ل^{٣}$	♥♥•• $١٦و^{٤}ل^{٤}$	♥••• $٢٤و^{٣}ل^{٥}$	•••• $١٦و^{٢}ل^{٦}$	♡••• $٤ول^{٧}$
♥♥•• $٦و^{٢}ل^{٢}$	♥♥•• $٦و^{٦}ل^{٢}$	♥••• $٢٤و^{٥}ل^{٣}$	•••• $٣٦و^{٤}ل^{٤}$	♡••• $٢٤و^{٣}ل^{٥}$	♡♡•• $٦و^{٢}ل^{٦}$
♥♥♥• $٤و^{٣}ل$	♥••• $٤و^{٧}ل$	•••• $١٦و^{٦}ل^{٢}$	♡••• $٢٤و^{٥}ل^{٣}$	♡♡•• $١٦و^{٤}ل^{٤}$	♡♡♡• $٤و^{٣}ل^{٥}$
♥♥♥♥ $و^{٤}$	•••• $و^{٨}$	♡••• $٤و^{٧}ل$	♡♡•• $٦و^{٦}ل^{٢}$	♡♡♡• $٤و^{٥}ل^{٣}$	♡♡♡♡ $و^{٤}ل^{٤}$

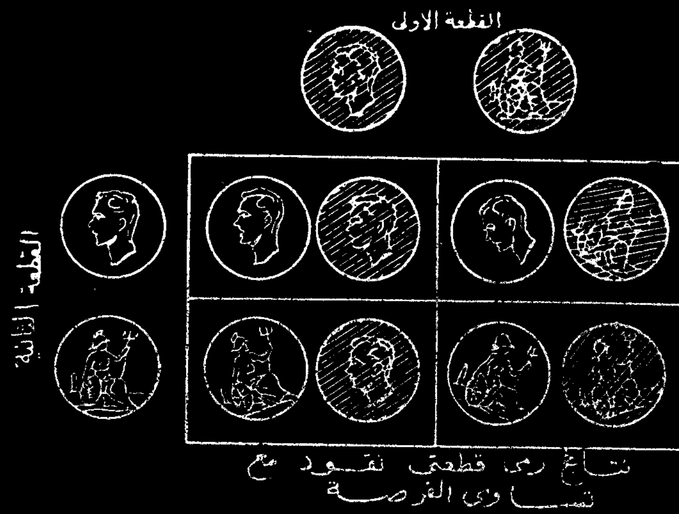
(شكل ٢٠٧)

حالات الإصابة بالجدرى فى كل من العينتين إلى المجموع الكلى لها . وهذه هى هـ التى نستخدمها للحصول على التوزيع (هـ + ك) ^{ر} للعينات التى عدد أفرادها ٢ ر (ر من الأفراد طعموا ، ر لم يطعموا) عند تطبيق طريقة رقعة الشطرنج (شكل ٢٠٧) . وواحد فروع علم الاحصاء وهو الفرع المسمى بنظرية الثقة بالبحث فى تعريف متى يمكن أن نخطىء إذا كان تصرفنا يكاد يكون صرفيا على أساس هذا الفرض .

الارتباط :

هذا الكتاب ، الرياضة للمليون ، ليس بكتاب فى الاحصاء ، والغرض من هذا الباب هو إعطاء القارىء فكرة بسيطة عن نوع المسائل التى تنشأ على الحد الفاصل بين الاختيار والحظ وستكون هذه الدراسة ناقصة إذا نحن لم نتكلم ، دون عمق طبعاً عن أحد فروع نظرية الاحصاء .

عند دراسة الصفات البشرية والمسائل الاجتماعية نجد أن التطبيق المباشر



(شكل ٢٠٨)

للرياضيات التى تدخل فى نطاق نظرية الاحتمال ينشأ عند البحث فى المسائل التى ترتبط ببعضها ، مثل التساؤل : هل ترتبط القدرة على حل مسائل الحساب عقليا بدخل الوالدين ؟ إذا نظمنا فصلا من التلاميذ والتلميذات فى صف على حسب الدرجات التى يحصلون عليها فى اختبار للحساب ، ثم نظمناهم ثانية فى صف آخر على حسب الدخل السنوى للوالدين ولاحظنا أن الترتيب هو نفسه أو أن الترتيب الثانى هو عكس الترتيب الاول فاننا نستنتج أن المقدرة الحسابية ترتبط ارتباطا ما بالحالة الاقتصادية للتلميذ ومثل هذا التناظر التام لايحدث إلا إذا كانت تأثير جميع العوامل الأخرى التى تدخل فى الموضوع ثابتا أو يمكن اهماله. وعند إجراء التجربة الفعلية يجب ألا نيأس من الحصول على نتيجة إذا وجدنا أن بعض الأسماء لاتظهر فى مكانها المنتظر . وعلى ذلك يتوقف استنتاج وجود نوع من التناظر على الاتفاق على معيار ما لمقدار الازاحة التى يمكن حدوثها عند المقارنة بين مثل هذين الصفين .

وأحد المقاييس الأساسية للازاحة عند المقارنة بين صفين بهذه الطريقة يسمى الزيادة أو النزول فى الرتبة . نفرض أن الدرجات التى حصل عليها

ثلاثة تلاميذ ا ، ب ، ح فى اختبار الحساب هى ٧٥ ، ٦٢ ، ٣٩ على الترتيب على ذلك فان رتب ا ، ب ، ح فى الترتيب التنازلى للكفاءة هى ١ ، ٢ ، ٣ على الترتيب إذا كان دخل الوالدين هو ٥٠٠ جنيه ، ٣٢٠ جنيه ، ٤٥٠ جنيه على الترتيب فان الرتب فى هذه الحالة هى ١ ، ٣ ، ٢ . رتبة ا فى كل من الصفين هى ١ ، رتبة ب فقد نقصت ١ وبينما زادت رتبة ح ١ . والمجموع الكلى للزيادة للرتبة يجب أن يساوى المجموع الكلى للنقص فيها ، ويمكن استخدام أيهما كاختبار للتناظر .

لدراسة هذا الاختبار ، سنبين جميع طرق ترتيب ثلاثة أشياء وعددها $\underline{|٣} = ٦$:

ا	ا	ب	ب	ح	ح
ب	ح	ا	ح	ا	ب
ح	ب	ح	ا	ب	ا

إذا أخذنا أى ترتيب من هذه على أنه الترتيب القياسى ستوجد زيادة (أو نزول) فى الرتبة عند مقارنة أى ترتيب آخر به . إذا اخترنا الترتيب الأول على أنه الترتيب القياسى فإن الرتب المختلفة تكون كالآتى :

١	١	٢	٢	٣	٣
٢	٣	١	٣	١	٢
٣	٢	٣	١	٢	١

وفيما يلى الزيادة فى الرتبة (الاشارة الموجبة) والنزول فيها (الاشارة السالبة) :

٠٠	٠	— ١	— ١	— ٢	— ٢
٠٠	— ١	+ ١	— ١	+ ١	٠
٠٠	+ ١	٠	٢	+ ١	+ ٢

الزيادة الكلية هى ٨ والنزول الكلى ٨ . وعلى ذلك فعند ترتيب مجموعة من ثلاثة أشياء بالطرق الست المختلفة يكون النقص الكلى فى الرتبة ٨ والمتوسط

لطرق الترتيب المختلفة $\frac{٨}{٦}$. إذا كان ل هو النقص (الإشارة السالبة) فى أى عمود من الجدول السابق ، فإن متوسط النزول فى الرتبة عند إعادة ترتيب ن من الأشياء مع اعطاء قيم متساوية لكل ترتيب ممكن ، هو

$$م = \frac{ع\ ل}{ن\ ١}$$

إذا كان النزول الكلى فى الرتبة ، ت ، عند مقارنة صفين لا يفترق كثيراً عن متوسط النزول فى الرتبة عند ما تعطى لجميع الترتيبات المختلفة نفس القيمة . لا يوجد أى سبب للظن بوجود أى ارتباط بين القياسات التى يدل عليها ترتيب الصفوف وإذا كتبنا

$$ر = ١ - \frac{ت}{م}$$

فإن ر تسمى معامل سبيرمان للرتبة .

إذا كان النزول الكلى فى الرتبة مساو إلى متوسط هذا النقص فإن ر = ٠ ، وإذا كان النزول الكلى فى الرتبة صفراً فإن ر = ١ . وعلى ذلك فقيم ر الواقعة بين ١ ، صفر تبين درجة التناظر ولاستخدام هذه الصيغة يلزمنا فقط معرفة م لصف يتكون من أشياء عددها كبير بدرجة معقولة . العبارة هى :

$$م = \frac{ن^٢ - ١}{٦}$$

وعلى ذلك عند ما يكون لدينا ثلاثة أشياء ، $م = \frac{٩ - ١}{٦} = \frac{٨}{٦}$

كما وجدناها فعلا . يمكننا أن نحصل على صيغة المعامل م من تركيب الجدول

١	١	٠	٢	٢	٠	٣	٣
٢	٣	٠	١	٣	٠	١	٢
٣	٢	٠	٣	١	٠	٢	١

كما هو مبين فيما سبق توجد ترتيبات مختلفة عددها ($\underline{|\text{ن}}$) لأشياء عددها ن ، وعدد الزيادة فى الرتبة يساوى عدد النقص فيها . بالنظر إلى الصف العلوى نجد أن عدد المرات التى يوجد بها كل واحد من الأعداد (التى عددها ن) هو عدد الطرق المختلفة التى يمكن بها ترتيب الأشياء الباقية [التى عددها (ن — ١)] ، اى أن كل عدد يوجد $\underline{|(\text{ن}-١)}$ من المرات . العدد الأكبر (ن) يمكن أن تنقص رتبته بمقدار ٠ ، ١ ، ٢ ، ٠٠٠ ، (ن — ١) وكل نقص من هذه يحدث $\underline{|(\text{ن}-١)}$ من المرات . العدد التالى (ن — ١) يمكن أن تنقص رتبته بمقدار ٠ ، ١ ، ٢ ، ٠٠ (ن — ٢) وكل نقص من هــذه يحدث $\underline{|(\text{ن}-١)}$ من المرات . وعلى ذلك يمكن عمل الجدول الآتى لجميع النقص فى الرتبة :

العدد النونى	$\underline{|(\text{ن}-١)}\,[\,٠ + ١ + ٢ + ٠٠ + (\text{ن} - ١)\,]$
العدد (ن — ١)	$\underline{|(\text{ن}-١)}\,[\,٠ + ١ + ٢ + ٠٠ + (\text{ن} - ٢)\,]$
أكبر أصغر ثلاثة أعداد	$\underline{|(\text{ن}-١)}\,[\,٠ + ١ + ٢\,]$
أكبر أصغر عددين	$\underline{|(\text{ن}-١)}\,[\,٠ + ١\,]$
أصغر عدد	$\underline{|(\text{ن}-١)}\,[\,٠\,]$

مجموع جميع مكونات هذا الجدول هو :

$$\underline{|(\text{ن}-١)}\,[\,\text{ن}(٠) + (\text{ن} - ١)(١) + (\text{ن} - ٢)(٢)$$
$$+ (\text{ن} - ٣)(٣) \cdots]$$
$$= \underline{|(\text{ن}-١)}\,[\,(٠ + \text{ن} + ٢\text{ن} + ٣\text{ن} + \cdots)$$
$$- (٠ + ١^٢ + ٢^٢ + ٣^٢ + \cdots]$$

فى كل من هاتين المتسلسلتين توجد حدود عددها ن مبتدئة بالصفر وعلى ذلك فالحد الأخير فيهما هو على الترتيب ن (ن — ١) ، $(\text{ن} - ١)^٢$. وعلى ذلك نكتب ما سبق على الصورة :

$$\underline{|(\text{ن}-١)}\,[\,\text{ن}\,(١ + ٢ + ٣ + ٠٠ + (\text{ن} - ١)$$
$$- (١^٢ + ٢^٢ + \cdots + (\text{ن} - ١)^٢\,]$$

لقد وجدنا مجموع الأعداد الطبيعية من ١ إلى ن وكذلك مجموع مربعاتها (ص ٣٢٢ — ٣٢٣) . بتعويض (ن — ١) بدلا من ن فى العبارات التى حصلنا عليها نجد أن مجموع الاعداد الطبيعية من ١ ، إلى (ن — ١) ، ومجموع مربعاتها هما $\frac{\text{ن}(\text{ن}-١)}{٢}$ ، $\frac{\text{ن}(\text{ن}-١)(٢\text{ن}-١)}{٦}$ على الترتيب

وعلى ذلك فالمجموع المطلوب هو

$$\underline{|(\text{ن}-١)}\left\{\frac{\text{ن}\times\text{ن}(\text{ن}-١)}{٢} - \frac{\text{ن}(\text{ن}-١)(٢\text{ن}-١)}{٦}\right\}$$

$$= \text{ن}\,\underline{|(\text{ن}-١)}\left(\frac{\text{ن}^٢-١}{٦}\right)$$

$$= \underline{|\text{ن}}\left(\frac{\text{ن}^٢-١}{٦}\right)$$

هذا هو النزول الكلى فى الرتبة . لحصول على المتوسط نقسم هذا المجموع على $\underline{|\text{ن}}$ فنجد أن متوسط النزول فى الرتبة هو

$\frac{\text{ن}^٢-١}{٦}$ كما ذكرنا من قبل

كمثال على استخدام معامل سبيرمان سنفترض أن درجات الاختبار (١) ، دخل الوالدين (٢) لثمانية تلاميذ هى كما يأتى :

	١	٢ جنيه		١	٢ جنيه
أ	٧٠	٧٢٠	ه	٦٠	٢٥٠
ب	٨٠	٨٠٠	و	٥٤	٥٠٠
ج	٢١	٧٥٠	س	٢٤	٣٠٠
د	٤٢	٤٥٠	ص	٣٠	٢٠٠

الترتيب العمودى للتلاميذ على هذين المقياسين هو

	(١)	(٢)	الفرق فى الرتبة
ا	٢	٣	— ١
ب	١	١	٠
حـ	٨	٢	+ ٦
ء	٥	٥	٠
هـ	٣	٧	— ٤
و	٤	٤	٠
س	٧	٦	+ ١
ص	٦	٨	— ٢

المجموع الكلى للنقص (أو الزيادة) فى الرتبة ± ٧ . متوسط النقص فى الرتبة

$$\frac{٨^٢ — ١}{٦} = \frac{٦٣}{٦}$$. بالتعويض فى القانون

$$ر = ١ — \frac{٧ \times ٦}{٦٣} = ٠٫٣$$

وعلى ذلك فالتناظر الرأسى هو ٣٣٪ كما يبين هذا الجدول

ملاحق

الملحق الأول

قانون الجيب للمثلثات الكروية

يمكننا استخدام شكل ١٢٤ فى إيجاد قانون الجيب مباشرة هكذا . عندما نفك الأنموذج فى شكل ١٢٣ تدور النقطة المتحركة ا$_1$ حول الخط المستقيم و ك وترسم قوساً دائرياً فى مستو عمودى على و ك والمستوى و ك ں حتى تأخذ الموضع ا . وبالمثل ترسم قوساً دائرياً حول الخط المستقيم و ں حتى تأخذ الموضع ا$_2$ ، وإذن

ا$_1$ ء و = ٩٠° = ا$_2$ هـ و .

(١) (٢)

وعندما نطبق الشكل إلى موضعه الأصلى تقع ا مباشرة فوق نقطة ى فى المستوى و ك ں حيث ى هى النقطة التى يتقابل عندها نصف القطرين المتحركين ا$_1$ ء ، ا$_2$ هـ .

من الشكل الأول نحصل على

$$\frac{ا_1 ء}{ا_1 و} = حا حـَ ، \frac{ا_2 هـ}{ا_2 و} = حا بَ \quad ... \quad (١)$$

∴ ا$_1$ ء = ا$_1$ و حا حـَ ، ا$_2$ هـ = ا$_2$ و حا بَ .

لكن الزاوية ا ء ى هى الزاوية بين المستويين اللذين يشملان القوسين ا ب ، ب حـ على الترتيب ، وإذن فالزاوية ا ء ى = الزاوية ب فى المثلث الكروى . من الشكل الثانى نحصل على

$$\frac{\text{ا ى}}{\text{ا}_1\text{ء}} = \text{حا ب} \;،\; \text{بالمثل}\; \frac{\text{ا ى}}{\text{ا}_2\text{هـ}} = \text{حا حـ} \quad \ldots \quad (٢)$$

$$\therefore \text{ا ى} = \text{ا}_1\text{ء حا ب} \;،\; \text{ا ى} = \text{ا}_2\text{هـ حا حـ}.$$

من (١) ، (٢) نحصل على

$$\text{ا و حا حَ حا حـ} = \text{أى} = \text{ا و حا بَ حا حـ}$$

$$\therefore \frac{\text{حا حَ}}{\text{حا حـ}} = \frac{\text{حا بَ}}{\text{حا ب}}.$$

بالمثل يمكن إثبات أن كلا منهما $= \dfrac{\text{حا اَ}}{\text{حا ا}}$.

الملحق الثانى

معادلة القطع الناقص

عندما يواجه الباحث الرياضى مسألة مثل هذه فإنه يستعين بنوعين من الأدلة . فهـــو أولا يسأل نفسه عما إذا كان الشكل الذى يريد الحصول على معادلته يشبه شكلا آخراً معروفاً معادلته ، ثم يذكر كيف حصل أحـــد الرياضيين على معادلة هذا الشكل الأخير . فالقطع الناقص يرتبط بشكلين آخرين معلوم معادلة كل منهما فإذا كان الاختلاف المركزى يقرب قرباً لا نهائياً من الوحدة فإن القطع الناقص يصبح خطاً مستقيماً ، وإذا كان الاختلاف المركزى يقرب قرباً لا نهائياً من الصفر فإن القطع يصبح دائره . وإذن فالمعادلة التى نبحث عنها للقطع الناقص يجب أن تتحول إلى معادلة خط مستقيم أو معادلة دائره عندما يقرب الاختلاف المركزى قرباً لا نهائياً من الوحدة أو الصفر . وإذن نسأل أنفسنا أولا عن نوع هذه المعادلة . إذا كانت ف صغيره جداً فإن معادله الدائرة تكون على الصوره

$$\text{ر}^2 = \text{س}^2 + \frac{\text{ص}^2}{\text{١} - \text{ف}}$$

وهذه المعادلة هى بعينها المعادلة

$$(\text{١} - \text{ف})\,\text{ر}^2 = (\text{١} - \text{ف})\,\text{س}^2 + \text{ص}^2$$

فعندما تكون ف قريبة جداً من الوحدة تكون ١ — ف قريبة جداً من الصفر وتصبح المعادلة $\text{ص}^2 = \text{صفرا}$ ، أى ص = صفرا التى هى معادلة خط مستقيم هو المحور السينى .

وإذا ابتدأنا بالمعادلة $\text{ر}^2 = \dfrac{\text{س}^2}{\text{١} - \text{ف}} + \text{ص}^2$ فإننا نجد أن القطع يتحول إلى نفس الدائرة عندما ف = صفراً ولكن يتحول إلى المحور الصادى عندما ف = ١ . وإذا كتبنا ١ — ف بدلا من ١ — ف فى المعادلة المقترحة فإننا نحصل على نفس الشىء السابق . وإذا لا يكون من الغريب إذا نحن وجدنا أن معادلة القطع الناقص هى على الصورة

$$\frac{\text{س}^2}{\text{ر}^2} + \frac{\text{ص}^2}{\text{ر}^2(\text{١} - \text{ف})} = \text{١}.$$

وبعد أن حددنا نوع المعادلة التى نبحث عنها يكون من السهل الحصول على هذه المعادلة . وهذا فى الواقع أمر هام جداً . فبينما نحن نحذر فى المدارس من شر « تلفيق » النتيجة نجد أن « تلفيق » النتيجة هو فى الواقع الطريقة المعتادة فى الرياضيات العالية . وكل ما يلزمنا الآن أن نتذكر أمراً ما لمعرفة المعادلة المطلوبة . وقد شرحنا ذلك فى حالة الدائرة . وإذن نحاول استخدام نظرية فيثاغورس ونذكر أن القطع الناقص له بؤرتان منفصلتان بدلا من البؤرتين المنطبقتين للدائرة . ونذكر أيضاً أننا نريد أن تظهر ف فى المعادلة مع كمية أخرى مثل ر التى تظهر فى معادلة الدائرة

الملحق الثالث

استخدام نظرية ذات الحدين فى اثبات الخاصية الاسية

توجد طريقة أخرى لاثبات أن :

$$هـ^{س} = ١ + س + \frac{س^{٢}}{\underline{|٢}} + \frac{س^{٣}}{\underline{|٣}} + \dots$$

وقد عرضت هذه الطريقة عند دراسة جداول الربح المركب . فمن هذه الجداول دعنا نكون جدولا يبين جملة الجنيه بعد ن س من السنين بسعر $\frac{١٠٠}{ن}$ ٪ يبين الجدول الآتى بعض القيم عندما س = ١

عدد السنين	السعر	الجملة
٢٠	٥٪	٢,٦٥٣
٢٥	٤	٢,٦٦٦
٤٠	٢ ½	٢,٦٨٥
٥٠	٢	٢,٦٩٢
١٠٠	١	٢,٧٠٥

نلاحظ أن الجملة فى العمود الأخير تكاد تكون متساوية وانها تزيد بازدياد ن . ماذا يحدث إذن عندما تصبح ن كبيرة كبرا لانهائيا ؟ أى ما هى قيمة $(١ + \frac{١}{ن})^{ن}$ ، عندما تصبح ن كبيرة كبراً لانهائياً ؟ الجواب على ذلك هو هـ = ٢,٧١٨ ، ونكتب هذا الجواب رياضيا على الصورة

$$\text{نهـا}_{ن \to \infty} \left(١ + \frac{١}{ن}\right)^{ن} = هـ$$

وباجراء نفس العمل لقيم س المختلفة نجد مثلا انه عندما س = ½ تقترب الجملة من القيمة $هـ^{\frac{١}{٢}}$ بعد ½ ن من السنين بسعر $\frac{١٠٠}{ن}$ ٪ .

وإذن لزم علينا أن نختبر قيمة $(١ + \frac{١}{ن})^{س ن}$ عندما تصبح ن كبيرة كبرا لانهائيا ، أو عندما تصبح $\frac{١}{ن}$ صغيرة صغرا لا نهائيا وأخيرا نضع $\frac{١}{ن}$ = صفرا .

باستخدام متسلسلة ذات الحدين :

$$\left(١ + \frac{١}{ن}\right)^{س ن} = ١ + س ن \left(\frac{١}{ن}\right) + \frac{س ن (س ن - ١)}{٢} \times \left(\frac{١}{ن^{٢}}\right) + \frac{س ن (س ن - ١)(س ن - ٢)}{٢ \times ٣} \left(\frac{١}{ن^{٣}}\right) + \dots$$

$$= ١ + س + \frac{١}{\underline{|٢}} س \left(س - \frac{١}{ن}\right) + \frac{١}{\underline{|٣}} س \left(س - \frac{١}{ن}\right) \left(س - \frac{٢}{ن}\right) + \dots$$

وإذن إذا كانت س = ١ فاننا نجد أن :

$$\left(١ + \frac{١}{ن}\right)^{ن} = ١ + ١ + \frac{١}{\underline{|٢}} ١ \left(١ - \frac{١}{ن}\right) + \frac{١}{\underline{|٣}} ١ \times \left(١ - \frac{١}{ن}\right) \left(١ - \frac{٢}{ن}\right) + \dots$$

ولكن $\left(1+\frac{1}{ن}\right)^{س ن} = \left\{\left(1+\frac{1}{ن}\right)^{ن}\right\}^{س}$ وإذن

$$\left[1 + س + \frac{1}{\lfloor 2}\, س\left(س-\frac{1}{ن}\right) + \frac{1}{\lfloor 3}\, س\left(س-\frac{1}{ن}\right)\left(س-\frac{2}{ن}\right) + \cdots\right]$$

$$= \left[1 + 1 + \frac{1}{\lfloor 2}\left(1-\frac{1}{ن}\right) + \frac{1}{\lfloor 3}\left(1-\frac{1}{ن}\right)\left(1-\frac{2}{ن}\right) + \cdots\right]^{س}.$$

وبوضع $\frac{1}{ن}$ = صفراً نحصل على

$$1 + س + \frac{س^{2}}{\lfloor 2} + \frac{س^{3}}{\lfloor 3} + \cdots = \left(1 + 1 + \frac{1}{\lfloor 2} + \frac{1}{\lfloor 3} + \cdots\right)^{س} = هـ^{س}.$$

الملحق الرابع

لإثبات أن إذا كانت ن كبيرة جداً فإن ص = $ق_{م}^{ن} ا^{م} ب^{ن-م}$ تؤول إلى

$$ص = \Delta\, هـ^{-س^{2}}.$$

إذا رمينا قطعة ذات الخمسة قروش مد من المرات فإننا نحصل على توزيع تمثله مستطيلات كتلك المرسومة في شكل ١٩٦، تبين احتمال الحصول على صفر أو ١ أو ٢ أو .... أو ن من الرؤوس . ولنفرض أننا نضيف كمية صغيرة $(-\frac{1}{2}ك)$ من كل رأس و $+\frac{1}{2}ك$ من كل ذيل، وإذن فالمستطيل الذي ارتفاعه $ق_{م}^{ن}$

$ا^{م} ب^{ن-م} = ق_{م}^{ن} \left(\frac{1}{2}\right)^{ن}$ الذي هو احتمال الحصول على م من الرؤوس يناظر كمية أو خطأ

$$س = -\frac{1}{2}م ك + \frac{1}{2}(ن - م)ك = \frac{1}{2}ك(ن - 2م).$$

وبنفس الكيفية يناظر المستطيل الذي ارتفاعه $ق_{م-1}^{ن} \left(\frac{1}{2}\right)^{ن}$ خطأ

$$س = \frac{1}{2}ك(م-1) + \frac{1}{2}ك(ن - م + 1) = \frac{1}{2}ك(ن-2م) + ك$$

وحيث أننا نجعل ك عرض المستطيلات صغيراً إذن يجب أن نزيد ارتفاعها حتى تكون المساحة الكلية للمستطيلات مساوية للوحدة، لتناظر حالة التأكد — لأن في هذه الحالة يكون الخطأ له قيمة مؤكدة يمكن أن تكون العنصر —.

ولنفرض أننا ضربنا كلا من الارتفاعات في ل، إذن فالارتفاع ص الذي يتوقف على س يحقق

$$ص = ص = \frac{ل}{2^{ن}} ق_{م}^{ن} \quad \text{عندما} \quad س = س = \frac{1}{2}ك(ن - 2م)$$

وعندما

$$س = س_{1} = \frac{1}{2}ك(ن - 2م) + ك \quad \text{فإن} \quad ص = ص_{1}$$

$$= \frac{ل}{2^{ن}} ق_{م-1}^{ن} = \frac{ل}{2^{ن}} ق_{م}^{ن} \frac{م}{ن - م + 1}$$

وإذن $$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ص_{1} - ص}{س_{1} - س} = \frac{ل}{2^{ن}} ق_{م}^{ن} \times \left(\frac{م}{ن - م + 1} - 1\right) \div ك.$$

فإذا أخذنا ك صغيرة و ن كبيرة فإن ذلك يساوي قيمة $\frac{ء ص}{ء س}$ عند

النقطة التى فى منتصف المسافة بين (س. ، ص.) ، (س₁ ، ص₁). وعند هذه النقطة

$$س = \tfrac{١}{٢}(س_{٠} + س_{١}) = \tfrac{١}{٢}ك(ن - ٢م + ١)$$

$$ص = \tfrac{١}{٢}\frac{ل}{ن_{٢}}\,ع_{م}^{ن}\left(\frac{م}{ن - م + ١} + ١\right) = \tfrac{١}{٢}\frac{ل}{ن_{٢}}\,ع_{م}^{ن}\,\frac{ن + ١}{ن - م + ١}$$

وإذن

$$\frac{دص}{دس} = \frac{ل}{ن_{٢}}\,ع_{م}^{ن}\,\frac{٢م - ن - ١}{ن - م + ١} \div ك$$

$$= \frac{ل}{ن_{٢}}\,ع_{م}^{ن}\,\frac{ن + ١}{ن - م + ١} \times \frac{-\tfrac{١}{٢}ك(ن - ٢م + ١) \times ٢}{(ن + ١)ك^{٢}}$$

$$= ٢ص\,\frac{-٢س}{(ن + ١)ك^{٢}}$$

وبأخذ ك صغيرة ، ن + ١ كبيرة بحيث أن ½ (ن + ١) ك² يساوى ثابت $\frac{١}{ب}$ (فمثلا يمكننا أن نأخذ ب = ٢٠ ، ك = $\frac{١}{١٠٠}$ ، ن = ٩٩٩ أو ك = ١٠^{-٦} ، ن + ١ = ١٠^{١١} ... الخ) نحصل على

$$\frac{دص}{دس} = ص(-٢ب\,س)$$

أى $$\frac{١}{ص}\cdot\frac{دص}{دس} = -٢ب\,س$$

أى $$لو_{هـ}ص = -ب\,س^{٢} + د$$

أى $$ص = حـ\,هـ^{-ب\,س^{٢}} \quad \text{حيث } حـ = هـ^{د}.$$

الملحق الخامس

تعيين الموضع بإستخدام نقطة قدم الأجسام السماوية

فى وقتنا الحاضر ، يهم الكثيرين من القراء أن يدرسوا كيفية تعيين المكان أثناء الطيران بدلا من تعيينه بحراً أو براً . والدراسة التالية هى لمن فهم أسس الملاحة ورسم الخرائط المعطاة فى الباب الثامن ، ويرغب فى تفهم أسس تطبيقها فى الحالات الخاصة التى تكون فيها السرعة كبيرة بحيث لا يوجد مجال لإجراء عمليات حسابية طويلة أو أخذ قراءات لفترة طويلة . بواسطة قوانين المثلث الكروى يمكننا تعيين خط العرض وخط الطول براً ، بمشاهدة ارتفاع جسم سماوى واحدوزاويته السمتية فى نفس اللحظة ، حيث الزمن بتوقيت جرينتش . ولكن ، لأسباب عديدة ، لا يمكن عملياً تعيين الزاوية السمتية لجسم سماوى بدرجة كبيرة من الدقة ، ونحن على ظهر السفينة أو غيرها . لذلك يحاول الملاح جهده فى استخدام ارتفاع الجسم عندما يعبر مستوى الزوال . فأثناء الليل يستخدم الراصد أى نجم لا تحجبه السحب وقت عبوره مستوى الزوال . أما أثناء النهار فلا نعتمد إلا على جسم سماوى واحد هو الشمس . فإذا حجبت السحب الشمس عند الظهر المحلى فإن الطريقة المعتادة ، وهى مشاهدة أكبر إرتفاع للشمس ، والزمن بتوقيت جرينتش عندما تكون الشمس فى أعلى نقطة فى السماء ، تفشل ، ولإيجاد خط العرض وخط الطول يرجع الملاح إلى الطريقة الصيفية ، والأساس فى هذه الطريقة هو كما يأتى :

أى نجم ميله ل هو نجم سمتى بالنسبة إلى كل مكان خط عرضه ع = ل . وإذن يوجد على دائرة العرض ع مكان معين ما عند أى لحظة ، بحيث يكون نجم ما ميله ل = ع فى سمت الرأس لهذا المكان . يسمى هذا المكان الذى خط عرضه ع نقطة قدم ذلك النجم عند هذه اللحظة ويقع على خط طول فى نفس مستوى دائرة مطلع مستقيم النجم عند هذه اللحظة . وهذا صحيح أيضاً بالنسبة إلى أى جسم سماوى مثل الشمس . ففى أى لحظة معينة يوجد موضع يسمى نقطة قدم الشمس ، بحيث تقع الشمس فوقه مباشرة ؛ وخط عرضه هو

(١) نقطة قدم الشمس

غرب أى ٣٠° شرق جرينتش ، وإذن تقع نقطة قدم الشمس عند هذه اللحظة على خط عرض ١٨° شمالا ، وخط طول ٣٠° شرقاً .

وبما أن الخط الواصل من سمت الرأس إلى الراصد يمر أيضاً بمركز الكرة الأرضية فإنه توجد علاقة هندسية بسيطة بين نقطة قدم الشمس وبين موضعنا على سطح الكرة الأرضية . تقع أشعة الشمس فى إتجاه الخط الواصل من نقطة قدم الشمس إلى مركز الكرة الأرضية ، والزاوية بين هذا الخط ، والخط الواصل من الراصد إلى مركز الأرض هى الزاوية التى يصنعها مع اتجاه الجاذبية الأرضية عند الراصد ، أى البعد السمتى المحلى للشمس (شكل ١). وبعبارة أخرى ، البعد السمتى للشمس ر١° هو البعد الزاوى بين الراصد ونقطة قدم الشمس . ودرجة واحدة عند مركز الارض تقبل قوسا على دائرة عظمى طوله ٦٩ ميلا عاديا تقريبا وفيما يلى سنعتبر أن هذه القيمة مضبوطة لغرض التوضيح . يمكننا اذن القول أن موضع الراصد يبعد ٦٩ ر١ ميلا عاديا بالإبحار على دائرة عظمى عن نقطة قدم الشمس . وأية نقطة على دائرة تبعد ٦٩ ر١ ميلا حول نقطة قدم الشمس تحقق هذا الشرط . واذن بأخذ قراءة واحدة للبعـــد السمتى للشمس لا نستطيع القول أكثر من أننا فى مكان ما على دائرة معينة يمكن رسمها على سطح الكرة الأرضية .

تقع دائرة مطلع مستقيم الشمس مباشرة فوق خط الطول ل ش الذى تقع عليه نقطة قدم الشمس التى خط عرضها ع = ل (ميل الشمس) . ن موضع سفينة ما على خط طول آخر ل ن .

الزاوية الساعية ف بين ن ، ش هى الفرق الزاوى بين دائرة مطلع المستقيم للشمس ودائرة مطلع المستقيم التى تمر لسمت رأس ن ، فهى أيضاً الفرق بين خطى طول ن ، ش والخط الواصل من ش إلى مركز الكرة الأرضية يعين اتجاه أشعة الشمس وذلك لأن الشمس فى سمت الرأس فوق ش ، وميل أشعة الشمس على الخط المار فى ن وسمت الرأس ذا (س) ومركز الأرض هو البعد السمى الشمس عند ن . فهو إذن القياس الزاوى لمو...

غرب أى ٣٠° شرق جرينتش ، وإذن تقع نقطة قدم الشمس عند هذه اللحظة على خط عرض ١٨° شمالا ، وخط طول ٣٠° شرقاً .

وبما أن الخط الواصل من سمت الرأس إلى الراصد يمر أيضاً بمركز الكرة الأرضية فإنه توجد علاقة هندسية بسيطة بين نقطة قدم الشمس وبين موضعنا على سطح الكرة الأرضية . تقع أشعة الشمس فى إتجاه الخط الواصل من نقطة قدم الشمس إلى مركز الكرة الأرضية ، والزاوية بين هذا الخط ، والخط الواصل من الراصد إلى مركز الأرض هى الزاوية التى يصنعها مع اتجاه الجاذبية الأرضية عند الراصد ، أى البعد السمتى المحلى للشمس (شكل ١). وبعبارة أخرى ، البعد السمتى للشمس $س_1$° هو البعد الزاوى بين الراصد ونقطة قدم الشمس . ودرجة واحدة عند مركز الارض تقبل قوسا على دائرة عظمى طوله ٦٩ ميلا عاديا تقريبا وفيما يلى سنعتبر أن هذه القيمة مضبوطة لغرض التوضيح . يمكننا اذن القول أن موضع الراصد يبعد ٦٩ $س_1$ ميلا عاديا بالإبحار على دائرة عظمى عن نقطة قدم الشمس . وأية نقطة على دائرة تبعد ٦٩ $س_1$ ميلا حول نقطة قدم الشمس تحقق هذا الشرط . وإذن بأخذ قراءة واحدة للبعد السمتى للشمس لا نستطيع القول أكثر من أننا فى مكان ما على دائرة معينة يمكن رسمها على سطح الكرة الأرضية .

(١) نقطة قدم

تقع دائرة مطلع مستقيم الشمس مباشرة فوق خط الطول ل ش الذى تقع عليه نقطة قدم الشمس التى خط عرضها ع = ل (ميل الشمس) . ن موضع سفينة ما على خط طول آخر لن .

غرب أى ٣٠° شرق جرينتش ، وإذن تقع نقطة قدم الشمس عند هذه اللحظة على خط عرض ١٨° شمالا ، وخط طول ٣٠° شرقاً .

وبما أن الخط الواصل من سمت الرأس إلى الراصد يمر أيضاً بمركز الكرة الأرضية فإنه توجد علاقة هندسية بسيطة بين نقطة قدم الشمس وبين موضعنا على سطح الكرة الأرضية . تقع أشعة الشمس فى إتجاه الخط الواصل من نقطة قدم الشمس إلى مركز الكرة الأرضية . والزاوية بين هذا الخط ، والخط الواصل من الراصد إلى مركز الأرض هى الزاوية التى يصنعها مع اتجاه الجاذبية الأرضية عند الراصد ، أى البعد السمتى المحلى للشمس (شكل ١). وبعبارة أخرى ، البعد السمتى للشمس $ر_{١}$° هو البعد الزاوى بين الراصد ونقطة قدم الشمس . ودرجة واحدة عند مركز الارض تقبل قوسا على دائرة عظمى طوله ٦٩ ميلا عاديا تقريبا وفيما يلى سنعتبر أن هذه القيمة مضبوطة لغرض التوضيح . يمكننا اذن القول أن موضع الراصد يبعد ٦٩ $ر_{١}$ ميلا عاديا بالإبحار على دائرة عظمى عن نقطة قدم الشمس . وأية نقطة على دائرة تبعد ٦٩ $ر_{١}$ ميلا حول نقطة قدم الشمس تحقق هذا الشرط . وإذن بأخذ قراءة واحدة للبعد السمتى للشمس لا نستطيع القول أكثر من أننا فى مكان ما على دائرة معينة يمكن رسمها على سطح الكرة الأرضية .

ميل الشمس . وحيث أن الشمس تقع عندئذ على مستوى الزوال فالزمن المحلى هو الظهر . فإذا كان الكرونومتر يسجل الزمن س ساعة (بعـــد الظهر) بتوقيت جرينتش فإن الزمن المحلى يكون متأخراً س من الساعات عن زمن جرينتش ، وإذن فخط الطول هو ١٥ س° غرب جرينتش . فإذا فرضنا مثلا أن الزمن بتوقيت جرينتش ١٠ صباحا وأن ميل الشمس ١٨° (من التقويم الفلكى) فإن نقطة قدم الشمس تقع على خط طول ١٥ × ٢٢ = ٣٣٠°

شكل (١) نقطة قدم الشمس

تقع دائرة مطلع مستقيم الشمس مباشرة فوق خط الطول ل ش التى تقع عليه نقطة قدم الشمس التى خط عرضها ع = ل (ميل الشمس) . ن موضع سفينة ما على خط طول آخر ل ن .

الزاوية الساعية ف بين ن ، ش هى الفرق الزاوى بين دائرة مطلع المستقيم للشمس ودائرة مطلع المستقيم التى تمر بسمت رأس ن ، فهى أيضاً الفرق بين خطى طول ن ، ش والخط الواصل من ش إلى مركز الكرة الأرضية يعين اتجاه أشعة الشمس وذلك لأن الشمس فى سمت الرأس فوق ش ، وميل أشعة الشمس على الخط المار فى ن وسمت الرأس لها (ر) ، مركز الأرض هو البعد السمى للشمس عند ن ، فهو إذن القياس الزاوى لقوس الدائرة العظمى المارة بالنقطتين ن ، ش .

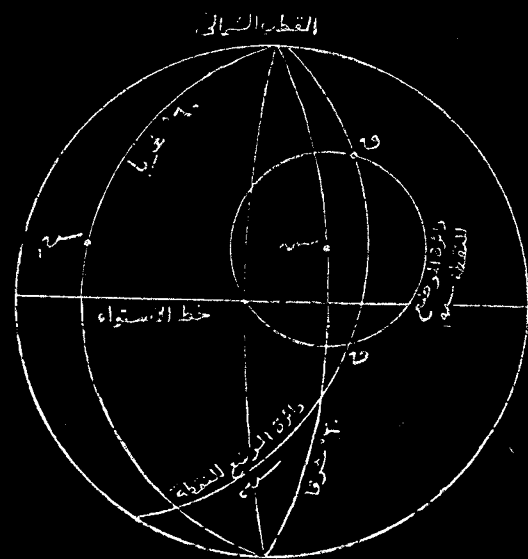
غرب أى ٣٠° شرق جرينتش ، وإذن تقع نقطة قدم الشمس عند هذه اللحظة على خط عرض ١٨° شمالا ، وخط طول ٣٠° شرقاً .

وبما أن الخط الواصل من سمت الرأس إلى الراصد يمر أيضاً بمركز الكرة الأرضية فإنه توجد علاقة هندسية بسيطة بين نقطة قدم الشمس وبين موضعنا على سطح الكرة الأرضية . تقع أشعة الشمس فى إتجاه الخط الواصل من نقطة قدم الشمس إلى مركز الكرة الأرضية . والزاوية بين هذا الخط ، والخط الواصل من الراصد إلى مركز الأرض هى الزاوية التى يصنعها مع اتجاه الجاذبية الأرضية عند الراصد ، أى البعد السمتى المحلى للشمس (شكل ١). وبعبارة أخرى ، البعد السمتى للشمس $ر_{1}$° هو البعد الزاوى بين الراصد ونقطة قدم الشمس . ودرجة واحدة عند مركز الارض تقبل قوسا على دائرة عظمى طوله ٦٩ ميلا عاديا تقريبا وفيما يلى سنعتبر أن هذه القيمة مضبوطة لغرض التوضيح . يمكننا اذن القول أن موضع الراصد يبعد ٦٩ $ر_{1}$ ميلا عاديا بالإبحار على دائرة عظمى عن نقطة قدم الشمس . وأية نقطة على دائرة تبعد ٦٩ $ر_{1}$ ميلا حول نقطة قدم الشمس تحقق هذا الشرط . واذن بأخذ قراءة واحدة للبعـــد السمتى للشمس لا نستطيع القول أكثر من أننا فى مكان ما على دائرة معينة يمكن رسمها على سطح الكرة الأرضية .

وعندما نرسم هذه الدائرة التى تبعد ٦٩ $ر_{1}$ ميلا حول نقطة ١٨° شمالا ، ٣٠° شرقا يمكننا أن نأخذ قراءة ثانية عندما يكون البعد السمتى للشمس $ر_{2}$° مثلا . ولنفرض أن الكرونومتر يسجل عنـــدئذ الزمن ٤ مساءاً بتوقيت جرينتش واننا نجد من الجداول أن ميل الشمس ١٨,٠٥° . فموضعنا إذن يقع فى مكان ما على دائرة نصف قطرها قوس دائرة عظمى $ر_{2}$° ومركزها نقطة قدم الشمس أى ١٨,٠٥° شمالا ، ٦٠° غربا . فاذا رسمنا هذه الدائرة الثانية على سطح الكرة الأرضية فانهما تقطع الدائرة الأولى فى نقطتين ، وإذا كنا قد ثبتنا فى مكاننا أثناء الفترة بين القراءتين فان موضعنا يقع فى مكان ما على هاتين الدائرتين فهو إذن إحـــدى هاتين النقطتين (شكل ٢) . ويمكننا أن نعرف بالضبط

النقطة الصحيحة بواسطة تقدير تقريبي للزاوية السمتية للشمس . المناظرة لإحدى القراءتين ، ولكن قلما يكون ذلك ضروريا ، فنحن يمكننا دائما معرفة أيهما تختار مما نعرفه عن حركة السفينة . وهذه النقطة التى نحصل عليها تعطينا تقديراً لخط عرض وخط طول المكان الذى نحن به .

والواقع أن السفينة لا تبقى فى نفس الموضع و أثناء الفترة بين القراءتين عند الزمنين ن١ ، ن٢ بل هى تتحرك من و١ حيث البعد السمتى ر١ الى و٢ حيث البعد السمتى ر٢ ، الا أنه من السهل تصور ما كان يحدث لو أن السفينة بقيت ثابتة ، سواء فى موضعها الأول أو موضعها الاخير . وكل ما تحتاج اليه هو تصحيح البعد السمتى عند ن١ بفرض أن السفينة كانت فيما بعد عند ق١ . فاذا



شكل (١) : تعيين المكان باستخدام نقطتين من نقط قدم الشمس .

ش١ ، ش٢ نقطتا قدم الشمس عند الزمنين ن١ ، ن٢ . نصفا قطرى دائرتى الموضع (ر١ ، ر٢) هما البعدان السمتيان للشمس عند ن١ ، ن٢ بالنسبة إلى موضع السفينة . تقع السفينة فى مكان ما على هاتين الدائرتين وإذن فهى تقع عند إحدى النقطتين و ، و َ . من معلوماتنا عن حركة السفينة يمكننا أن نحكم أن السفينة ليست عند إحداهما ، ولتكن و َ مثلا . فهى إذن عند و . وبوجه عام نتأكد من ذلك بواسطة تقدير تقريبى للزاوية السمتية للشمس عندئذ .

فرضنا ذلك فان البعد السمتى للشمس يكون مساويا للبعد السمتى لجميع الأمكنة التى تقع على دائرة عظمى مركزها عند نقطة قدم الشمس ، وتقع و٢ عند نقطه على محيط هذه الدائرة . وقوس الدائرة . وقوس الدائرة . وقوس الدائرة العظمى التى تصل نقطة قدم الشمس بالنقطة و١ هو الاحداثى الزوالى لنقطة قدم الشمس بالنسبة إلى و١ وهذا الأخير هو الزاوية السمتية للشمس عند و١ حيث الزمن ن١ . فاذا كانت و١ على بعد ص ميلا من و١ على نفس القوس فان $\left(\frac{ص}{٦٩}\right)^{\circ}$ هو التصحيح المطلوب ، ص هى عدد الاميال التى يجب أن تبحرها السفينة لتصل من ق١ الى و٢ ، إذا انطبق خط سيرها على الاحداثى الزوالى لنقطة قدم الشمس عند الزمن ن١ . فاذا سارت السفينة على هذه الدائرة العظمى فانه يمكننا رسم الدائرة التى تصل جميع النقط التى يكون عندها البعد السمتى للشمس عند الزمن ن١ مساويا إلى البعد السمتى للشمس عند النقطة و٢ وبما أن و٢ تقع على هذه الدائرة وتقع أيضا على دائرة الموضع التى نصف قطرها ر٢ ومركزها نقطة قدم الشمس عند الزمن ن٢ فان الموضع النهائى و٢ هو إحدى نقطتى تقاطع هاتين الدائرتين . وحيث أننا نعلم البعد م بين و١ ، و٢ على وجه التقريب ، إذا علمنا سرعة السفينة ، ونعلم زاوية ميل خط سيرها على الاحداثى الزوالى لنقطة قدم الشمس عند و١ حيث الزمن ن١ ، إذا علمنا اتجاه حركة السفينة بواسطة البوصلة ، فاننا نعلم إذن قيمة ص ، لان

$$ص = م \text{ جتا } \alpha$$

ويمكننا نفس الكيفية استخدام نجم ما إذا علمنا مطلع مستقيم النجم فاننا نعلم كم ساعة تمضى بين عبوره والظهر المحلى عند أى مكان . وإذن يمكننا إيجاد خط عرض وخط طول نقطة قدم النجم عند أى لحظة بتوقيت جرينتش كما يسجلها الكرونومتر . وعلى ظهر السفينة لا نستفيد إلا قليلا من رسم دائرتى موضع تعتمدان على قياسين متتاليين للبعد السمتى لنجم معين . فاذا لم توجد سحب كثيرة تمنع مثل هاتين المشاهدتين فانه بالاحرى لا توجد سحب كثيرة تمنع مثل مشاهدة واحدة لعبور أحد النجوم التى يسهل التعرف عليها والتى تتجه جنوبا

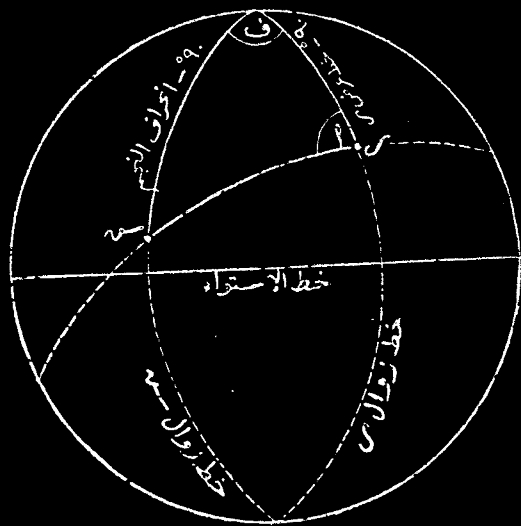
أثناء الظلام. إلا أنه يمكننا إذا دعت الضرورة أن نطبق مبدأ الطريقة الصيفية لنستفيد من فترة قصيرة خالية من السحب فى ليلة مظلمة ملبدة بالغيوم .

وهذه هى الطريقة الاساسية لتعيين المكان أثناء الطيران ليلا حيث لا يمكن التحكم فى شعاع ضوئى . وبينما لا تذهب السفينة بعيداً فى الفترة بين عبورين متتاليين لنجم معروف تقطع الطائرة مسافة شاسعة فيتحتم على الطيار أن يعرف طريقة يعين بها المكان ، لا تتوقف على انتظار عبور نجم يتعرف عليه ليقرأ من الجداول ميله ومطلع مستقيمه . وإذا شاهدنا البعدين السمتيين لنجمين فى وقت واحد فإنه يمكننا رسم دائرة موضع حول نقطة قدم كل منهما ، ويمكننا أن نختار النجمين بحيث تكون نقطتا تقاطعهما متباعدتين بألف أو أكثر من الاميال فيكون عندئذ من السهل تحديد المكان من بين هاتين النقطتين .

ولرسم دائرة الموضع التى نصف قطرها س° حول نقطة قدم الشمس أو نقطة قدم النجم ، على سطح الكرة الأرضية علينا أن نرسم دائرة لها نفس نصف القطر مثل دائرة خط العرض ٩٠° — س° ، ويمكننا إجراء ذلك بواسطة دبوس وخيط وقلم أو بواسطة برجل يمكن بواسطته رسم دوائر على سطح كرة . إلا انه لكى توجد موضعنا بحيث لا يزيد الخطأ عن ميل واحد فإنه يلزمنا سطح كروى كبير جداً بالنسبة إلى السفينة وبالأحرى كبير جداً بالنسبة إلى المستوى . ولتعيين نقطة التقاطع المطلوبة يقوم الطيار أو البحار برسم خريطة كبيرة . وبالقرب من الموضع الذى تحدده بطريقة تقريبية على خريطة كبيرة لا يختلف قوس دائرة الموضع حول نقطة قدم جسم سماوى كثيراً عن المماس لهذا القوس أى عن خط مستقيم . وجميع دوائر الموضع حول نقطة معينة على سطح الكرة الأرضية هى دوائر متحدة المركز ، وإذا كان نصف قطر دائرة الموضع كبيراً أى كان البعد السمتى للنجم > ١٥° فإن جميع الأقواس المناظرة على خريطة كبيرة تبدو خطوطا مستقيمة متوازية .

وحيث أن نصف قطر دائرة الموضع حول نقطة قدم الجسم السماوى هو البعد السمتى لنفس الجسم السماوى عند نفس اللحظة فإن الفرق ١° بين نصفى قطرى دائرتى موضع يناظر فرقا ١° بين البعدين السمتين عند موضعين على أحد القوسين أو الآخر . ومعنى ذلك أن الأمكنة التى تقع على خطوط الموضع المتوازية المتباعدة ٦٩ ميلا على الخريطة هى الأماكن التى عندها الاختلاف فى البعد السمتى = ١° . وبالعكس إذا كان الفرق بين البعدين السمتين لنجم عند مكانين على الخريطة س° فإن المكانين يقعان على خطين متوازيين متباعدين ٦٩ س ميلا . فإذا علمنا احداثى أحدهما فإنه يمكننا رسم الثانى بنفس الاحداثى على البعد المناظر ، منه .

ولكى نرسم خط الموضع الحقيق بسرعة معقولة نحتاج إذن إلى خط رئيسى يصل بين الأمكنة التى لها بعد سمتى واحد معلوم عند اللحظة التى نعين فيها البعد السمتى الحقيقى للنجم . وبذلك تصبح مسألتنا هى كيفية وضع خط رئيسى على الخريطة أو بالأحرى وضع خطين رئيسيين ، واحد لكل من النجمين اللذين نستخدمهما وإيجاد نقطة تقاطع خطى موضع حقيقيين

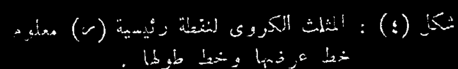


(شكل ٣)

وعلى سطح الكرة الأرضية أى قوس يصل نقطة رئيسية معلوم بعد

السمتى ، إلى نقط قدم النجم يقطع خط الزوال الذى تقع عليه النقطة الرئيسية نفسها ، صانعا زاوية هى الزاوية السمتية أو الأحدائى الزوالى لنقطة قدم النجم بالنسبة إلى موضع الراصد . وعلى خريطة مرسومة بمقياس رسم كبير هـــذا القوس هو خط مستقيم يقطع خط الزوال الذى تقع عليه النقطة الرئيسية صانعا نفس الزاوية . ويمثل هــذا الخط المستقيم نصف قطر دائرة الموضع التى تمر بالنقطة الرئيسية . ويمس خط الموضع دائرة الموضع عند هـذه النقطة وإذن يقابلها على التعامد . وإذن يمكننا رسم الخط الرئيسى إذا علمنا شيئين هما : (١) موضع أى نقطة معلوم بعدها السمتى عند اللحظة التى نشاهد عنـدها البعد السمتى الحقيقى للنجم المعين ، (٢) الإحدائى الزوالى ، أى الزاوية السمتية لنقطة قدم النجم عند نفس المكان .

ولنفرض أننا اخترنا نقطة ما ، معلوم خط عرضها وخط طولها ، قريبة من الموضع الذى حسبناه على وجه التقريب عند لحظة معينة ، نريد إيجاد البعد السمتى الحقيقى للنجم ، عندها . هذه النقطة هى إحدى رؤوس مثلث كروى (شكل ٣) ؛ ضلعان منه هما خط عرض وميل النجم ، والزاوية القطبية المحصورة بينهما هى الزاوية الساعية أو الفرق بين خطى طول نقطة قدم النجم والنقطة الرئيسية . وإذن يمكن إيجاد الضلع الباقى والزاويتين الباقيتين من المثلث باستخدام قوانين حل المثلث الكروى . أو بالرجوع إلى جداول مبنية عليها . والضلع الثالث الذى يصل النقطة الرئيسية بنقطة قدم النجم (شكل ١) هو البعد السمتى للنجم عند النقطة الرئيسية عند اللحظة المعينة . والزاوية بين هذا الضلع والضلع الذى يصل النقطة الرئيسية إلى القطب على خط طول الثانية هى الزاوية السمتية أى الإحدائى الزوالى لنقطة قدم النجم والنجم نفسه عند النقطة الرئيسية. وإذن يمكننا تعيين البعد السمتى للنجم وإحداثية الزوالى عند أى نقطة قريبة من الموضع الذى حسبناه على وجه التقريب ، معلوم خط عرضها وخط طولها عند لحظة معلومة ولإجراء ذلك علينا أن نعكس عملية إيجاد خط العرض وخط الطول بمعلومية الزاوية السمتية لنجم وبعده السمتى والزمن الرئيسى .



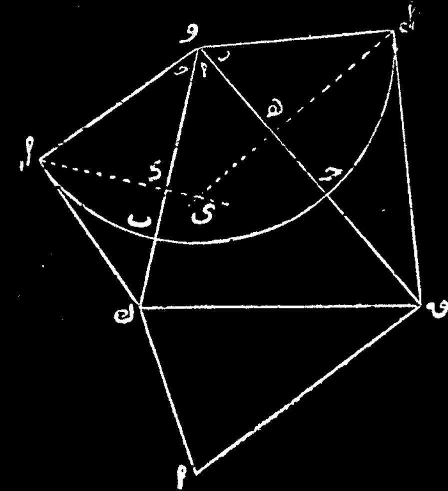
شكل (٤) : المثلث الكروى لنقطة رئيسية (م) معلوم خط عرضها وخط طولها .

أ = الزاوية السمتية لنقطة قدم الشمس (ش) بالنسبة إلى (م) .
ف = الزاوية الساعية لنقطة قدم الشمس (ش) بالنسبة إلى (م)
= الفرق بين خطى طول (م ؛ ش) .

ولنفرض مثلا أننا نخمن أننا سنكون فى موضع ما بالقرب من ½ ٥٤° شمالا ، ¼ ١٠° شرقاً فى الساعة ٨,٤٥ مساءاً بتوقيت الكرونومتر ، بعد عشر دقائق ، عندما نريد معرفة موضعنا بالضبط بأخذ قراءات للبعد السمتى لدبران والبعد السمتى للنسر الطائر فى نفس الوقت . لإجراء ذلك نضع خط الموضع نقطة قدم كل من هذين النجمين عند الساعة ٨,٤٥ مساءاً بتوقيت الكرونومتر ، المار بنقطة ٥٤° شمالا ، ١٠° شرقا . ولكى نرسم هذين الخطين يلزمنا الاحدائى الزوالى لكل من نقطتى قدم النجمين عند ٥٤° شمالا ، ١٠° شرقا ، والساعة ٨,٤٥ مساءاً بتوقيت الكرونومتر. وبالحصول على هاتين الزاويتين بحل المثلثين الكرويين المناظرين نوقع هذين الإحداثيين على الخريطة ثم نرسم خطى الموضع المتعامدين معهما . ويعطينا الحل أيضا البعد السمتى للنجمين على خط الموضع عند لحظة الرصد ، ومن مشاهداتنا (عند الساعة ٨,٤٥ مساءاً) نحصل

على مقدار الفرق بين (س١° ، س٢°) البعد السمتى ككل نجم عند الموضع الحقيق والبعد السمتى المناظر للنجم عند النقطة الرئيسية أى الموضع المفروض. وكل مايتبقى هو أن نرسم خطين يوازيان الخطين الرئيسيين وعلى بعد ٦٩ س١ ، ٦٩ س٢ ميلا منهما على الترتيب ، ونقرأ خط عرض وخط طول نقطة التقاطع فنكون بذلك قد حصلنا على موضعنا الحقيق .

ولكى نرسم خط الموضع الحقيق بدقة أكثر نعتبر قيمة أدق من القيمة ٦٩ ميلا لطول القوس الدائرى الذى يقبل زاوية ١ عند مركز الارض . ولا يفوتنا أن الكرونومتر يعطينا الزمن بتوقيت جرينتش المتوسط بينما نحن نستخدم الزمن بتوقيت جرينتش المحلى لنحصل على الزاوية الساعية للجسم السماوى عند المكان المفروض عند اللحظة المعينة ، ونحن نجرى ذلك كما هو موضح فى كتاب (Science for the Citizen) صفحة ٦٣ ، وبالرجوع إلى جداول « معادلة الزمن » . ولكى نستفيد من الجداول الخاصة بحلول المثلثات الكروية عند إجراء بعض العمليات الحسابية اللازمة لرسم الخطوط الرئيسية يجب أن نختار خط عرض المكان المفروض عدداً صحيحاً من الدرجات ، وخط طول يجعل الزاوية الساعية لنقطة قدم النجم بالنسبة إلى النقطة الرئيسية عدداً صحيحاً أيضاً .



(شكل ٥)

ولتبسيط الدراسة السابقة قد افترضنا أننا نأخذ البعد السمتى للنجمين فى نفس اللحظة . وللحصول على نتائج دقيقة نحتاج إلى متوسط عدة قراءات لكل منهما . والفترة التى تمضى فى أخذ مجموعتى القراءات ليس لها أهمية إذا كانت الأداة سفينة ، وقد يتعاون بحاران على ظهر سفينة كبيرة فى أخذ القراءات لنجمين فى نفس الفترة ، إذا دعت الحاجة إلى ذلك . وفى حالة الطائرة تكفى الفترة لأن تسمح بإزاحة قدرها ١٥ ميلا . وللحصول على نقطة التقاطع المطلوبة لا يستخدم الطيار خط موضعه الحقيق عند الزمن ن١ ، بل يزيح خط موضعه الأول فى اتجاه حركة الطائرة . ويتوقف مقدار الإزاحة على α° زاوية ميل اتجاه حركة الطائرة على الاحداثى الزوالى لنقطة قدم النجم الأول . فإذا كانت مسرعة ع فإن المسافة التى تقطعها الطائرة فى الفترة هى ع (ن١ — ن٢) = م ميلا والإزاحة المطلوبة هى م جتا α على الاحداثى الزوالى .

الجـــــداول

ملاحظات على استعمال الجداول

جدول ١ — فى جدول ١ توجد العلاقات المفيدة التى تربط الأوزان المختلفة والأحجام المختفة فى النظام المترى وحدات الطول والوزن والحجم هى على الترتيب المتر والجرام واللتر . وتقسم جميع هذه الوحدات إلى أجزاء أصغر منها بنفس الطريقة . فللدلالة على جزء قدره $\frac{١}{١٠٠}$ من الوحدة يضاف المقطع « سنتى » وعلى جزء قدره $\frac{١}{١٠٠٠}$ من الوحدة يضاف المقطع « ميللى » أما فى حالة ألف وحدة فإننا نضيف المقطع « كيلو » .

جدول ٣ — لقد شرحنا فيما سبق طريقة استخدام جدول الفروق . ويمكن الحصول على القيم التى تقع بين القيم المبينة فى الجداول بالتناسب فمثلا إذا أردنا تعيين مربع ٢٨,٧٥٦ ، نرى من الجـــدول أن مربع ٢٨,٧٥ هو ٨٢٦,٥ . وفى هذا الجزء من جدول الفروق ، كل فرق يساوى الواحد فى العدد الذى يراد تربيعه يناظر فرقاً قدره ٧ فى المربع . وعلى ذلك يكون الفرق المساوى ٠,٦ مناظراً لفرق قدره ٠,٦ × ٧ = ٤ تقريباً . وعلى ذلك يكون المربع المطلوب ٨٢٦,٩ . ويمكن أيضاً استخدام الجدول الثالث فى إيجاد الجذور التربيعية . فمثلا إذا أردنا إيجاد الجذر التربيعى للعدد ١٢٣,٢ نلاحظ بالبحث أن الجذر المطلوب يقع بين ١١ ، ١٢ . وفى الجداول نرى العدد ١٢٣٢ يتكرر مرتين ، أولا عند الأرقام ١١١ ، وثانيا عند الأرقام ٣٥١ . وعلى ذلك يكون الجذر التربيعى للعدد ١٢٣,٢ هو ١١,١ . وإذا كان المطلوب هو تعيين الجذر التربيعى للعدد ١٢,٣٢ فمن الواضح أن هذا الجذر يكون ٣,٥١ .

جدول ٤ — فى أغلب الجداول المثلثية ، تعطى أجزاء الزاوية بالدقائق ، وبذلك تكون الفترات هى ٦َ ، ١٢َ . . وهكذا . وقد بدأت الكسور العشرية ستعمل فى التعبير عن هذه الفترات .

ويمكن استخدام جدول الجيوب كجدول لجيوب التمام وذلك باستعمال العبارة

حا ا = حا (٩٠° — ا)

فمثلا إذا كان المطلوب تعيين حتا ٣١,٥° نعين حا ٥٨,٥° .

جدول ٦ — للاقتصاد لم نعطى جدولا للأعداد المقابلة للوغاريتمات ويمكن استخدام الجدول السادس للحصول على الأعداد إذا علمت لوغاريتماتها وذلك بعكس عملية إيجاد لوغاريتمات الأعداد . ولكى تتضح طريقة استعمال هذا الجدول أنظر ص ٥٠٢ .

جدول ١

الأوزان والمقاييس الانجليزية

١٧٦٠ ياردة	=	ميلا واحدا
٤٨٤٠ ياردة مربعة	=	فدانا واحداً
٦٤٠ فدان	=	ميلا مربعاً
١١٢ رطل	=	هندردويت
٢٠ هندردويت	=	طناً واحداً
٨ بايتت	=	جالون واحدا
الجالون	=	٢٧٧ بوصة مكعبة .
القدم المكعب	=	٦,٢٣ جالونا .

الاوزان والمقاييس المترية

١٠ مليمترات	=	سنتيمترا واحداً .
١٠٠ سنتيمتر	=	متراً واحداً .
١٠٠٠ متر	=	كيلو متراً واحداً .
١٠٠٠ جرام	=	كيلو جراماً واحداً .
١٠٠ سنتلتر	=	لتراً واحداً .
لتر واحد	=	١٠٠٠ سنتيمتراً مكعباً .

العلاقة بين المقاييس الانجليزية والمترية

بوصة واحدة = ٢,٥٤ سنتيمتراً.
رطل واحد = ٤٥٤ جراماً.
متر واحد = ١,٠٩ ياردة
كيلومتر واحد = ٠,٦٢١ ميلا.
كيلوجرام واحد = ٢,٢٠ رطلا.
لتر واحد = ,٢٢ جالونا.

جدول ٢

كميات ثابتة

ط = ٣,١٤١٦
لو$_{١٠}$ ط = ٠,٤٩٧١
زاوية دائرية = ٥٧,٢٩٦ درجة.
هـ = ٢,٧١٨٣
لو$_{١٠}$ هـ = ,٤٣٤٣
لو$_{هـ}$ ﻫ = ٢,٣٠٢٦ لو$_{١٠}$ ﻫ
لو$_{١٠}$ ﻫ = ٠,٤٣٤٣ لو$_{هـ}$ ﻫ

متوسط نصف قطر الأرض = ٣,٩٦٠ ميلا = ٦,٣٧١ × $١٠^{٨}$ سنتيمتراً
ح = ٣٢,٢ قدم/ث^{٢} ٩٨١,١ سم/ث^{٢}.
السنتيمتر المكعب من الماء فى درجة حرارة ٤ مئوية يزن جراماً واحداً.

١

جدول الجيوب

	٠	٦	١٢	١٨	٢٤	٣٠	٣٦	٤٢	٤٨	٥٤	فروق الدقائق				
											١	٢	٣	٤	٥
٠°	٠٠٠٠	٠٠١٧	٠٠٣٥	٠٠٥٢	٠٠٧٠	٠٠٨٧	٠١٠٥	٠١٢٢	٠١٤٠	٠١٥٧	٣	٦	٩	١٢	١٥
١	٠١٧٥	٠١٩٢	٠٢٠٩	٠٢٢٧	٠٢٤٤	٠٢٦٢	٠٢٧٩	٠٢٩٧	٠٣١٤	٠٣٣٢	٣	٦	٩	١٢	١٥
٢	٠٣٤٩	٠٣٦٦	٠٣٨٤	٠٤٠١	٠٤١٩	٠٤٣٦	٠٤٥٤	٠٤٧١	٠٤٨٨	٠٥٠٦	٣	٦	٩	١٢	١٥
٣	٠٥٢٣	٠٥٤١	٠٥٥٨	٠٥٧٦	٠٥٩٣	٠٦١٠	٠٦٢٨	٠٦٤٥	٠٦٦٣	٠٦٨٠	٣	٦	٩	١٢	١٥
٤	٠٦٩٨	٠٧١٥	٠٧٣٢	٠٧٥٠	٠٧٦٧	٠٧٨٥	٠٨٠٢	٠٨١٩	٠٨٣٧	٠٨٥٤	٣	٦	٩	١٢	١٤
٥	٠٨٧٢	٠٨٨٩	٠٩٠٦	٠٩٢٤	٠٩٤١	٠٩٥٨	٠٩٧٦	٠٩٩٣	١٠١١	١٠٢٨	٣	٦	٩	١٢	١٤
٦	١٠٤٥	١٠٦٣	١٠٨٠	١٠٩٧	١١١٥	١١٣٢	١١٤٩	١١٦٧	١١٨٤	١٢٠١	٣	٦	٩	١٢	١٤
٧	١٢١٩	١٢٣٦	١٢٥٣	١٢٧١	١٢٨٨	١٣٠٥	١٣٢٣	١٣٤٠	١٣٥٧	١٣٧٤	٣	٦	٩	١٢	١٤
٨	١٣٩٢	١٤٠٩	١٤٢٦	١٤٤٤	١٤٦١	١٤٧٨	١٤٩٥	١٥١٣	١٥٣٠	١٥٤٧	٣	٦	٩	١٢	١٤
٩	١٥٦٤	١٥٨٢	١٥٩٩	١٦١٦	١٦٣٣	١٦٥٠	١٦٦٨	١٦٨٥	١٧٠٢	١٧١٩	٣	٦	٩	١٢	١٤
١٠	١٧٣٦	١٧٥٤	١٧٧١	١٧٨٨	١٨٠٥	١٨٢٢	١٨٤٠	١٨٥٧	١٨٧٤	١٨٩١	٣	٦	٩	١١	١٤
١١	١٩٠٨	١٩٢٥	١٩٤٢	١٩٥٩	١٩٧٧	١٩٩٤	٢٠١١	٢٠٢٨	٢٠٤٥	٢٠٦٢	٣	٦	٩	١١	١٤
١٢	٢٠٧٩	٢٠٩٦	٢١١٣	٢١٣٠	٢١٤٧	٢١٦٤	٢١٨١	٢١٩٨	٢٢١٥	٢٢٣٢	٣	٦	٩	١١	١٤
١٣	٢٢٥٠	٢٢٦٧	٢٢٨٤	٢٣٠٠	٢٣١٧	٢٣٣٤	٢٣٥١	٢٣٦٨	٢٣٨٥	٢٤٠٢	٣	٦	٨	١١	١٤
١٤	٢٤١٩	٢٤٣٦	٢٤٥٣	٢٤٧٠	٢٤٨٧	٢٥٠٤	٢٥٢١	٢٥٣٨	٢٥٥٤	٢٥٧١	٣	٦	٨	١١	١٤
١٥	٢٥٨٨	٢٦٠٥	٢٦٢٢	٢٦٣٩	٢٦٥٦	٢٦٧٢	٢٦٨٩	٢٧٠٦	٢٧٢٣	٢٧٤٠	٣	٦	٨	١١	١٤
١٦	٢٧٥٦	٢٧٧٣	٢٧٩٠	٢٨٠٧	٢٨٢٣	٢٨٤٠	٢٨٥٧	٢٨٧٤	٢٨٩٠	٢٩٠٧	٣	٦	٨	١١	١٤
١٧	٢٩٢٤	٢٩٤٠	٢٩٥٧	٢٩٧٤	٢٩٩٠	٣٠٠٧	٣٠٢٤	٣٠٤٠	٣٠٥٧	٣٠٧٤	٣	٦	٨	١١	١٤
١٨	٣٠٩٠	٣١٠٧	٣١٢٣	٣١٤٠	٣١٥٦	٣١٧٣	٣١٩٠	٣٢٠٦	٣٢٢٣	٣٢٣٩	٣	٦	٨	١١	١٤
١٩	٣٢٥٦	٣٢٧٢	٣٢٨٩	٣٣٠٥	٣٣٢٢	٣٣٣٨	٣٣٥٥	٣٣٧١	٣٣٨٧	٣٤٠٤	٣	٥	٨	١١	١٤
٢٠	٣٤٢٠	٣٤٣٧	٣٤٥٣	٣٤٦٩	٣٤٨٦	٣٥٠٢	٣٥١٨	٣٥٣٥	٣٥٥١	٣٥٦٧	٣	٥	٨	١١	١٤
٢١	٣٥٨٤	٣٦٠٠	٣٦١٦	٣٦٣٣	٣٦٤٩	٣٦٦٥	٣٦٨١	٣٦٩٧	٣٧١٤	٣٧٣٠	٣	٥	٨	١١	١٤
٢٢	٣٧٤٦	٣٧٦٢	٣٧٧٨	٣٧٩٥	٣٨١١	٣٨٢٧	٣٨٤٣	٣٨٥٩	٣٨٧٥	٣٨٩١	٣	٥	٨	١١	١٤
٢٣	٣٩٠٧	٣٩٢٣	٣٩٣٩	٣٩٥٥	٣٩٧١	٣٩٨٧	٤٠٠٣	٤٠١٩	٤٠٣٥	٤٠٥١	٣	٥	٨	١١	١٤
٢٤	٤٠٦٧	٤٠٨٣	٤٠٩٩	٤١١٥	٤١٣١	٤١٤٧	٤١٦٣	٤١٧٩	٤١٩٥	٤٢١٠	٣	٥	٨	١١	١٣
٢٥	٤٢٢٦	٤٢٤٢	٤٢٥٨	٤٢٧٤	٤٢٨٩	٤٣٠٥	٤٣٢١	٤٣٣٧	٤٣٥٢	٤٣٦٨	٣	٥	٨	١١	١٣
٢٦	٤٣٨٤	٤٣٩٩	٤٤١٥	٤٤٣١	٤٤٤٦	٤٤٦٢	٤٤٧٨	٤٤٩٣	٤٥٠٩	٤٥٢٤	٣	٥	٨	١٠	١٣
٢٧	٤٥٤٠	٤٥٥٥	٤٥٧١	٤٥٨٦	٤٦٠٢	٤٦١٧	٤٦٣٣	٤٦٤٨	٤٦٦٤	٤٦٧٩	٣	٥	٨	١٠	١٣
٢٨	٤٦٩٥	٤٧١٠	٤٧٢٦	٤٧٤١	٤٧٥٦	٤٧٧٢	٤٧٨٧	٤٨٠٢	٤٨١٨	٤٨٣٣	٣	٥	٨	١٠	١٣
٢٩	٤٨٤٨	٤٨٦٣	٤٨٧٩	٤٨٩٤	٤٩٠٩	٤٩٢٤	٤٩٣٩	٤٩٥٥	٤٩٧٠	٤٩٨٥	٣	٥	٨	١٠	١٣
٣٠	٥٠٠٠	٥٠١٥	٥٠٣٠	٥٠٤٥	٥٠٦٠	٥٠٧٥	٥٠٩٠	٥١٠٥	٥١٢٠	٥١٣٥	١	٥	٨	١٠	١٣
٣١	٥١٥٠	٥١٦٥	٥١٨٠	٥١٩٥	٥٢١٠	٥٢٢٥	٥٢٤٠	٥٢٥٥	٥٢٧٠	٥٢٨٤	٢	٥	٧	١٠	١٢
٣٢	٥٢٩٩	٥٣١٤	٥٣٢٩	٥٣٤٤	٥٣٥٨	٥٣٧٣	٥٣٨٨	٥٤٠٢	٥٤١٧	٥٤٣٢	٢	٥	٧	١٠	١٢
٣٣	٥٤٤٦	٥٤٦١	٥٤٧٦	٥٤٩٠	٥٥٠٥	٥٥١٩	٥٥٣٤	٥٥٤٨	٥٥٦٣	٥٥٧٧	٢	٥	٧	١٠	١٢
٣٤	٥٥٩٢	٥٦٠٦	٥٦٢١	٥٦٣٥	٥٦٥٠	٥٦٦٤	٥٦٧٨	٥٦٩٣	٥٧٠٧	٥٧٢١	٢	٥	٧	١٠	١٢
٣٥	٥٧٣٦	٥٧٥٠	٥٧٦٤	٥٧٧٩	٥٧٩٣	٥٨٠٧	٥٨٢١	٥٨٣٥	٥٨٥٠	٥٨٦٤	٢	٥	٧	٩	١٢
٣٦	٥٨٧٨	٥٨٩٢	٥٩٠٦	٥٩٢٠	٥٩٣٤	٥٩٤٨	٥٩٦٢	٥٩٧٦	٥٩٩٠	٦٠٠٤	٢	٥	٧	٩	١٢
٣٧	٦٠١٨	٦٠٣٢	٦٠٤٦	٦٠٦٠	٦٠٧٤	٦٠٨٨	٦١٠١	٦١١٥	٦١٢٩	٦١٤٣	٢	٥	٧	٩	١٢
٣٨	٦١٥٧	٦١٧٠	٦١٨٤	٦١٩٨	٦٢١١	٦٢٢٥	٦٢٣٩	٦٢٥٢	٦٢٦٦	٦٢٨٠	٢	٥	٧	٩	١١
٣٩	٦٢٩٣	٦٣٠٧	٦٣٢٠	٦٣٣٤	٦٣٤٧	٦٣٦١	٦٣٧٤	٦٣٨٨	٦٤٠١	٦٤١٤	٢	٤	٧	٩	١١
٤٠	٦٤٢٨	٦٤٤١	٦٤٥٥	٦٤٦٨	٦٤٨١	٦٤٩٤	٦٥٠٨	٦٥٢١	٦٥٣٤	٦٥٤٧	٢	٤	٧	٩	١١
٤١	٦٥٦١	٦٥٧٤	٦٥٨٧	٦٦٠٠	٦٦١٣	٦٦٢٦	٦٦٣٩	٦٦٥٢	٦٦٦٥	٦٦٧٨	٢	٤	٧	٩	١١
٤٢	٦٦٩١	٦٧٠٤	٦٧١٧	٦٧٣٠	٦٧٤٣	٦٧٥٦	٦٧٦٩	٦٧٨٢	٦٧٩٤	٦٨٠٧	٢	٤	٦	٩	١١
٤٣	٦٨٢٠	٦٨٣٣	٦٨٤٥	٦٨٥٨	٦٨٧١	٦٨٨٤	٦٨٩٦	٦٩٠٩	٦٩٢١	٦٩٣٤	٢	٤	٦	٨	١١
٤٤	٦٩٤٧	٦٩٥٩	٦٩٧٢	٦٩٨٤	٦٩٩٧	٧٠٠٩	٧٠٢٢	٧٠٣٤	٧٠٤٦	٧٠٥٩	٢	٤	٦	٨	١٠

	٠َ	٦َ	١٢َ	١٨َ	٢٤َ	٣٠َ	٣٦َ	٤٢َ	٤٨َ	٥٤َ	فروق الدقائق ١	٢	٣	٤	٥
٠°	٠٠٠٠	٠٠١٧	٠٠٣٥	٠٠٥٢	٠٠٧٠	٠٠٨٧	٠١٠٥	٠١٢٢	٠١٤٠	٠١٥٧	٣	٦	٩	١٢	١٥
١	٠١٧٥	٠١٩٢	٠٢٠٩	٠٢٢٧	٠٢٤٤	٠٢٦٢	٠٢٧٩	٠٢٩٧	٠٣١٤	٠٣٣٢	٣	٦	٩	١٢	١٥
٢	٠٣٤٩	٠٣٦٦	٠٣٨٤	٠٤٠١	٠٤١٩	٠٤٣٦	٠٤٥٤	٠٤٧١	٠٤٨٨	٠٥٠٦	٣	٦	٩	١٢	١٥
٣	٠٥٢٣	٠٥٤١	٠٥٥٨	٠٥٧٦	٠٥٩٣	٠٦١٠	٠٦٢٨	٠٦٤٥	٠٦٦٣	٠٦٨٠	٣	٦	٩	١٢	١٥
٤	٠٦٩٨	٠٧١٥	٠٧٣٢	٠٧٥٠	٠٧٦٧	٠٧٨٥	٠٨٠٢	٠٨١٩	٠٨٣٧	٠٨٥٤	٣	٦	٩	١٢	١٥
٥	٠٨٧٢	٠٨٨٩	٠٩٠٦	٠٩٢٤	٠٩٤١	٠٩٥٨	٠٩٧٦	٠٩٩٣	١٠١١	١٠٢٨	٣	٦	٩	١٢	١٤
٦	١٠٤٥	١٠٦٣	١٠٨٠	١٠٩٧	١١١٥	١١٣٢	١١٤٩	١١٦٧	١١٨٤	١٢٠١	٣	٦	٩	١٢	١٤
٧	١٢١٩	١٢٣٦	١٢٥٣	١٢٧١	١٢٨٨	١٣٠٥	١٣٢٣	١٣٤٠	١٣٥٧	١٣٧٤	٣	٦	٩	١٢	١٤
٨	١٣٩٢	١٤٠٩	١٤٢٦	١٤٤٤	١٤٦١	١٤٧٨	١٤٩٥	١٥١٣	١٥٣٠	١٥٤٧	٣	٦	٩	١٢	١٤
٩	١٥٦٤	١٥٨٢	١٥٩٩	١٦١٦	١٦٣٣	١٦٥٠	١٦٦٨	١٦٨٥	١٧٠٢	١٧١٩	٣	٦	٩	١٢	١٤
١٠	١٧٣٦	١٧٥٤	١٧٧١	١٧٨٨	١٨٠٥	١٨٢٢	١٨٤٠	١٨٥٧	١٨٧٤	١٨٩١	٣	٦	٦	١٢	١٤
١١	١٩٠٨	١٩٢٥	١٩٤٢	١٩٥٩	١٩٧٧	١٩٩٤	٢٠١١	٢٠٢٨	٢٠٤٥	٢٠٦٢	٣	٦	٩	١١	١٤
١٢	٢٠٧٩	٢٠٩٦	٢١١٣	٢١٣٠	٢١٤٧	٢١٦٤	٢١٨١	٢١٩٨	٢٢١٥	٢٢٣٢	٣	٦	٩	١١	١٤
١٣	٢٢٥٠	٢٢٦٧	٢٢٨٤	٢٣٠٠	٢٣١٧	٢٣٣٤	٢٣٥١	٢٣٦٨	٢٣٨٥	٢٤٠٢	٣	٦	٨	١١	١٤
١٤	٢٤١٩	٢٤٣٦	٢٤٥٣	٢٤٧٠	٢٤٨٧	٢٥٠٤	٢٥٢١	٢٥٣٨	٢٥٥٤	٢٥٧١	٣	٦	٨	١١	١٤
١٥	٢٥٨٨	٢٦٠٥	٢٦٢٢	٢٦٣٩	٢٦٥٦	٢٦٧٢	٢٦٨٩	٢٧٠٦	٢٧٢٣	٢٧٤٠	٣	٦	٨	١١	١٤
١٦	٢٧٥٦	٢٧٧٣	٢٧٩٠	٢٨٠٧	٢٨٢٣	٢٨٤٠	٢٨٥٧	٢٨٧٤	٢٨٩٠	٢٩٠٧	٣	٦	٨	١١	١٤
١٧	٢٩٢٤	٢٩٤٠	٢٩٥٧	٢٩٧٤	٢٩٩٠	٣٠٠٧	٣٠٢٤	٣٠٤٠	٣٠٥٧	٣٠٧٤	٣	٦	٨	١١	١٤
١٨	٣٠٩٠	٣١٠٧	٣١٢٣	٣١٤٠	٣١٥٦	٣١٧٣	٣١٩٠	٣٢٠٦	٣٢٢٣	٣٢٣٩	٣	٦	٨	١١	١٤
١٩	٣٢٥٦	٣٢٧٢	٣٢٨٩	٣٣٠٥	٣٣٢٢	٣٣٣٨	٣٣٥٥	٣٣٧١	٣٣٨٧	٣٤٠٤	٣	٥	٨	١١	١٤
٢٠	٣٤٢٠	٣٤٣٧	٣٤٥٣	٣٤٦٩	٣٤٨٦	٣٥٠٢	٣٥١٨	٣٥٣٥	٣٥٥١	٣٥٦٧	٣	٥	٨	١١	١٤
٢١	٣٥٨٤	٣٦٠٠	٣٦١٦	٣٦٣٢	٣٦٤٩	٣٦٦٥	٣٦٨١	٣٦٩٧	٣٧١٤	٣٧٣٠	٣	٥	٨	١١	١٤
٢٢	٣٧٤٦	٣٧٦٢	٣٧٧٨	٣٧٩٥	٣٨١١	٣٨٢٧	٣٨٤٣	٣٨٥٩	٣٨٧٥	٣٨٩١	٣	٥	٨	١١	١٤
٢٣	٣٩٠٧	٣٩٢٣	٣٩٣٩	٣٩٥٥	٣٩٧١	٣٩٨٧	٤٠٠٣	٤٠١٩	٤٠٣٥	٤٠٥١	٣	٥	٨	١١	١٤
٢٤	٤٠٦٧	٤٠٨٣	٤٠٩٩	٤١١٥	٤١٣١	٤١٤٧	٤١٦٣	٤١٧٩	٤١٩٥	٤٢١٠	٣	٥	٨	١١	١٣
٢٥	٤٢٢٦	٤٢٤٢	٤٢٥٨	٤٢٧٤	٤٢٨٩	٤٣٠٥	٤٣٢١	٤٣٣٧	٤٣٥٢	٤٣٦٨	٣	٥	٨	١١	١٣
٢٦	٤٣٨٤	٤٣٩٩	٤٤١٥	٤٤٣١	٤٤٤٦	٤٤٦٢	٤٤٧٨	٤٤٩٣	٤٥٠٩	٤٥٢٤	٣	٥	٨	١٠	١٣
٢٧	٤٥٤٠	٤٥٥٥	٤٥٧١	٤٥٨٦	٤٦٠٢	٤٦١٧	٤٦٣٣	٤٦٤٨	٤٦٦٤	٤٦٧٩	٣	٥	٨	١٠	١٣
٢٨	٤٦٩٥	٤٧١٠	٤٧٢٥	٤٧٤١	٤٧٥٦	٤٧٧٢	٤٧٨٧	٤٨٠٢	٤٨١٨	٤٨٣٣	٣	٥	٨	١٠	١٣
٢٩	٤٨٤٨	٤٨٦٣	٤٨٧٩	٤٨٩٤	٤٩٠٩	٤٩٢٤	٤٩٣٩	٤٩٥٥	٤٩٧	٤٩٨٥	٣	٥	٨	١٠	١٣
٣٠	٥٠٠٠	٥٠١٥	٥٠٣٠	٥٠٤٥	٥٠٦٠	٥٠٧٥	٥٠٩٠	٥١٠٥	٥١٢٠	٥١٣٥	٣	٥	٨	١٠	١٣
٣١	٥١٥٠	٥١٦٥	٥١٨٠	٥١٩٥	٥٢١٠	٥٢٢٥	٥٢٤٠	٥٢٥٥	٥٢٧٠	٥٢٨٤	٢	٥	٧	١٠	١٢
٣٢	٥٢٩٩	٥٣١٤	٥٣٢٩	٥٣٤٤	٥٣٥٨	٥٣٧٣	٥٣٨٨	٥٤٠٢	٥٤١٧	٥٤٣٢	٢	٥	٧	١٠	١٢
٣٣	٥٤٤٦	٥٤٦١	٥٤٧٦	٥٤٩٠	٥٥٠٥	٥٥١٩	٥٥٣٤	٥٥٤٨	٥٥٦٣	٥٥٧٧	٢	٥	٧	١٠	١٣
٣٤	٥٥٩٢	٥٦٠٦	٥٦٢١	٥٦٣٥	٥٦٥٠	٥٦٦٤	٥٦٧٨	٥٦٩٣	٥٧٠٧	٥٧٢١	٢	٥	٧	١٠	١٢
٣٥	٥٧٣٦	٥٧٥٠	٥٧٦٤	٥٧٧٩	٥٧٩٣	٥٨٠٧	٥٨٢١	٥٨٣٥	٥٨٥٠	٥٨٦٤	٢	٥	٧	٩	١٢
٣٦	٥٨٧٨	٥٨٩٢	٥٩٠٦	٥٩٢٠	٥٩٣٤	٥٩٤٨	٥٩٦٢	٥٩٧٦	٥٩٩٠	٦٠٠٤	٢	٥	٧	٩	١٢
٣٧	٦٠١٨	٦٠٣٢	٦٠٤٦	٦٠٦٠	٦٠٧٤	٦٠٨٨	٦١٠١	٦١١٥	٦١٢٩	٦١٤٣	٢	٥	٧	٩	١٢
٣٨	٦١٥٧	٦١٧٠	٦١٨٤	٦١٩٨	٦٢١١	٦٢٢٥	٦٢٣٩	٦٢٥٢	٦٢٦٦	٦٢٨٠	٢	٥	٧	٩	١١
٣٩	٦٢٩٣	٦٣٠٧	٦٣٢٠	٦٣٣٤	٦٣٤٧	٦٣٦١	٦٣٧٤	٦٣٨٨	٦٤٠١	٦٤١٤	٢	٤	٧	٩	١١
٤٠	٦٤٢٨	٦٤٤١	٦٤٥٥	٦٤٦٨	٦٤٨١	٦٤٩٤	٦٥٠٨	٦٥٢١	٦٥٣٤	٦٥٤٧	٢	٤	٧	٩	١١
٤١	٦٥٦١	٦٥٧٤	٦٥٨٧	٦٦٠٠	٦٦١٣	٦٦٢٦	٦٦٣٩	٦٦٥٢	٦٦٦٥	٦٦٧٨	٢	٤	٧	٩	١١
٤٢	٦٦٩١	٦٧٠٤	٦٧١٧	٦٧٣٠	٦٧٤٣	٦٧٥٦	٦٧٦٩	٦٧٨٢	٦٧٩٤	٦٨٠٧	٢	٤	٦	٩	١١
٤٣	٦٨٢٠	٦٨٣٣	٦٨٤٥	٦٨٥٨	٦٨٧١	٦٨٨٤	٦٨٩٦	٦٩٠٩	٦٩٢١	٦٩٣٤	٢	٤	٦	٨	١١
٤٤	٦٩٤٧	٦٩٥٩	٦٩٧٢	٦٩٨٤	٦٩٩٧	٧٠٠٩	٧٠٢٢	٧٠٣٤	٧٠٤٦	٧٠٥٩	٢	٤	٦	٨	١٠

	٠َ	٩َ	١٢َ	١٨َ	٢٤َ	٣٠َ	٣٦َ	٤٢َ	٤٨َ	٥٤َ	فروق الدقائق ١	٢	٣	٤	٥
٤٥°	٧٠٧١	٧٠٨٣	٧٠٩٦	٧١٠٨	٧١٢٠	٧١٣٣	٧١٤٥	٧١٥٧	٧١٦٩	٧١٨١	٢	٤	٦	٨	١٠
٤٦	٧١٩٣	٧٢٠٦	٧٢١٨	٧٢٣٠	٧٢٤٢	٧٢٥٤	٧٢٦٦	٧٢٧٨	٧٢٩٠	٧٣٠٢	٢	٤	٦	٨	١٠
٤٧	٧٣١٤	٧٣٢٥	٧٣٣٧	٧٣٤٩	٧٣٦١	٧٣٧٣	٧٣٨٥	٧٣٩٦	٧٤٠٨	٧٤٢٠	٢	٤	٦	٨	١٠
٤٨	٧٤٣١	٧٤٤٣	٧٤٥٥	٧٤٦٦	٧٤٧٨	٧٤٩٠	٧٥٠١	٧٥١٣	٧٥٢٤	٧٥٣٦	٢	٤	٦	٨	١٠
٤٩	٧٥٤٧	٧٥٥٩	٧٥٧٠	٧٥٨١	٧٥٩٣	٧٦٠٤	٧٦١٥	٧٦٢٧	٧٦٣٨	٧٦٤٩	٢	٤	٦	٨	٩
٥٠	٧٦٦٠	٧٦٧٢	٧٦٨٣	٧٦٩٤	٧٧٠٥	٧٧١٦	٧٧٢٧	٧٧٣٨	٧٧٤٩	٧٧٦٠	٢	٤	٦	٧	٩
٥١	٧٧٧١	٧٧٨٢	٧٧٩٣	٧٨٠٤	٧٨١٥	٧٨٢٦	٧٨٣٧	٧٨٤٨	٧٨٥٩	٧٨٦٩	٢	٤	٥	٧	٩
٥٢	٧٨٨٠	٧٨٩١	٧٩٠٢	٧٩١٢	٧٩٢٣	٧٩٣٤	٧٩٤٤	٧٩٥٥	٧٩٦٥	٧٩٧٦	١	٤	٥	٧	٩
٥٣	٧٩٨٦	٧٩٩٧	٨٠٠٧	٨٠١٨	٨٠٢٨	٨٠٣٩	٨٠٤٩	٨٠٥٩	٨٠٧٠	٨٠٨٠	٢	٣	٥	٧	٩
٥٤	٨٠٩٠	٨١٠٠	٨١١١	٨١٢١	٨١٣١	٨١٤١	٨١٥١	٨١٦١	٨١٧١	٨١٨١	١	٣	٥	٧	٨
٥٥	٨١٩٢	٨٢٠٢	٨٢١١	٨٢٢١	٨٢٣١	٨٢٤١	٨٢٥١	٨٢٦١	٨٢٧١	٨٢٨١	٢	٣	٥	٧	٨
٥٦	٨٢٩٠	٨٣٠٠	٨٣١٠	٨٣٢٠	٨٣٢٩	٨٣٣٩	٨٣٤٨	٨٣٥٨	٨٣٦٨	٨٣٧٧	٢	٣	٥	٦	٨
٥٧	٨٣٨٧	٨٣٩٦	٨٤٠٦	٨٤١٥	٨٤٢٥	٨٤٣٤	٨٤٤٣	٨٤٥٣	٨٤٦٢	٨٤٧١	٢	٣	٥	٦	٨
٥٨	٨٤٨٠	٨٤٩٠	٨٤٩٩	٨٥٠٨	٨٥١٧	٨٥٢٦	٨٥٣٥	٨٥٤٥	٨٥٥٤	٨٥٦٣	٢	٣	٥	٦	٨
٥٩	٨٥٧٢	٨٥٨١	٨٥٩٠	٨٥٩٩	٨٦٠٧	٨٦١٦	٨٦٢٥	٨٦٣٤	٨٦٤٣	٨٦٥٢	١	٣	٤	٦	٧
٦٠	٨٦٦٠	٨٦٦٩	٨٦٧٨	٨٦٨٦	٨٦٩٥	٨٧٠٤	٨٧١٢	٨٧٢١	٨٧٢٩	٨٧٣٨	١	٣	٤	٦	٧
٦١	٨٧٤٦	٨٧٥٥	٨٧٦٣	٨٧٧٢	٨٧٨٠	٨٧٨٨	٨٧٩٧	٨٨٠٥	٨٨١٣	٨٨٢١	١	٣	٤	٦	٧
٦٢	٨٨٢٩	٨٨٣٨	٨٨٤٦	٨٨٥٤	٨٨٦٢	٨٨٧٠	٨٨٧٨	٨٨٨٦	٨٨٩٤	٨٩٠٢	١	٣	٤	٥	٧
٦٣	٨٩١٠	٨٩١٨	٨٩٢٥	٨٩٣٣	٨٩٤١	٨٩٤٩	٨٩٥٧	٨٩٦٥	٨٩٧٢	٨٩٨٠	١	٣	٤	٥	٦
٦٤	٨٩٨٨	٨٩٩٦	٩٠٠٣	٩٠١١	٩٠١٨	٩٠٢٦	٩٠٣٣	٩٠٤١	٩٠٤٨	٩٠٥٦	١	٢	٤	٥	٦
٦٥	٩٠٦٣	٩٠٧٠	٩٠٧٨	٩٠٨٥	٩٠٩٢	٩١٠٠	٩١٠٧	٩١١٤	٩١٢١	٩١٢٨	١	٢	٤	٥	٦
٦٦	٩١٣٥	٩١٤٣	٩١٥٠	٩١٥٧	٩١٦٤	٩١٧١	٩١٧٨	٩١٨٤	٩١٩١	٩١٩٨	١	٢	٣	٥	٦
٦٧	٩٢٠٥	٩٢١٢	٩٢١٩	٩٢٢٥	٩٢٣٢	٩٢٣٩	٩٢٤٥	٩٢٥٢	٩٢٥٩	٩٢٦٥	١	٢	٣	٤	٦
٦٨	٩٢٧٢	٩٢٧٨	٩٢٨٥	٩٢٩١	٩٢٩٨	٩٣٠٤	٩٣١١	٩٣١٧	٩٣٢٣	٩٣٣٠	١	٢	٣	٤	٥
٦٩	٩٣٣٦	٩٣٤٢	٩٣٤٨	٩٣٥٤	٩٣٦١	٩٣٦٧	٩٣٧٣	٩٣٧٩	٩٣٨٥	٩٣٩١	١	٢	٣	٤	٥
٧٠	٩٣٩٧	٩٤٠٣	٩٤٠٩	٩٤١٥	٩٤٢١	٩٤٢٦	٩٤٣٢	٩٤٣٨	٩٤٤٤	٩٤٤٩	١	٢	٣	٤	٥
٧١	٩٤٥٥	٩٤٦١	٩٤٦٦	٩٤٧٢	٩٤٧٨	٩٤٨٣	٩٤٨٩	٩٤٩٤	٩٥٠٠	٩٥٠٥	١	٢	٣	٤	٥
٧٢	٩٥١١	٩٥١٦	٩٥٢١	٩٥٢٧	٩٥٣٢	٩٥٣٧	٩٥٤٢	٩٥٤٨	٩٥٥٣	٩٥٥٨	١	٢	٣	٣	٤
٧٣	٩٥٦٣	٩٥٦٨	٩٥٧٣	٩٥٧٨	٩٥٨٣	٩٥٨٨	٩٥٩٣	٩٥٩٨	٩٦٠٣	٩٦٠٨	١	٢	٣	٣	٤
٧٤	٩٦١٣	٩٦١٧	٩٦٢٢	٩٦٢٧	٩٦٣٢	٩٦٣٦	٩٦٤١	٩٦٤٦	٩٦٥٠	٩٦٥٥	١	٢	٢	٣	٤
٧٥	٩٦٥٩	٩٦٦٤	٩٦٦٨	٩٦٧٣	٩٦٧٧	٩٦٨١	٩٦٨٦	٩٦٩٠	٩٦٩٤	٩٦٩٩	١	١	٢	٣	٤
٧٦	٩٧٠٣	٩٧٠٧	٩٧١١	٩٧١٥	٩٧٢٠	٩٧٢٤	٩٧٢٨	٩٧٣٢	٩٧٣٦	٩٧٤٠	١	١	٢	٣	٣
٧٧	٩٧٤٤	٩٧٤٨	٩٧٥١	٩٧٥٥	٩٧٥٩	٩٧٦٣	٩٧٦٧	٩٧٧٠	٩٧٧٤	٩٧٧٨	١	١	٢	٣	٣
٧٨	٩٧٨١	٩٧٨٥	٩٧٨٩	٩٧٩٢	٩٧٩٦	٩٧٩٩	٩٨٠٣	٩٨٠٦	٩٨١٠	٩٨١٣	١	١	٢	٢	٣
٧٩	٩٨١٦	٩٨٢٠	٩٨٢٣	٩٨٢٦	٩٨٢٩	٩٨٣٣	٩٨٣٦	٩٨٣٩	٩٨٤٢	٩٨٤٥	١	١	٢	٢	٣
٨٠	٩٨٤٨	٩٨٥١	٩٨٥٤	٩٨٥٧	٩٨٦٠	٩٨٦٣	٩٨٦٦	٩٨٦٩	٩٨٧١	٩٨٧٤	٠	١	١	٢	٢
٨١	٩٨٧٧	٩٨٨٠	٩٨٨٢	٩٨٨٥	٩٨٨٨	٩٨٩٠	٩٨٩٣	٩٨٩٥	٩٨٩٨	٩٩٠٠	٠	١	١	٢	٢
٨٢	٩٩٠٣	٩٩٠٥	٩٩٠٧	٩٩١٠	٩٩١٢	٩٩١٤	٩٩١٧	٩٩١٩	٩٩٢١	٩٩٢٣	٠	١	١	٢	٢
٨٣	٩٩٢٥	٩٩٢٨	٩٩٣٠	٩٩٣٢	٩٩٣٤	٩٩٣٦	٩٩٣٨	٩٩٤٠	٩٩٤٢	٩٩٤٣	٠	١	١	١	٢
٨٤	٩٩٤٥	٩٩٤٧	٩٩٤٩	٩٩٥١	٩٩٥٢	٩٩٥٤	٩٩٥٦	٩٩٥٧	٩٩٥٩	٩٩٦٠	٠	١	١	١	٢
٨٥	٩٩٦٢	٩٩٦٣	٩٩٦٥	٩٩٦٦	٩٩٦٨	٩٩٦٩	٩٩٧١	٩٩٧٢	٩٩٧٣	٩٩٧٤	٠	٠	١	١	١
٨٦	٩٩٧٦	٩٩٧٧	٩٩٧٨	٩٩٧٩	٩٩٨٠	٩٩٨١	٩٩٨٢	٩٩٨٣	٩٩٨٤	٩٩٨٥	٠	٠	١	١	١
٨٧	٩٩٨٦	٩٩٨٧	٩٩٨٨	٩٩٨٩	٩٩٩٠	٩٩٩٠	٩٩٩١	٩٩٩٢	٩٩٩٣	٩٩٩٣	٠	٠	٠	١	١
٨٨	٩٩٩٤	٩٩٩٥	٩٩٩٥	٩٩٩٦	٩٩٩٦	٩٩٩٧	٩٩٩٧	٩٩٩٧	٩٩٩٨	٩٩٩٨	٠	٠	٠	٠	٠
٨٩	٩٩٩٨	٩٩٩٩	٩٩٩٩	٩٩٩٩	٩٩٩٩	١,٠٠٠	١,٠٠٠	١,٠٠٠	١,٠٠٠	١,٠٠٠	٠	٠	٠	٠	٠

	٠′	٦′	١٢′	١٨′	٢٤′	٣٠′	٣٦′	٤٢′	٤٨′	٥٤′	فروق الدقائق				
											١	٢	٣	٤	٥
٤٥°	٧٠٧١	٧٠٨٣	٧٠٩٦	٧١٠٨	٧١٢٠	٧١٣٣	٧١٤٥	٧١٥٧	٧١٦٩	٧١٨١	٢	٤	٦	٨	١٠
٤٦	٧١٩٣	٧٢٠٦	٧٢١٨	٧٢٣٠	٧٢٤٢	٧٢٥٤	٧٢٦٦	٧٢٧٨	٧٢٩٠	٧٣٠٢	٢	٤	٦	٨	١٠
٤٧	٧٣١٤	٧٣٢٥	٧٣٣٧	٧٣٤٩	٧٣٦١	٧٣٧٣	٧٣٨٥	٧٣٩٦	٧٤٠٨	٧٤٢٠	٢	٤	٦	٨	١٠
٤٨	٧٤٣١	٧٤٤٣	٧٤٥٥	٧٤٦٦	٧٤٧٨	٧٤٩٠	٧٥٠١	٧٥١٣	٧٥٢٤	٧٥٣٦	٢	٤	٦	٨	١٠
٤٩	٧٥٤٧	٧٥٥٨	٧٥٧٠	٧٥٨١	٧٥٩٣	٧٦٠٤	٧٦١٥	٧٦٢٧	٧٦٣٨	٧٦٤٩	٢	٤	٦	٨	٩
٥٠	٧٦٦٠	٧٦٧٢	٧٦٨٣	٧٦٩٤	٧٧٠٥	٧٧١٦	٧٧٢٧	٧٧٣٨	٧٧٤٩	٧٧٦٠	٢	٤	٦	٧	٩
٥١	٧٧٧١	٧٧٨٢	٧٧٩٣	٧٨٠٤	٧٨١٥	٧٨٢٦	٧٨٣٧	٧٨٤٨	٧٨٥٩	٧٨٦٩	٢	٤	٥	٧	٩
٥٢	٧٨٨٠	٧٨٩١	٧٩٠٢	٧٩١٢	٧٩٢٣	٧٩٣٤	٧٩٤٤	٧٩٥٥	٧٩٦٥	٧٩٧٦	٢	٤	٥	٧	٩
٥٣	٧٩٨٦	٧٩٩٧	٨٠٠٧	٨٠١٨	٨٠٢٨	٨٠٣٩	٨٠٤٩	٨٠٥٩	٨٠٧٠	٨٠٨٠	٢	٣	٥	٧	٩
٥٤	٨٠٩٠	٨١٠٠	٨١١١	٨١٢١	٨١٣١	٨١٤١	٨١٥١	٨١٦١	٨١٧١	٨١٨١	٢	٣	٥	٧	٨
٥٥	٨١٩٢	٨٢٠٢	٨٢١١	٨٢٢١	٨٢٣١	٨٢٤١	٨٢٥١	٨٢٦١	٨٢٧١	٨٢٨١	٢	٣	٥	٧	٨
٥٦	٨٢٩٠	٨٣٠٠	٨٣١٠	٨٣٢٠	٨٣٢٩	٨٣٣٩	٨٣٤٨	٨٣٥٨	٨٣٦٨	٨٣٧٧	٢	٣	٥	٦	٨
٥٧	٨٣٨٧	٨٣٩٦	٨٤٠٦	٨٤١٥	٨٤٢٥	٨٤٣٤	٨٤٤٣	٨٤٥٣	٨٤٦٢	٨٤٧١	٢	٣	٥	٦	٨
٥٨	٨٤٨٠	٨٤٩٠	٨٤٩٩	٨٥٠٨	٨٥١٧	٨٥٢٦	٨٥٣٦	٨٥٤٥	٨٥٥٤	٨٥٦٣	٢	٣	٥	٦	٨
٥٩	٨٥٧٢	٨٥٨١	٨٥٩٠	٨٥٩٩	٨٦٠٧	٨٦١٦	٨٦٢٥	٨٦٣٤	٨٦٤٣	٨٦٥٢	١	٣	٤	٦	٧
٦٠	٨٦٦٠	٨٦٦٩	٨٦٧٨	٨٦٨٦	٨٦٩٥	٨٧٠٤	٨٧١٢	٨٧٢١	٨٧٢٩	٨٧٣٨	١	٣	٤	٦	٧
٦١	٨٧٤٦	٨٧٥٥	٨٧٦٣	٨٧٧١	٨٧٨٠	٨٧٨٨	٨٧٩٦	٨٨٠٥	٨٨١٣	٨٨٢١	١	٣	٤	٦	٧
٦٢	٨٨٢٩	٨٨٣٨	٨٨٤٦	٨٨٥٤	٨٨٦٢	٨٨٧٠	٨٨٧٨	٨٨٨٦	٨٨٩٤	٨٩٠٢	١	٣	٤	٥	٧
٦٣	٨٩١٠	٨٩١٨	٨٩٢٦	٨٩٣٤	٨٩٤٢	٨٩٤٩	٨٩٥٧	٨٩٦٥	٨٩٧٣	٨٩٨٠	١	٣	٤	٥	٦
٦٤	٨٩٨٨	٨٩٩٦	٩٠٠٣	٩٠١١	٩٠١٨	٩٠٢٦	٩٠٣٣	٩٠٤١	٩٠٤٨	٩٠٥٦	١	٣	٤	٥	٦
٦٥	٩٠٦٣	٩٠٧٠	٩٠٧٨	٩٠٨٥	٩٠٩٢	٩١٠٠	٩١٠٧	٩١١٤	٩١٢١	٩١٢٨	١	٢	٤	٥	٦
٦٦	٩١٣٥	٩١٤٣	٩١٥٠	٩١٥٧	٩١٦٤	٩١٧١	٩١٧٨	٩١٨٤	٩١٩١	٩١٩٨	١	٢	٣	٥	٦
٦٧	٩٢٠٥	٩٢١٢	٩٢١٩	٩٢٢٥	٩٢٣٢	٩٢٣٩	٩٢٤٥	٩٢٥٢	٩٢٥٩	٩٢٦٥	١	٢	٣	٤	٦
٦٨	٩٢٧٢	٩٢٧٨	٩٢٨٥	٩٢٩١	٩٢٩٨	٩٣٠٤	٩٣١١	٩٣١٧	٩٣٢٣	٩٣٣٠	١	٢	٣	٤	٥
٦٩	٩٣٣٦	٩٣٤٢	٩٣٤٨	٩٣٥٤	٩٣٦١	٩٣٦٧	٩٣٧٣	٩٣٧٩	٩٣٨٥	٩٣٩١	١	٢	٣	٤	٥
٧٠	٩٣٩٧	٩٤٠٣	٩٤٠٩	٩٤١٥	٩٤٢١	٩٤٢٦	٩٤٣٢	٩٤٣٨	٩٤٤٤	٩٤٤٩	١	٢	٣	٤	٥
٧١	٩٤٥٥	٩٤٦١	٩٤٦٦	٩٤٧٢	٩٤٧٨	٩٤٨٣	٩٤٨٩	٩٤٩٤	٩٥٠٠	٩٥٠٥	١	٢	٣	٤	٥
٧٢	٩٥١١	٩٥١٦	٩٥٢١	٩٥٢٧	٩٥٣٢	٩٥٣٧	٩٥٤٢	٩٥٤٨	٩٥٥٣	٩٥٥٨	١	٢	٣	٤	٤
٧٣	٩٥٦٣	٩٥٦٨	٩٥٧٣	٩٥٧٨	٩٥٨٣	٩٥٨٨	٩٥٩٣	٩٥٩٨	٩٦٠٣	٩٦٠٨	١	٢	٢	٣	٤
٧٤	٩٦١٣	٩٦١٧	٩٦٢٢	٩٦٢٧	٩٦٣٢	٩٦٣٦	٩٦٤١	٩٦٤٦	٩٦٥٠	٩٦٥٥	١	٢	٢	٣	٤
٧٥	٩٦٥٩	٩٦٦٤	٩٦٦٨	٩٦٧٣	٩٦٧٧	٩٦٨١	٩٦٨٦	٩٦٩٠	٩٦٩٤	٩٦٩٩	١	١	٢	٣	٤
٧٦	٩٧٠٣	٩٧٠٧	٩٧١١	٩٧١٥	٩٧٢٠	٩٧٢٤	٩٧٢٨	٩٧٣٢	٩٧٣٦	٩٧٤٠	١	١	٢	٣	٢
٧٧	٩٧٤٤	٩٧٤٨	٩٧٥١	٩٧٥٥	٩٧٥٩	٩٧٦٣	٩٧٦٧	٩٧٧٠	٩٧٧٤	٩٧٧٨	١	١	٢	٣	٣
٧٨	٩٧٨١	٩٧٨٥	٩٧٨٩	٩٧٩٢	٩٧٩٦	٩٧٩٩	٩٨٠٣	٩٨٠٦	٩٨١٠	٩٨١٣	١	١	٢	٢	٣
٧٩	٩٨١٦	٩٨٢٠	٩٨٢٣	٩٨٢٦	٩٨٢٩	٩٨٣٣	٩٨٣٦	٩٨٣٩	٩٨٤٢	٩٨٤٥	١	١	٢	٢	٣
٨٠	٩٨٤٨	٩٨٥١	٩٨٥٤	٩٨٥٧	٩٨٦٠	٩٨٦٣	٩٨٦٦	٩٨٦٩	٩٨٧١	٩٨٧٤	٠	١	١	٢	٢
٨١	٩٨٧٧	٩٨٨٠	٩٨٨٢	٩٨٨٥	٩٨٨٨	٩٨٩٠	٩٨٩٣	٩٨٩٥	٩٨٩٨	٩٩٠٠	٠	١	١	٢	٢
٨٢	٩٩٠٣	٩٩٠٥	٩٩٠٧	٩٩١٠	٩٩١٢	٩٩١٤	٩٩١٧	٩٩١٩	٩٩٢١	٩٩٢٣	٠	١	١	٢	٢
٨٣	٩٩٢٥	٩٩٢٨	٩٩٣٠	٩٩٣٢	٩٩٣٤	٩٩٣٦	٩٩٣٨	٩٩٤٠	٩٩٤٢	٩٩٤٣	٠	١	١	١	٢
٨٤	٩٩٤٥	٩٩٤٧	٩٩٤٩	٩٩٥١	٩٩٥٢	٩٩٥٤	٩٩٥٦	٩٩٥٧	٩٩٥٩	٩٩٦٠	٠	١	١	١	٢
٨٥	٩٩٦٢	٩٩٦٣	٩٩٦٥	٩٩٦٦	٩٩٦٨	٩٩٦٩	٩٩٧١	٩٩٧٢	٩٩٧٣	٩٩٧٤	٠	٠	١	١	١
٨٦	٩٩٧٦	٩٩٧٧	٩٩٧٨	٩٩٧٩	٩٩٨٠	٩٩٨١	٩٩٨٢	٩٩٨٣	٩٩٨٤	٩٩٨٥	٠	٠	١	١	١
٨٧	٩٩٨٦	٩٩٨٧	٩٩٨٨	٩٩٨٩	٩٩٩٠	٩٩٩٠	٩٩٩١	٩٩٩٢	٩٩٩٣	٩٩٩٣	٠	٠	٠	١	١
٨٨	٩٩٩٤	٩٩٩٥	٩٩٩٥	٩٩٩٦	٩٩٩٦	٩٩٩٧	٩٩٩٧	٩٩٩٧	٩٩٩٨	٩٩٩٨	٠	٠	٠	٠	٠
٨٩	٩٩٩٨	٩٩٩٩	٩٩٩٩	٩٩٩٩	٩٩٩٩	١٫٠٠٠	١٫٠٠٠	١٫٠٠٠	١٫٠٠٠	١٫٠٠٠	٠	٠	٠	٠	٠

جدول لوغاريتمات الأعداد

	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	الفروق								
											١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
١٠	٠٠٠٠	٠٠٤٣	٠٠٨٦	٠١٢٨	٠١٧٠	٠٢١٢	٠٢٥٣	٠٢٩٤	٠٣٣٤	٠٣٧٤	٤	٨	١٢	١٧	٢١	٢٥	٢٩	٣٣	٣٧
١١	٠٤١٤	٠٤٥٣	٠٤٩٢	٠٥٣١	٠٥٦٩	٠٦٠٧	٠٦٤٥	٠٦٨٢	٠٧١٩	٠٧٥٥	٤	٨	١١	١٥	١٩	٢٣	٢٦	٣٠	٣٤
١٢	٠٧٩٢	٠٨٢٨	٠٨٦٤	٠٨٩٩	٠٩٣٤	٠٩٦٩	١٠٠٤	١٠٣٨	١٠٧٢	١١٠٦	٣	٧	١٠	١٤	١٧	٢١	٢٤	٢٨	٣١
١٣	١١٣٩	١١٧٣	١٢٠٦	١٢٣٩	١٢٧١	١٣٠٣	١٣٣٥	١٣٦٧	١٣٩٩	١٤٣٠	٣	٦	١٠	١٣	١٦	١٩	٢٣	٢٦	٢٩
١٤	١٤٦١	١٤٩٢	١٥٢٣	١٥٥٣	١٥٨٤	١٦١٤	١٦٤٤	١٦٧٣	١٧٠٣	١٧٣٢	٣	٦	٩	١٢	١٥	١٨	٢١	٢٤	٢٧
١٥	١٧٦١	١٧٩٠	١٨١٨	١٨٤٧	١٨٧٥	١٩٠٣	١٩٣١	١٩٥٩	١٩٨٧	٢٠١٤	٣	٦	٨	١١	١٤	١٧	٢٠	٢٢	٢٥
١٦	٢٠٤١	٢٠٦٨	٢٠٩٥	٢١٢٢	٢١٤٨	٢١٧٥	٢٢٠١	٢٢٢٧	٢٢٥٣	٢٢٧٩	٣	٥	٨	١١	١٣	١٦	١٨	٢١	٢٤
١٧	٢٣٠٤	٢٣٣٠	٢٣٥٥	٢٣٨٠	٢٤٠٥	٢٤٣٠	٢٤٥٥	٢٤٨٠	٢٥٠٤	٢٥٢٩	٢	٥	٧	١٠	١٢	١٥	١٧	٢٠	٢٢
١٨	٢٥٥٣	٢٥٧٧	٢٦٠١	٢٦٢٥	٢٦٤٨	٢٦٧٢	٢٦٩٥	٢٧١٨	٢٧٤٢	٢٧٦٥	٢	٥	٧	٩	١٢	١٤	١٦	١٩	٢١
١٩	٢٧٨٨	٢٨١٠	٢٨٣٣	٢٨٥٦	٢٨٧٨	٢٩٠٠	٢٩٢٣	٢٩٤٥	٢٩٦٧	٢٩٨٩	٢	٤	٧	٩	١١	١٣	١٦	١٨	٢٠
٢٠	٣٠١٠	٣٠٣٢	٣٠٥٤	٣٠٧٥	٣٠٩٦	٣١١٨	٣١٣٩	٣١٦٠	٣١٨١	٣٢٠١	٢	٤	٦	٨	١١	١٣	١٥	١٧	١٩
٢١	٣٢٢٢	٣٢٤٣	٣٢٦٣	٣٢٨٤	٣٣٠٤	٣٣٢٤	٣٣٤٥	٣٣٦٥	٣٣٨٥	٣٤٠٤	٢	٤	٦	٨	١٠	١٢	١٤	١٦	١٨
٢٢	٣٤٢٤	٣٤٤٤	٣٤٦٤	٣٤٨٣	٣٥٠٢	٣٥٢٢	٣٥٤١	٣٥٦٠	٣٥٧٩	٣٥٩٨	٢	٤	٦	٨	١٠	١٢	١٤	١٥	١٧
٢٣	٣٦١٧	٣٦٣٦	٣٦٥٥	٣٦٧٤	٣٦٩٢	٣٧١١	٣٧٢٩	٣٧٤٧	٣٧٦٦	٣٧٨٤	٢	٤	٦	٧	٩	١١	١٣	١٥	١٧
٢٤	٣٨٠٢	٣٨٢٠	٣٨٣٨	٣٨٥٦	٣٨٧٤	٣٨٩٢	٣٩٠٩	٣٩٢٧	٣٩٤٥	٣٩٦٢	٢	٤	٥	٧	٩	١١	١٢	١٤	١٦
٢٥	٣٩٧٩	٣٩٩٧	٤٠١٤	٤٠٣١	٤٠٤٨	٤٠٦٥	٤٠٨٢	٤٠٩٩	٤١١٦	٤١٣٣	٢	٣	٥	٧	٩	١٠	١٢	١٤	١٥
٢٦	٤١٥٠	٤١٦٦	٤١٨٣	٤٢٠٠	٤٢١٦	٤٢٣٢	٤٢٤٩	٤٢٦٥	٤٢٨١	٤٢٩٨	٢	٣	٥	٧	٨	١٠	١١	١٣	١٥
٢٧	٤٣١٤	٤٣٣٠	٤٣٤٦	٤٣٦٢	٤٣٧٨	٤٣٩٣	٤٤٠٩	٤٤٢٥	٤٤٤٠	٤٤٥٦	٢	٣	٥	٦	٨	٩	١١	١٣	١٤
٢٨	٤٤٧٢	٤٤٨٧	٤٥٠٢	٤٥١٨	٤٥٣٣	٤٥٤٨	٤٥٦٤	٤٥٧٩	٤٥٩٤	٤٦٠٩	٢	٣	٥	٦	٨	٩	١١	١٢	١٤
٢٩	٤٦٢٤	٤٦٣٩	٤٦٥٤	٤٦٦٩	٤٦٨٣	٤٦٩٨	٤٧١٣	٤٧٢٨	٤٧٤٢	٤٧٥٧	١	٣	٤	٦	٧	٩	١٠	١٢	١٣
٣٠	٤٧٧١	٤٧٨٦	٤٨٠٠	٤٨١٤	٤٨٢٩	٤٨٤٣	٤٨٥٧	٤٨٧١	٤٨٨٦	٤٩٠٠	١	٣	٤	٦	٧	٩	١٠	١١	١٣
٣١	٤٩١٤	٤٩٢٨	٤٩٤٢	٤٩٥٥	٤٩٦٩	٤٩٨٣	٤٩٩٧	٥٠١١	٥٠٢٤	٥٠٣٨	١	٣	٤	٦	٧	٨	١٠	١١	١٢
٣٢	٥٠٥١	٥٠٦٥	٥٠٧٩	٥٠٩٢	٥١٠٥	٥١١٩	٥١٣٢	٥١٤٥	٥١٥٩	٥١٧٢	١	٣	٤	٥	٧	٨	٩	١١	١٢
٣٣	٥١٨٥	٥١٩٨	٥٢١١	٥٢٢٤	٥٢٣٧	٥٢٥٠	٥٢٦٣	٥٢٧٦	٥٢٨٩	٥٣٠٢	١	٣	٤	٥	٦	٨	٩	١٠	١٢
٣٤	٥٣١٥	٥٣٢٨	٥٣٤٠	٥٣٥٣	٥٣٦٦	٥٣٧٨	٥٣٩١	٥٤٠٣	٥٤١٦	٥٤٢٨	١	٣	٤	٥	٦	٨	٩	١٠	١١
٣٥	٥٤٤١	٥٤٥٣	٥٤٦٥	٥٤٧٨	٥٤٩٠	٥٥٠٢	٥٥١٤	٥٥٢٧	٥٥٣٩	٥٥٥١	١	٢	٤	٥	٦	٧	٩	١٠	١١
٣٦	٥٥٦٣	٥٥٧٥	٥٥٨٧	٥٥٩٩	٥٦١١	٥٦٢٣	٥٦٣٥	٥٦٤٧	٥٦٥٨	٥٦٧٠	١	٢	٤	٥	٦	٧	٨	١٠	١١
٣٧	٥٦٨٢	٥٦٩٤	٥٧٠٥	٥٧١٧	٥٧٢٩	٥٧٤٠	٥٧٥٢	٥٧٦٣	٥٧٧٥	٥٧٨٦	١	٢	٣	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
٣٨	٥٧٩٨	٥٨٠٩	٥٨٢١	٥٨٣٢	٥٨٤٣	٥٨٥٥	٥٨٦٦	٥٨٧٧	٥٨٨٨	٥٨٩٩	١	٢	٣	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
٣٩	٥٩١١	٥٩٢٢	٥٩٣٣	٥٩٤٤	٥٩٥٥	٥٩٦٦	٥٩٧٧	٥٩٨٨	٥٩٩٩	٦٠١٠	١	٢	٣	٤	٥	٧	٨	٩	١٠
٤٠	٦٠٢١	٦٠٣١	٦٠٤٢	٦٠٥٣	٦٠٦٤	٦٠٧٥	٦٠٨٥	٦٠٩٦	٦١٠٧	٦١١٧	١	٢	٣	٤	٥	٦	٨	٩	١٠
٤١	٦١٢٨	٦١٣٨	٦١٤٩	٦١٦٠	٦١٧٠	٦١٨٠	٦١٩١	٦٢٠١	٦٢١٢	٦٢٢٢	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
٤٢	٦٢٣٢	٦٢٤٣	٦٢٥٣	٦٢٦٣	٦٢٧٤	٦٢٨٤	٦٢٩٤	٦٣٠٤	٦٣١٤	٦٣٢٥	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
٤٣	٦٣٣٥	٦٣٤٥	٦٣٥٥	٦٣٦٥	٦٣٧٥	٦٣٨٥	٦٣٩٥	٦٤٠٥	٦٤١٥	٦٤٢٥	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
٤٤	٦٤٣٥	٦٤٤٤	٦٤٥٤	٦٤٦٤	٦٤٧٤	٦٤٨٤	٦٤٩٣	٦٥٠٣	٦٥١٣	٦٥٢٢	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
٤٥	٦٥٣٢	٦٥٤٢	٦٥٥١	٦٥٦١	٦٥٧١	٦٥٨٠	٦٥٩٠	٦٥٩٩	٦٦٠٩	٦٦١٨	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
٤٦	٦٦٢٨	٦٦٣٧	٦٦٤٦	٦٦٥٦	٦٦٦٥	٦٦٧٥	٦٦٨٤	٦٦٩٣	٦٧٠٢	٦٧١٢	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٧	٨
٤٧	٦٧٢١	٦٧٣٠	٦٧٣٩	٦٧٤٩	٦٧٥٨	٦٧٦٧	٦٧٧٦	٦٧٨٥	٦٧٩٤	٦٨٠٣	١	٢	٣	٤	٥	٥	٦	٧	٨
٤٨	٦٨١٢	٦٨٢١	٦٨٣٠	٦٨٣٩	٦٨٤٨	٦٨٥٧	٦٨٦٦	٦٨٧٥	٦٨٨٤	٦٨٩٣	١	٢	٣	٤	٤	٥	٦	٧	٨
٤٩	٦٩٠٢	٦٩١١	٦٩٢٠	٦٩٢٨	٦٩٣٧	٦٩٤٦	٦٩٥٥	٦٩٦٤	٦٩٧٢	٦٩٨١	١	٢	٣	٤	٤	٥	٦	٧	٨
٥٠	٦٩٩٠	٦٩٩٨	٧٠٠٧	٧٠١٦	٧٠٢٤	٧٠٣٣	٧٠٤٢	٧٠٥٠	٧٠٥٩	٧٠٦٧	١	٢	٣	٣	٤	٥	٦	٧	٨
٥١	٧٠٧٦	٧٠٨٤	٧٠٩٣	٧١٠١	٧١١٠	٧١١٨	٧١٢٦	٧١٣٥	٧١٤٣	٧١٥٢	١	٢	٣	٣	٤	٥	٦	٧	٨
٥٢	٧١٦٠	٧١٦٨	٧١٧٧	٧١٨٥	٧١٩٣	٧٢٠٢	٧٢١٠	٧٢١٨	٧٢٢٦	٧٢٣٥	١	٢	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٧
٥٣	٧٢٤٣	٧٢٥١	٧٢٥٩	٧٢٦٧	٧٢٧٥	٧٢٨٤	٧٢٩٢	٧٣٠٠	٧٣٠٨	٧٣١٦	١	٢	٢	٣	٤	٥	٦	٦	٧
٥٤	٧٣٢٤	٧٣٣٢	٧٣٤٠	٧٣٤٨	٧٣٥٦	٧٣٦٤	٧٣٧٢	٧٣٨٠	٧٣٨٨	٧٣٩٦	١	٢	٢	٣	٤	٥	٦	٦	٧

(تابع) جدول لوغاريتمات الأعداد

العدد	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	الفروق ١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
٥٥	٧٤٠٤	٧٤١٢	٧٤١٩	٧٤٢٧	٧٤٣٥	٧٤٤٣	٧٤٥١	٧٤٥٩	٧٤٦٦	٧٤٧٤	١	٢	٢	٣	٤	٥	٥	٦	٧
٥٦	٧٤٨٢	٧٤٩٠	٧٤٩٧	٧٥٠٥	٧٥١٣	٧٥٢٠	٧٥٢٨	٧٥٣٦	٧٥٤٣	٧٥٥١	١	٢	٢	٣	٤	٥	٥	٦	٧
٥٧	٧٥٥٩	٧٥٦٦	٧٥٧٤	٧٥٨٢	٧٥٨٩	٧٥٩٧	٧٦٠٤	٧٦١٢	٧٦١٩	٧٦٢٧	١	٢	٢	٣	٤	٥	٥	٦	٧
٥٨	٧٦٣٤	٧٦٤٢	٧٦٤٩	٧٦٥٧	٧٦٦٤	٧٦٧٢	٧٦٧٩	٧٦٨٦	٧٦٩٤	٧٧٠١	١	١	٢	٣	٤	٤	٥	٦	٧
٥٩	٧٧٠٩	٧٧١٦	٧٧٢٣	٧٧٣١	٧٧٣٨	٧٧٤٥	٧٧٥٢	٧٧٦٠	٧٧٦٧	٧٧٧٤	١	١	٢	٣	٤	٤	٥	٦	٧
٦٠	٧٧٨٢	٧٧٨٩	٧٧٩٦	٧٨٠٣	٧٨١٠	٧٨١٨	٧٨٢٥	٧٨٣٢	٧٨٣٩	٧٨٤٦	١	١	٢	٣	٤	٤	٥	٦	٦
٦١	٧٨٥٣	٧٨٦٠	٧٨٦٨	٧٨٧٥	٧٨٨٢	٧٨٨٩	٧٨٩٦	٧٩٠٣	٧٩١٠	٧٩١٧	١	١	٢	٣	٤	٤	٥	٦	٦
٦٢	٧٩٢٤	٧٩٣١	٧٩٣٨	٧٩٤٥	٧٩٥٢	٧٩٥٩	٧٩٦٦	٧٩٧٣	٧٩٨٠	٧٩٨٧	١	١	٢	٣	٤	٤	٥	٦	٦
٦٣	٧٩٩٣	٨٠٠٠	٨٠٠٧	٨٠١٤	٨٠٢١	٨٠٢٨	٨٠٣٥	٨٠٤١	٨٠٤٨	٨٠٥٥	١	١	٢	٣	٣	٤	٥	٥	٦
٦٤	٨٠٦٢	٨٠٦٩	٨٠٧٥	٨٠٨٢	٨٠٨٩	٨٠٩٦	٨١٠٢	٨١٠٩	٨١١٦	٨١٢٢	١	١	٢	٣	٣	٤	٥	٥	٦
٦٥	٨١٢٩	٨١٣٦	٨١٤٢	٨١٤٩	٨١٥٦	٨١٦٢	٨١٦٩	٨١٧٦	٨١٨٢	٨١٨٩	١	١	٢	٣	٣	٤	٥	٥	٦
٦٦	٨١٩٥	٨٢٠٢	٨٢٠٩	٨٢١٥	٨٢٢٢	٨٢٢٨	٨٢٣٥	٨٢٤١	٨٢٤٨	٨٢٥٤	١	١	٢	٣	٣	٤	٥	٥	٦
٦٧	٨٢٦١	٨٢٦٧	٨٢٧٤	٨٢٨٠	٨٢٨٧	٨٢٩٣	٨٢٩٩	٨٣٠٦	٨٣١٢	٨٣١٩	١	١	٢	٣	٣	٤	٥	٥	٦
٦٨	٨٣٢٥	٨٣٣١	٨٣٣٨	٨٣٤٤	٨٣٥١	٨٣٥٧	٨٣٦٣	٨٣٧٠	٨٣٧٦	٨٣٨٢	١	١	٢	٣	٣	٤	٤	٥	٦
٦٩	٨٣٨٨	٨٣٩٥	٨٤٠١	٨٤٠٧	٨٤١٤	٨٤٢٠	٨٤٢٦	٨٤٣٢	٨٤٣٩	٨٤٤٥	١	١	٢	٢	٣	٤	٤	٥	٦
٧٠	٨٤٥١	٨٤٥٧	٨٤٦٣	٨٤٧٠	٨٤٧٦	٨٤٨٢	٨٤٨٨	٨٤٩٤	٨٥٠٠	٨٥٠٦	١	١	٢	٢	٣	٤	٤	٥	٦
٧١	٨٥١٣	٨٥١٩	٨٥٢٥	٨٥٣١	٨٥٣٧	٨٥٤٣	٨٥٤٩	٨٥٥٥	٨٥٦١	٨٥٦٧	١	١	٢	٢	٣	٤	٤	٥	٥
٧٢	٨٥٧٣	٨٥٧٩	٨٥٨٥	٨٥٩١	٨٥٩٧	٨٦٠٣	٨٦٠٩	٨٦١٥	٨٦٢١	٨٦٢٧	١	١	٢	٢	٣	٤	٤	٥	٥
٧٣	٨٦٣٣	٨٦٣٩	٨٦٤٥	٨٦٥١	٨٦٥٧	٨٦٦٣	٨٦٦٩	٨٦٧٥	٨٦٨١	٨٦٨٦	١	١	٢	٢	٣	٤	٤	٥	٥
٧٤	٨٦٩٢	٨٦٩٨	٨٧٠٤	٨٧١٠	٨٧١٦	٨٧٢٢	٨٧٢٧	٨٧٣٣	٨٧٣٩	٨٧٤٥	١	١	٢	٢	٣	٤	٤	٥	٥
٧٥	٨٧٥١	٨٧٥٦	٨٧٦٢	٨٧٦٨	٨٧٧٤	٨٧٧٩	٨٧٨٥	٨٧٩١	٨٧٩٧	٨٨٠٢	١	١	٢	٢	٣	٣	٤	٥	٥
٧٦	٨٨٠٨	٨٨١٤	٨٨٢٠	٨٨٢٥	٨٨٣١	٨٨٣٧	٨٨٤٢	٨٨٤٨	٨٨٥٤	٨٨٥٩	١	١	٢	٢	٣	٣	٤	٥	٥
٧٧	٨٨٦٥	٨٨٧١	٨٨٧٦	٨٨٨٢	٨٨٨٧	٨٨٩٣	٨٨٩٩	٨٩٠٤	٨٩١٠	٨٩١٥	١	١	٢	٢	٣	٣	٤	٤	٥
٧٨	٨٩٢١	٨٩٢٧	٨٩٣٢	٨٩٣٨	٨٩٤٣	٨٩٤٩	٨٩٥٤	٨٩٦٠	٨٩٦٥	٨٩٧١	١	١	٢	٢	٣	٣	٤	٤	٥
٧٩	٨٩٧٦	٨٩٨٢	٨٩٨٧	٨٩٩٣	٨٩٩٨	٩٠٠٤	٩٠٠٩	٩٠١٥	٩٠٢٠	٩٠٢٥	١	١	٢	٢	٣	٣	٤	٤	٥
٨٠	٩٠٣١	٩٠٣٦	٩٠٤٢	٩٠٤٧	٩٠٥٣	٩٠٥٨	٩٠٦٣	٩٠٦٩	٩٠٧٤	٩٠٧٩	١	١	٢	٢	٣	٣	٤	٤	٥
٨١	٩٠٨٥	٩٠٩٠	٩٠٩٦	٩١٠١	٩١٠٦	٩١١٢	٩١١٧	٩١٢٢	٩١٢٨	٩١٣٣	١	١	٢	٢	٣	٣	٤	٤	٥
٨٢	٩١٣٨	٩١٤٣	٩١٤٩	٩١٥٤	٩١٥٩	٩١٦٥	٩١٧٠	٩١٧٥	٩١٨٠	٩١٨٦	١	١	٢	٢	٣	٣	٤	٤	٥
٨٣	٩١٩١	٩١٩٦	٩٢٠١	٩٢٠٦	٩٢١٢	٩٢١٧	٩٢٢٢	٩٢٢٧	٩٢٣٢	٩٢٣٨	١	١	٢	٢	٣	٣	٤	٤	٥
٨٤	٩٢٤٣	٩٢٤٨	٩٢٥٣	٩٢٥٨	٩٢٦٣	٩٢٦٩	٩٢٧٤	٩٢٧٩	٩٢٨٤	٩٢٨٩	١	١	٢	٢	٣	٣	٤	٤	٥
٨٥	٩٢٩٤	٩٢٩٩	٩٣٠٤	٩٣٠٩	٩٣١٥	٩٣٢٠	٩٣٢٥	٩٣٣٠	٩٣٣٥	٩٣٤٠	١	١	٢	٢	٣	٣	٤	٤	٥
٨٦	٩٣٤٥	٩٣٥٠	٩٣٥٥	٩٣٦٠	٩٣٦٥	٩٣٧٠	٩٣٧٥	٩٣٨٠	٩٣٨٥	٩٣٩٠	١	١	٢	٢	٣	٣	٤	٤	٥
٨٧	٩٣٩٥	٩٤٠٠	٩٤٠٥	٩٤١٠	٩٤١٥	٩٤٢٠	٩٤٢٥	٩٤٣٠	٩٤٣٥	٩٤٤٠	٠	١	١	٢	٢	٣	٣	٤	٤
٨٨	٩٤٤٥	٩٤٥٠	٩٤٥٥	٩٤٦٠	٩٤٦٥	٩٤٦٩	٩٤٧٤	٩٤٧٩	٩٤٨٤	٩٤٨٩	٠	١	١	٢	٢	٣	٣	٤	٤
٨٩	٩٤٩٤	٩٤٩٩	٩٥٠٤	٩٥٠٩	٩٥١٣	٩٥١٨	٩٥٢٣	٩٥٢٨	٩٥٣٣	٩٥٣٨	٠	١	١	٢	٢	٣	٣	٤	٤
٩٠	٩٥٤٢	٩٥٤٧	٩٥٥٢	٩٥٥٧	٩٥٦٢	٩٥٦٦	٩٥٧١	٩٥٧٦	٩٥٨١	٩٥٨٦	٠	١	١	٢	٢	٣	٣	٤	٤
٩١	٩٥٩٠	٩٥٩٥	٩٦٠٠	٩٦٠٥	٩٦٠٩	٩٦١٤	٩٦١٩	٩٦٢٤	٩٦٢٨	٩٦٣٣	٠	١	١	٢	٢	٣	٣	٤	٤
٩٢	٩٦٣٨	٩٦٤٣	٩٦٤٧	٩٦٥٢	٩٦٥٧	٩٦٦١	٩٦٦٦	٩٦٧١	٩٦٧٥	٩٦٨٠	٠	١	١	٢	٢	٣	٣	٤	٤
٩٣	٩٦٨٥	٩٦٨٩	٩٦٩٤	٩٦٩٩	٩٧٠٣	٩٧٠٨	٩٧١٣	٩٧١٧	٩٧٢٢	٩٧٢٧	٠	١	١	٢	٢	٣	٣	٤	٤
٩٤	٩٧٣١	٩٧٣٦	٩٧٤١	٩٧٤٥	٩٧٥٠	٩٧٥٤	٩٧٥٩	٩٧٦٣	٩٧٦٨	٩٧٧٣	٠	١	١	٢	٢	٣	٣	٤	٤
٩٥	٩٧٧٧	٩٧٨٢	٩٧٨٦	٩٧٩١	٩٧٩٥	٩٨٠٠	٩٨٠٥	٩٨٠٩	٩٨١٤	٩٨١٨	٠	١	١	٢	٢	٣	٣	٤	٤
٩٦	٩٨٢٣	٩٨٢٧	٩٨٣٢	٩٨٣٦	٩٨٤١	٩٨٤٥	٩٨٥٠	٩٨٥٤	٩٨٥٩	٩٨٦٣	٠	١	١	٢	٢	٣	٣	٤	٤
٩٧	٩٨٦٨	٩٨٧٢	٩٨٧٧	٩٨٨١	٩٨٨٦	٩٨٩٠	٩٨٩٤	٩٨٩٩	٩٩٠٣	٩٩٠٨	٠	١	١	٢	٢	٣	٣	٤	٤
٩٨	٩٩١٢	٩٩١٧	٩٩٢١	٩٩٢٦	٩٩٣٠	٩٩٣٤	٩٩٣٩	٩٩٤٣	٩٩٤٨	٩٩٥٢	٠	١	١	٢	٢	٣	٣	٤	٤
٩٩	٩٩٥٦	٩٩٦١	٩٩٦٥	٩٩٦٩	٩٩٧٤	٩٩٧٨	٩٩٨٣	٩٩٨٧	٩٩٩١	٩٩٩٦	٠	١	١	٢	٢	٣	٣	٤	٤

مربعات الأعداد

العدد	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	جدول الفروق ١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
١٠	١٠٠٫٠٠	١٠٢٫٠١	١٠٤٫٠٤	١٠٦٫٠٩	١٠٨٫١٦	—	—	—	—	—	٢٠	٤١	٦١	٨٢	١٠٢	١٢٣	١٤٣	١٦٤	١٨٤
	—	—	—	—	—	١١٠٫٢٥	١١٢٫٣٦	١١٤٫٤٩	١١٦٫٦٤	١١٨٫٨١	٢١	٤٣	٦٤	٨٦	١٠٧	١٢٩	١٥٠	١٧٢	١٩٣
١١	١٢١٫٠٠	١٢٣٫٢١	١٢٥٫٤٤	١٢٧٫٦٩	١٢٩٫٩٦	—	—	—	—	—	٢٢	٤٥	٦٧	٩٠	١١٢	١٣٥	١٥٧	١٨٠	٢٠٢
	—	—	—	—	—	١٣٢٫٢٥	١٣٤٫٥٦	١٣٦٫٨٩	١٣٩٫٢٤	١٤١٫٦١	٢٣	٤٧	٧٠	٩٤	١١٧	١٤١	١٦٤	١٨٨	٢١١
١٢	١٤٤٫٠٠	١٤٦٫٤١	١٤٨٫٨٤	١٥١٫٢٩	١٥٣٫٧٦	—	—	—	—	—	٢٤	٤٩	٧٣	٩٨	١٢٢	١٤٧	١٧١	١٩٦	٢٢٠
	—	—	—	—	—	١٥٦٫٢٥	١٥٨٫٧٦	١٦١٫٢٩	١٦٣٫٨٤	١٦٦٫٤١	٢٥	٥١	٧٦	١٠٢	١٢٧	١٥٣	١٧٨	٢٠٤	٢٢٩
١٣	١٦٩٫٠٠	١٧١٫٦١	١٧٤٫٢٤	١٧٦٫٨٩	١٧٩٫٥٦	—	—	—	—	—	٢٦	٥٣	٧٩	١٠٦	١٣٢	١٥٩	١٨٥	٢١٢	٢٣٨
	—	—	—	—	—	١٨٢٫٢٥	١٨٤٫٩٦	١٨٧٫٦٩	١٩٠٫٤٤	١٩٣٫٢١	٢٧	٥٥	٨٢	١١٠	١٣٧	١٦٥	١٩٢	٢٢٠	٢٤٧
١٤	١٩٦٫٠٠	١٩٨٫٨١	٢٠١٫٦٤	٢٠٤٫٤٩	٢٠٧٫٣٦	—	—	—	—	—	٢٨	٥٧	٨٥	١١٤	١٤٢	١٧١	١٩٩	٢٢٨	٢٥٦
	—	—	—	—	—	٢١٠٫٢٥	٢١٣٫١٦	٢١٦٫٠٩	٢١٩٫٠٤	٢٢٢٫٠١	٢٩	٥٩	٨٨	١١٨	١٤٧	١٧٧	٢٠٦	٢٣٦	٢٦٥
١٥	٢٢٥٫٠٠	٢٢٨٫٠١	٢٣١٫٠٤	٢٣٤٫٠٩	٢٣٧٫١٦	—	—	—	—	—	٣٠	٦١	٩١	١٢٢	١٥٢	١٨٣	٢١٣	٢٤٤	٢٧٤
	—	—	—	—	—	٢٤٠٫٢٥	٢٤٣٫٣٦	٢٤٦٫٤٩	٢٤٩٫٦٤	٢٥٢٫٨١	٣١	٦٣	٩٤	١٢٦	١٥٧	١٨٩	٢٢٠	٢٥٢	٢٨٣
١٦	٢٥٦٫٠٠	٢٥٩٫٢١	٢٦٢٫٤٤	٢٦٥٫٦٩	٢٦٨٫٩٦	—	—	—	—	—	٣٢	٦٥	٩٧	١٣٠	١٦٢	١٩٥	٢٢٧	٢٦٠	٢٩٢
	—	—	—	—	—	٢٧٢٫٢٥	٢٧٥٫٥٦	٢٧٨٫٨٩	٢٨٢٫٢٤	٢٨٥٫٦١	٣٣	٦٧	١٠٠	١٣٤	١٦٧	٢٠١	٢٣٤	٢٦٨	٣٠١
١٧	٢٨٩٫٠٠	٢٩٢٫٤١	٢٩٥٫٨٤	٢٩٩٫٢٩	٣٠٢٫٧٦	—	—	—	—	—	٣٤	٦٩	١٠٣	١٣٨	١٧٢	٢٠٧	٢٤١	٢٧٦	٣١٠
	—	—	—	—	—	٣٠٦٫٢٥	٣٠٩٫٧٦	٣١٣٫٢٩	٣١٦٫٨٤	٣٢٠٫٤١	٣٥	٧١	١٠٦	١٤٢	١٧٧	٢١٣	٢٤٨	٢٨٤	٣١٩
١٨	٣٢٤٫٠٠	٣٢٧٫٦١	٣٣١٫٢٤	٣٣٤٫٨٩	٣٣٨٫٥٦	—	—	—	—	—	٣٦	٧٣	١٠٩	١٤٦	١٨٢	٢١٩	٢٥٥	٢٩٢	٣٢٨
	—	—	—	—	—	٣٤٢٫٢٥	٣٤٥٫٩٦	٣٤٩٫٦٩	٣٥٣٫٤٤	٣٥٧٫٢١	٣٧	٧٥	١١٢	١٥٠	١٨٧	٢٢٥	٢٦٢	٣٠٠	٣٣٧
١٩	٣٦١٫٠٠	٣٦٤٫٨١	٣٦٨٫٦٤	٣٧٢٫٤٩	٣٧٦٫٣٦	—	—	—	—	—	٣٨	٧٧	١١٥	١٥٤	١٩٢	٢٣١	٢٦٩	٣٠٨	٣٤٦
	—	—	—	—	—	٣٨٠٫٢٥	٣٨٤٫١٦	٣٨٨٫٠٩	٣٩٢٫٠٤	٣٩٦٫٠١	٣٩	٧٩	١١٨	١٥٨	١٩٧	٢٣٧	٢٧٦	٣١٦	٣٥٥
٢٠	٤٠٠٫٠٠	٤٠٤٫٠١	٤٠٨٫٠٤	٤١٢٫٠٩	٤١٦٫١٦	—	—	—	—	—	٤٠	٨١	١٢١	١٦٢	٢٠٢	٢٤٣	٢٨٣	٣٢٤	٣٦٤
	—	—	—	—	—	٤٢٠٫٢٥	٤٢٤٫٣٦	٤٢٨٫٤٩	٤٣٢٫٦٤	٤٣٦٫٨١	٤١	٨٣	١٢٤	١٦٦	٢٠٧	٢٤٩	٢٩٠	٣٣٢	٣٧٣
٢١	٤٤١٫٠٠	٤٤٥٫٢١	٤٤٩٫٤٤	٤٥٣٫٦٩	٤٥٧٫٩٦	—	—	—	—	—	٤٢	٨٥	١٢٧	١٧٠	٢١٢	٢٥٥	٢٩٧	٣٤٠	٣٨٢
	—	—	—	—	—	٤٦٢٫٢٥	٤٦٦٫٥٦	٤٧٠٫٨٩	٤٧٥٫٢٤	٤٧٩٫٦١	٤٣	٨٧	١٣٠	١٧٤	٢١٧	٢٦١	٣٠٤	٣٤٨	٣٩١
٢٢	٤٨٤٫٠٠	٤٨٨٫٤١	٤٩٢٫٨٤	٤٩٧٫٢٩	٥٠١٫٧٦	—	—	—	—	—	٤٤	٨٩	١٣٣	١٧٨	٢٢٢	٢٦٧	٣١١	٣٥٦	٤٠٠
	—	—	—	—	—	٥٠٦٫٢٥	٥١٠٫٧٦	٥١٥٫٢٩	٥١٩٫٨٤	٥٢٤٫٤١	٤٥	٩١	١٣٦	١٨٢	٢٢٧	٢٧٣	٣١٨	٣٦٤	٤٠٩
٢٣	٥٢٩٫٠٠	٥٣٣٫٦١	٥٣٨٫٢٤	٥٤٢٫٨٩	٥٤٧٫٥٦	—	—	—	—	—	٤٦	٩٣	١٣٩	١٨٦	٢٣٢	٢٧٩	٣٢٥	٣٧٢	٤١٨
	—	—	—	—	—	٥٥٢٫٢٥	٥٥٦٫٩٦	٥٦١٫٦٩	٥٦٦٫٤٤	٥٧١٫٢١	٤٧	٩٥	١٤٢	١٩٠	٢٣٧	٢٨٥	٣٣٢	٣٨٠	٤٢٧
٢٤	٥٧٦٫٠٠	٥٨٠٫٨١	٥٨٥٫٦٤	٥٩٠٫٤٩	٥٩٥٫٣٦	—	—	—	—	—	٤٨	٩٧	١٤٥	١٩٤	٢٤٢	٢٩١	٣٣٩	٣٨٨	٤٣٦
	—	—	—	—	—	٦٠٠٫٢٥	٦٠٥٫١٦	٦١٠٫٠٩	٦١٥٫٠٤	٦٢٠٫٠١	٤٩	٩٩	١٤٨	١٩٨	٢٤٧	٢٩٧	٣٤٦	٣٩٦	٤٤٥
٢٥	٦٢٥٫٠٠	٦٣٠٫٠١	٦٣٥٫٠٤	٦٤٠٫٠٩	٦٤٥٫١٦	—	—	—	—	—	٥٠	١٠١	١٥١	٢٠٢	٢٥٢	٣٠٣	٣٥٣	٤٠٤	٤٥٤
	—	—	—	—	—	٦٥٠٫٢٥	٦٥٥٫٣٦	٦٦٠٫٤٩	٦٦٥٫٦٤	٦٧٠٫٨١	٥١	١٠٣	١٥٤	٢٠٦	٢٥٧	٣٠٩	٣٦٠	٤١٢	٤٦٣
٢٦	٦٧٦٫٠٠	٦٨١٫٢١	٦٨٦٫٤٤	٦٩١٫٦٩	٦٩٦٫٩٦	—	—	—	—	—	٥٢	١٠٥	١٥٧	٢١٠	٢٦٢	٣١٥	٣٦٧	٤٢٠	٤٧٢
	—	—	—	—	—	٧٠٢٫٢٥	٧٠٧٫٥٦	٧١٢٫٨٩	٧١٨٫٢٤	٧٢٣٫٦١	٥٣	١٠٧	١٦٠	٢١٤	٢٦٧	٣٢١	٣٧٤	٤٢٨	٤٨١
٢٧	٧٢٩٫٠٠	٧٣٤٫٤١	٧٣٩٫٨٤	٧٤٥٫٢٩	٧٥٠٫٧٦	—	—	—	—	—	٥٤	١٠٩	١٦٣	٢١٨	٢٧٢	٣٢٧	٣٨١	٤٣٦	٤٩٠
	—	—	—	—	—	٧٥٦٫٢٥	٧٦١٫٧٦	٧٦٧٫٢٩	٧٧٢٫٨٤	٧٧٨٫٤١	٥٥	١١١	١٦٦	٢٢٢	٢٧٧	٣٣٣	٣٨٨	٤٤٤	٤٩٩
٢٨	٧٨٤٫٠٠	٧٨٩٫٦١	٧٩٥٫٢٤	٨٠٠٫٨٩	٨٠٦٫٥٦	—	—	—	—	—	٥٦	١١٣	١٦٩	٢٢٦	٢٨٢	٣٣٩	٣٩٥	٤٥٢	٥٠٨
	—	—	—	—	—	٨١٢٫٢٥	٨١٧٫٩٦	٨٢٣٫٦٩	٨٢٩٫٤٤	٨٣٥٫٢١	٥٧	١١٥	١٧٢	٢٣٠	٢٨٧	٣٤٥	٤٠٢	٤٦٠	٥١٧
٢٩	٨٤١٫٠٠	٨٤٦٫٨١	٨٥٢٫٦٤	٨٥٨٫٤٩	٨٦٤٫٣٦	—	—	—	—	—	٥٨	١١٧	١٧٥	٢٣٤	٢٩٢	٣٥١	٤٠٩	٤٦٨	٥٢٦
	—	—	—	—	—	٨٧٠٫٢٥	٨٧٦٫١٦	٨٨٢٫٠٩	٨٨٨٫٠٤	٨٩٤٫٠١	٥٩	١١٩	١٧٨	٢٣٨	٢٩٧	٣٥٧	٤١٦	٤٧٦	٥٣٥
٣٠	٩٠٠٫٠٠	٩٠٦٫٠١	٩١٢٫٠٤	٩١٨٫٠٩	٩٢٤٫١٦	—	—	—	—	—	٦٠	١٢١	١٨١	٢٤٢	٣٠٢	٣٦٣	٤٢٣	٤٨٤	٥٤٤
	—	—	—	—	—	٩٣٠٫٢٥	٩٣٦٫٣٦	٩٤٢٫٤٩	٩٤٨٫٦٤	٩٥٤٫٨١	٦١	١٢٣	١٨٤	٢٤٦	٣٠٧	٣٦٩	٤٣٠	٤٩٢	٥٥٣
٣١	٩٦١٫٠٠	٩٦٧٫٢١	٩٧٣٫٤٤	٩٧٩٫٦٩	٩٨٥٫٩٦	—	—	—	—	—	٦٢	١٢٥	١٨٧	٢٥٠	٣١٢	٣٧٥	٤٣٧	٥٠٠	٥٦٢
	—	—	—	—	—	٩٩٢٫٢٥	٩٩٨٫٥٦	١٠٠٤٫٨٩	١٠١١٫٢٤	١٠١٧٫٦١	٦٣	١٢٧	١٩٠	٢٥٤	٣١٧	٣٨١	٤٤٤	٥٠٨	٥٧١
٣٢	١٠٢٤٫٠	١٠٣٠٫٤	١٠٣٦٫٨	١٠٤٣٫٣	١٠٤٩٫٨	١٠٥٦٫٣	١٠٦٢٫٨	١٠٦٩٫٣	١٠٧٥٫٨	١٠٨٢٫٤	٦	١٣	١٩	٢٦	٣٢	٣٩	٤٥	٥٢	٥٩
٣٣	١٠٨٩٫٠	١٠٩٥٫٦	١١٠٢٫٢	١١٠٨٫٩	١١١٥٫٦	١١٢٢٫٣	١١٢٩٫٠	١١٣٥٫٧	١١٤٢٫٤	١١٤٩٫٢	٧	١٣	[illegible]	٢٧	٣٣	٤٠	٤٧	٥٤	٦٠
٣٤	١١٥٦٫٠	١١٦٢٫٨	١١٦٩٫٦	١١٧٦٫٥	١١٨٣٫٤	١١٩٠٫٣	١١٩٧٫٢	١٢٠٤٫١	١٢١١٫٠	١٢١٨٫٠	٧	١٤	٢١	٢٧	٣٤	٤١	٤٨	٥٥	٦٢
٣٥	١٢٢٥٫٠	١٢٣٢٫٠	١٢٣٩٫٠	١٢٤٦٫١	١٢٥٣٫٢	١٢٦٠٫٣	١٢٦٧٫٤	١٢٧٤٫٥	١٢٨١٫٦	١٢٨٨٫٨	٧	١٤	٢١	٢٨	٣٥	٤٢	٥٠	٥٧	٦٤
٣٦	١٢٩٦٫٠	١٣٠٣٫٢	١٣١٠٫٤	١٣١٧٫٧	١٣٢٥٫٠	١٣٣٢٫٣	١٣٣٩٫٦	١٣٤٦٫٩	١٣٥٤٫٢	١٣٦١٫٦	٧	١٥	٢٢	٢٩	٣٦	٤٤	٥١	٥٨	٦٦
٣٧	١٣٦٩٫٠	١٣٧٦٫٤	١٣٨٣٫٨	١٣٩١٫٣	١٣٩٨٫٨	١٤٠٦٫٣	١٤١٣٫٨	١٤٢١٫٣	١٤٢٨٫٨	١٤٣٦٫٤	٧	١٥	٢٢	٣٠	٣٧	٤٥	٥٢	٦٠	٦٨
٣٨	١٤٤٤٫٠	١٤٥١٫٦	١٤٥٩٫٢	١٤٦٦٫٩	١٤٧٤٫٦	١٤٨٢٫٣	١٤٩٠٫٠	١٤٩٧٫٧	١٥٠٥٫٤	١٥١٣٫٢	٨	١٥	٢٣	٣١	٣٨	٤٦	٥٤	٦٢	٦٩
٣٩	١٥٢١٫٠	١٥٢٨٫٨	١٥٣٦٫٦	١٥٤٤٫٥	١٥٥٢٫٤	١٥٦٠٫٣	١٥٦٨٫٢	١٥٧٦٫١	١٥٨٤٫٠	١٥٩٢٫٠	٨	١٦	٢٤	٣١	٣٩	٤٧	٥٥	٦٣	٧١
٤٠	١٦٠٠٫٠	١٦٠٨٫٠	١٦١٦٫٠	١٦٢٤٫١	١٦٣٢٫٢	١٦٤٠٫٣	١٦٤٨٫٤	١٦٥٦٫٥	١٦٦٤٫٦	١٦٧٢٫٨	٨	١٦	٢٤	٣٢	٤٠	٤٨	٥٧	٦٥	٧٣
٤١	١٦٨١٫٠	١٦٨٩٫٢	١٦٩٧٫٤	١٧٠٥٫٧	١٧١٤٫٠	١٧٢٢٫٣	١٧٣٠٫٦	١٧٣٨٫٩	١٧٤٧٫٢	١٧٥٥٫٦	٨	١٧	٢٥	٣٣	٤١	٥٠	٥٨	٦٦	٧٥
٤٢	١٧٦٤٫٠	١٧٧٢٫٤	١٧٨٠٫٨	١٧٨٩٫٣	١٧٩٧٫٨	١٨٠٦٫٣	١٨١٤٫٨	١٨٢٣٫٣	١٨٣١٫٨	١٨٤٠٫٤	٨	١٧	٢٥	٣٤	٤٢	٥١	٥٩	٦٨	٧٧
٤٣	١٨٤٩٫٠	١٨٥٧٫٦	١٨٦٦٫٢	١٨٧٤٫٩	١٨٨٣٫٦	١٨٩٢٫٣	١٩٠١٫٠	١٩٠٩٫٧	١٩١٨٫٤	١٩٢٧٫٢	٩	١٧	٢٦	٣٥	٤٣	٥٢	٦١	٧٠	٧٨
٤٤	١٩٣٦٫٠	١٩٤٤٫٨	١٩٥٣٫٦	١٩٦٢٫٥	١٩٧١٫٤	١٩٨٠٫٣	١٩٨٩٫٢	١٩٩٨٫١	٢٠٠٧٫٠	٢٠١٦٫٠	٩	١٨	٢٧	٣٥	٤٤	٥٣	٦٢	٧١	٨٠

(تابع) مربعات الأعداد

العدد	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	جدول الفروق								
											١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
٤,٥	٢٠,٢٥٠٠	٢٠,٣٤٠١	٢٠,٤٣٠٤	٢٠,٥٢٠٩	٢٠,٦١١٦	٢٠,٧٠٢٥	٢٠,٧٩٣٦	٢٠,٨٨٤٩	٢٠,٩٧٦٤	٢١,٠٦٨١	٩	١٨	٢٧	٣٦	٤٥	٥٤	٦٤	٧٣	٨٢
٤,٦	٢١,١٦٠٠	٢١,٢٥٢١	٢١,٣٤٤٤	٢١,٤٣٦٩	٢١,٥٢٩٦	٢١,٦٢٢٥	٢١,٧١٥٦	٢١,٨٠٨٩	٢١,٩٠٢٤	٢١,٩٩٦١	٩	١٩	٢٨	٣٧	٤٦	٥٦	٦٥	٧٤	٨٤
٤,٧	٢٢,٠٩٠٠	٢٢,١٨٤١	٢٢,٢٧٨٤	٢٢,٣٧٢٩	٢٢,٤٦٧٦	٢٢,٥٦٢٥	٢٢,٦٥٧٦	٢٢,٧٥٢٩	٢٢,٨٤٨٤	٢٢,٩٤٤١	٩	١٩	٢٨	٣٨	٤٧	٥٧	٦٦	٧٦	٨٦
٤,٨	٢٣,٠٤٠٠	٢٣,١٣٦١	٢٣,٢٣٢٤	٢٣,٣٢٨٩	٢٣,٤٢٥٦	٢٣,٥٢٢٥	٢٣,٦١٩٦	٢٣,٧١٦٩	٢٣,٨١٤٤	٢٣,٩١٢١	١٠	١٩	٢٩	٣٩	٤٨	٥٨	٦٨	٧٨	٨٧
٤,٩	٢٤,٠١٠٠	٢٤,١٠٨١	٢٤,٢٠٦٤	٢٤,٣٠٤٩	٢٤,٤٠٣٦	٢٤,٥٠٢٥	٢٤,٦٠١٦	٢٤,٧٠٠٩	٢٤,٨٠٠٤	٢٤,٩٠٠١	١٠	٢٠	٣٠	٣٩	٤٩	٥٩	٦٩	٧٩	٨٩
٥,٠	٢٥,٠٠٠٠	٢٥,١٠٠١	٢٥,٢٠٠٤	٢٥,٣٠٠٩	٢٥,٤٠١٦	٢٥,٥٠٢٥	٢٥,٦٠٣٦	٢٥,٧٠٤٩	٢٥,٨٠٦٤	٢٥,٩٠٨١	١٠	٢٠	٣٠	٤٠	٥٠	٦٠	٧١	٨١	٩١
٥,١	٢٦,٠١٠٠	٢٦,١١٢١	٢٦,٢١٤٤	٢٦,٣١٦٩	٢٦,٤١٩٦	٢٦,٥٢٢٥	٢٦,٦٢٥٦	٢٦,٧٢٨٩	٢٦,٨٣٢٤	٢٦,٩٣٦١	١٠	٢١	٣١	٤١	٥١	٦٢	٧٢	٨٢	٩٣
٥,٢	٢٧,٠٤٠٠	٢٧,١٤٤١	٢٧,٢٤٨٤	٢٧,٣٥٢٩	٢٧,٤٥٧٦	٢٧,٥٦٢٥	٢٧,٦٦٧٦	٢٧,٧٧٢٩	٢٧,٨٧٨٤	٢٧,٩٨٤١	١٠	٢١	٣١	٤٢	٥٢	٦٣	٧٣	٨٤	٩٥
٥,٣	٢٨,٠٩٠٠	٢٨,١٩٦١	٢٨,٣٠٢٤	٢٨,٤٠٨٩	٢٨,٥١٥٦	٢٨,٦٢٢٥	٢٨,٧٢٩٦	٢٨,٨٣٦٩	٢٨,٩٤٤٤	٢٩,٠٥٢١	١١	٢١	٣٢	٤٣	٥٣	٦٤	٧٥	٨٦	٩٦
٥,٤	٢٩,١٦٠٠	٢٩,٢٦٨١	٢٩,٣٧٦٤	٢٩,٤٨٤٩	٢٩,٥٩٣٦	٢٩,٧٠٢٥	٢٩,٨١١٦	٢٩,٩٢٠٩	٣٠,٠٣٠٤	٣٠,١٤٠١	١١	٢٢	٣٣	٤٤	٥٤	٦٥	٧٦	٨٧	٩٨
٥,٥	٣٠,٢٥٠٠	٣٠,٣٦٠١	٣٠,٤٧٠٤	٣٠,٥٨٠٩	٣٠,٦٩١٦	٣٠,٨٠٢٥	٣٠,٩١٣٦	٣١,٠٢٤٩	٣١,١٣٦٤	٣١,٢٤٨١	١١	٢٢	٣٣	٤٤	٥٥	٦٧	٧٨	٨٩	١٠٠
٥,٦	٣١,٣٦٠٠	٣١,٤٧٢١	٣١,٥٨٤٤	٣١,٦٩٦٩	٣١,٨٠٩٦	٣١,٩٢٢٥	٣٢,٠٣٥٦	٣٢,١٤٨٩	٣٢,٢٦٢٤	٣٢,٣٧٦١	١١	٢٣	٣٤	٤٥	٥٦	٦٨	٧٩	٩٠	١٠٢
٥,٧	٣٢,٤٩٠٠	٣٢,٦٠٤١	٣٢,٧١٨٤	٣٢,٨٣٢٩	٣٢,٩٤٧٦	٣٣,٠٦٢٥	٣٣,١٧٧٦	٣٣,٢٩٢٩	٣٣,٤٠٨٤	٣٣,٥٢٤١	١١	٢٣	٣٤	٤٦	٥٧	٦٩	٨٠	٩٢	١٠٤
٥,٨	٣٣,٦٤٠٠	٣٣,٧٥٦١	٣٣,٨٧٢٤	٣٣,٩٨٨٩	٣٤,١٠٥٦	٣٤,٢٢٢٥	٣٤,٣٣٩٦	٣٤,٤٥٦٩	٣٤,٥٧٤٤	٣٤,٦٩٢١	١٢	٢٣	٣٥	٤٧	٥٨	٧٠	٨٢	٩٤	١٠٥
٥,٩	٣٤,٨١٠٠	٣٤,٩٢٨١	٣٥,٠٤٦٤	٣٥,١٦٤٩	٣٥,٢٨٣٦	٣٥,٤٠٢٥	٣٥,٥٢١٦	٣٥,٦٤٠٩	٣٥,٧٦٠٤	٣٥,٨٨٠١	١٢	٢٤	٣٦	٤٧	٥٩	٧١	٨٣	٩٥	١٠٧
٦,٠	٣٦,٠٠٠٠	٣٦,١٢٠١	٣٦,٢٤٠٤	٣٦,٣٦٠٩	٣٦,٤٨١٦	٣٦,٦٠٢٥	٣٦,٧٢٣٦	٣٦,٨٤٤٩	٣٦,٩٦٦٤	٣٧,٠٨٨١	١٢	٢٤	٣٦	٤٨	٦٠	٧٣	٨٥	٩٧	١٠٩
٦,١	٣٧,٢١٠٠	٣٧,٣٣٢١	٣٧,٤٥٤٤	٣٧,٥٧٦٩	٣٧,٦٩٩٦	٣٧,٨٢٢٥	٣٧,٩٤٥٦	٣٨,٠٦٨٩	٣٨,١٩٢٤	٣٨,٣١٦١	١٢	٢٥	٣٧	٤٩	٦١	٧٤	٨٦	٩٨	١١١
٦,٢	٣٨,٤٤٠٠	٣٨,٥٦٤١	٣٨,٦٨٨٤	٣٨,٨١٢٩	٣٨,٩٣٧٦	٣٩,٠٦٢٥	٣٩,١٨٧٦	٣٩,٣١٢٩	٣٩,٤٣٨٤	٣٩,٥٦٤١	١٣	٢٥	٣٨	٥٠	٦٣	٧٥	٨٨	١٠٠	١١٣
٦,٣	٣٩,٦٩٠٠	٣٩,٨١٦١	٣٩,٩٤٢٤	٤٠,٠٦٨٩	٤٠,١٩٥٦	٤٠,٣٢٢٥	٤٠,٤٤٩٦	٤٠,٥٧٦٩	٤٠,٧٠٤٤	٤٠,٨٣٢١	١٣	٢٥	٣٨	٥١	٦٣	٧٦	٨٩	١٠٢	١١٤
٦,٤	٤٠,٩٦٠٠	٤١,٠٨٨١	٤١,٢١٦٤	٤١,٣٤٤٩	٤١,٤٧٣٦	٤١,٦٠٢٥	٤١,٧٣١٦	٤١,٨٦٠٩	٤١,٩٩٠٤	٤٢,١٢٠١	١٣	٢٦	٣٩	٥١	٦٤	٧٧	٩٠	١٠٣	١١٦
٦,٥	٤٢,٢٥٠٠	٤٢,٣٨٠١	٤٢,٥١٠٤	٤٢,٦٤٠٩	٤٢,٧٧١٦	٤٢,٩٠٢٥	٤٣,٠٣٣٦	٤٣,١٦٤٩	٤٣,٢٩٦٤	٤٣,٤٢٨١	١٣	٢٦	٣٩	٥٢	٦٥	٧٨	٩٢	١٠٥	١١٨
٦,٦	٤٣,٥٦٠٠	٤٣,٦٩٢١	٤٣,٨٢٤٤	٤٣,٩٥٦٩	٤٤,٠٨٩٦	٤٤,٢٢٢٥	٤٤,٣٥٥٦	٤٤,٤٨٨٩	٤٤,٦٢٢٤	٤٤,٧٥٦١	١٣	٢٧	٤٠	٥٣	٦٦	٨٠	٩٣	١٠٦	١٢٠
٦,٧	٤٤,٨٩٠٠	٤٥,٠٢٤١	٤٥,١٥٨٤	٤٥,٢٩٢٩	٤٥,٤٢٧٦	٤٥,٥٦٢٥	٤٥,٦٩٧٦	٤٥,٨٣٢٩	٤٥,٩٦٨٤	٤٦,١٠٤١	١٣	٢٧	٤٠	٥٤	٦٧	٨١	٩٤	١٠٨	١٢٢
٦,٨	٤٦,٢٤٠٠	٤٦,٣٧٦١	٤٦,٥١٢٤	٤٦,٦٤٨٩	٤٦,٧٨٥٦	٤٦,٩٢٢٥	٤٧,٠٥٩٦	٤٧,١٩٦٩	٤٧,٣٣٤٤	٤٧,٤٧٢١	١٤	٢٧	٤١	٥٥	٦٨	٨٢	٩٦	١١٠	١٢٣
٦,٩	٤٧,٦١٠٠	٤٧,٧٤٨١	٤٧,٨٨٦٤	٤٨,٠٢٤٩	٤٨,١٦٣٦	٤٨,٣٠٢٥	٤٨,٤٤١٦	٤٨,٥٨٠٩	٤٨,٧٢٠٤	٤٨,٨٦٠١	١٤	٢٨	٤٢	٥٥	٦٩	٨٣	٩٧	١١١	١٢٥
٧,٠	٤٩,٠٠٠٠	٤٩,١٤٠١	٤٩,٢٨٠٤	٤٩,٤٢٠٩	٤٩,٥٦١٦	٤٩,٧٠٢٥	٤٩,٨٤٣٦	٤٩,٩٨٤٩	٥٠,١٢٦٤	٥٠,٢٦٨١	١٤	٢٨	٤٢	٥٦	٧٠	٨٤	٩٩	١١٣	١٢٧
٧,١	٥٠,٤١٠٠	٥٠,٥٥٢١	٥٠,٦٩٤٤	٥٠,٨٣٦٩	٥٠,٩٧٩٦	٥١,١٢٢٥	٥١,٢٦٥٦	٥١,٤٠٨٩	٥١,٥٥٢٤	٥١,٦٩٦١	١٤	٢٩	٤٣	٥٧	٧١	٨٦	١٠٠	١١٤	١٢٩
٧,٢	٥١,٨٤٠٠	٥١,٩٨٤١	٥٢,١٢٨٤	٥٢,٢٧٢٩	٥٢,٤١٧٦	٥٢,٥٦٢٥	٥٢,٧٠٧٦	٥٢,٨٥٢٩	٥٢,٩٩٨٤	٥٣,١٤٤١	١٤	٢٩	٤٣	٥٨	٧٢	٨٧	١٠١	١١٦	١٣١
٧,٣	٥٣,٢٩٠٠	٥٣,٤٣٦١	٥٣,٥٨٢٤	٥٣,٧٢٨٩	٥٣,٨٧٥٦	٥٤,٠٢٢٥	٥٤,١٦٩٦	٥٤,٣١٦٩	٥٤,٤٦٤٤	٥٤,٦١٢١	١٥	٢٩	٤٤	٥٩	٧٣	٨٨	١٠٣	١١٨	١٣٣
٧,٤	٥٤,٧٦٠٠	٥٤,٩٠٨١	٥٥,٠٥٦٤	٥٥,٢٠٤٩	٥٥,٣٥٣٦	٥٥,٥٠٢٥	٥٥,٦٥١٦	٥٥,٨٠٠٩	٥٥,٩٥٠٤	٥٦,١٠٠١	١٥	٣٠	٤٥	٥٩	٧٤	٨٩	١٠٤	١١٩	١٣٤
٧,٥	٥٦,٢٥٠٠	٥٦,٤٠٠١	٥٦,٥٥٠٤	٥٦,٧٠٠٩	٥٦,٨٥١٦	٥٧,٠٠٢٥	٥٧,١٥٣٦	٥٧,٣٠٤٩	٥٧,٤٥٦٤	٥٧,٦٠٨١	١٥	٣٠	٤٥	٦٠	٧٥	٩٠	١٠٦	١٢١	١٣٦
٧,٦	٥٧,٧٦٠٠	٥٧,٩١٢١	٥٨,٠٦٤٤	٥٨,٢١٦٩	٥٨,٣٦٩٦	٥٨,٥٢٢٥	٥٨,٦٧٥٦	٥٨,٨٢٨٩	٥٨,٩٨٢٤	٥٩,١٣٦١	١٥	٣١	٤٦	٦١	٧٦	٩٢	١٠٧	١٢٣	١٣٨
٧,٧	٥٩,٢٩٠٠	٥٩,٤٤٤١	٥٩,٥٩٨٤	٥٩,٧٥٢٩	٥٩,٩٠٧٦	٦٠,٠٦٢٥	٦٠,٢١٧٦	٦٠,٣٧٢٩	٦٠,٥٢٨٤	٦٠,٦٨٤١	١٥	٣١	٤٦	٦٢	٧٧	٩٣	١٠٨	١٢٤	١٤٠
٧,٨	٦٠,٨٤٠٠	٦٠,٩٩٦١	٦١,١٥٢٤	٦١,٣٠٨٩	٦١,٤٦٥٦	٦١,٦٢٢٥	٦١,٧٧٩٦	٦١,٩٣٦٩	٦٢,٠٩٤٤	٦٢,٢٥٢١	١٦	٣١	٤٧	٦٣	٧٨	٩٤	١١٠	١٢٦	١٤١
٧,٩	٦٢,٤١٠٠	٦٢,٥٦٨١	٦٢,٧٢٦٤	٦٢,٨٨٤٩	٦٣,٠٤٣٦	٦٣,٢٠٢٥	٦٣,٣٦١٦	٦٣,٥٢٠٩	٦٣,٦٨٠٤	٦٣,٨٤٠١	١٦	٣٢	٤٨	٦٣	٧٩	٩٥	١١١	١٢٧	١٤٣
٨,٠	٦٤,٠٠٠٠	٦٤,١٦٠١	٦٤,٣٢٠٤	٦٤,٤٨٠٩	٦٤,٦٤١٦	٦٤,٨٠٢٥	٦٤,٩٦٣٦	٦٥,١٢٤٩	٦٥,٢٨٦٤	٦٥,٤٤٨١	١٦	٣٢	٤٨	٦٤	٨٠	٩٧	١١٣	١٢٩	١٤٥
٨,١	٦٥,٦١٠٠	٦٥,٧٧٢١	٦٥,٩٣٤٤	٦٦,٠٩٦٩	٦٦,٢٥٩٦	٦٦,٤٢٢٥	٦٦,٥٨٥٦	٦٦,٧٤٨٩	٦٦,٩١٢٤	٦٧,٠٧٦١	١٦	٣٣	٤٩	٦٥	٨١	٩٨	١١٤	١٣٠	١٤٧
٨,٢	٦٧,٢٤٠٠	٦٧,٤٠٤١	٦٧,٥٦٨٤	٦٧,٧٣٢٩	٦٧,٨٩٧٦	٦٨,٠٦٢٥	٦٨,٢٢٧٦	٦٨,٣٩٢٩	٦٨,٥٥٨٤	٦٨,٧٢٤١	١٦	٣٣	٤٩	٦٦	٨٢	٩٩	١١٥	١٣٢	١٤٩
٨,٣	٦٨,٨٩٠٠	٦٩,٠٥٦١	٦٩,٢٢٢٤	٦٩,٣٨٨٩	٦٩,٥٥٥٦	٦٩,٧٢٢٥	٦٩,٨٨٩٦	٧٠,٠٥٦٩	٧٠,٢٢٤٤	٧٠,٣٩٢١	١٧	٣٣	٥٠	٦٧	٨٤	١٠٠	١١٧	١٣٤	١٥٠
٨,٤	٧٠,٥٦٠٠	٧٠,٧٢٨١	٧٠,٨٩٦٤	٧١,٠٦٤٩	٧١,٢٣٣٦	٧١,٤٠٢٥	٧١,٥٧١٦	٧١,٧٤٠٩	٧١,٩١٠٤	٧٢,٠٨٠١	١٧	٣٤	٥١	٦٨	٨٤	١٠١	١١٨	١٣٥	١٥٢
٨,٥	٧٢,٢٥٠٠	٧٢,٤٢٠١	٧٢,٥٩٠٤	٧٢,٧٦٠٩	٧٢,٩٣١٦	٧٣,١٠٢٥	٧٣,٢٧٣٦	٧٣,٤٤٤٩	٧٣,٦١٦٤	٧٣,٧٨٨١	١٧	٣٤	٥١	٦٨	٨٥	١٠٣	١٢٠	١٣٧	١٥٤
٨,٦	٧٣,٩٦٠٠	٧٤,١٣٢١	٧٤,٣٠٤٤	٧٤,٤٧٦٩	٧٤,٦٤٩٦	٧٤,٨٢٢٥	٧٤,٩٩٥٦	٧٥,١٦٨٩	٧٥,٣٤٢٤	٧٥,٥١٦١	١٧	٣٥	٥٢	٦٩	٨٦	١٠٤	١٢١	١٣٨	١٥٦
٨,٧	٧٥,٦٩٠٠	٧٥,٨٦٤١	٧٦,٠٣٨٤	٧٦,٢١٢٩	٧٦,٣٨٧٦	٧٦,٥٦٢٥	٧٦,٧٣٧٦	٧٦,٩١٢٩	٧٧,٠٨٨٤	٧٧,٢٦٤١	١٧	٣٥	٥٣	٧٠	٨٧	١٠٥	١٢٣	١٤٠	١٥٨
٨,٨	٧٧,٤٤٠٠	٧٧,٦١٦١	٧٧,٧٩٢٤	٧٧,٩٦٨٩	٧٨,١٤٥٦	٧٨,٣٢٢٥	٧٨,٤٩٩٦	٧٨,٦٧٦٩	٧٨,٨٥٤٤	٧٩,٠٣٢١	١٨	٣٥	٥٣	٧١	٨٨	١٠٦	١٢٤	١٤٢	١٥٩
٨,٩	٧٩,٢١٠٠	٧٩,٣٨٨١	٧٩,٥٦٦٤	٧٩,٧٤٤٩	٧٩,٩٢٣٦	٨٠,١٠٢٥	٨٠,٢٨١٦	٨٠,٤٦٠٩	٨٠,٦٤٠٤	٨٠,٨٢٠١	١٨	٣٦	٥٤	٧١	٨٩	١٠٧	١٢٥	١٤٣	١٦١
٩,٠	٨١,٠٠٠٠	٨١,١٨٠١	٨١,٣٦٠٤	٨١,٥٤٠٩	٨١,٧٢١٦	٨١,٩٠٢٥	٨٢,٠٨٣٦	٨٢,٢٦٤٩	٨٢,٤٤٦٤	٨٢,٦٢٨١	١٨	٣٦	٥٤	٧٢	٩٠	١٠٩	١٢٧	١٤٥	١٦٣
٩,١	٨٢,٨١٠٠	٨٢,٩٩٢١	٨٣,١٧٤٤	٨٣,٣٥٦٩	٨٣,٥٣٩٦	٨٣,٧٢٢٥	٨٣,٩٠٥٦	٨٤,٠٨٨٩	٨٤,٢٧٢٤	٨٤,٤٥٦١	١٨	٣٧	٥٥	٧٣	٩١	١١٠	١٢٨	١٤٦	١٦٥
٩,٢	٨٤,٦٤٠٠	٨٤,٨٢٤١	٨٥,٠٠٨٤	٨٥,١٩٢٩	٨٥,٣٧٧٦	٨٥,٥٦٢٥	٨٥,٧٤٧٦	٨٥,٩٣٢٩	٨٦,١١٨٤	٨٦,٣٠٤١	١٨	٣٧	٥٥	٧٤	٩٢	١١١	١٢٩	١٤٨	١٦٧
٩,٣	٨٦,٤٩٠٠	٨٦,٦٧٦١	٨٦,٨٦٢٤	٨٧,٠٤٨٩	٨٧,٢٣٥٦	٨٧,٤٢٢٥	٨٧,٦٠٩٦	٨٧,٧٩٦٩	٨٧,٩٨٤٤	٨٨,١٧٢١	١٩	٣٧	٥٦	٧٥	٩٣	١١٢	١٣١	١٥٠	١٦٨
٩,٤	٨٨,٣٦٠٠	٨٨,٥٤٨١	٨٨,٧٣٦٤	٨٨,٩٢٤٩	٨٩,١١٣٦	٨٩,٣٠٢٥	٨٩,٤٩١٦	٨٩,٦٨٠٩	٨٩,٨٧٠٤	٩٠,٠٦٠١	١٩	٣٨	٥٧	٧٥	٩٤	١١٣	١٣٢	١٥١	١٧٠
٩,٥	٩٠,٢٥٠٠	٩٠,٤٤٠١	٩٠,٦٣٠٤	٩٠,٨٢٠٩	٩١,٠١١٦	٩١,٢٠٢٥	٩١,٣٩٣٦	٩١,٥٨٤٩	٩١,٧٧٦٤	٩١,٩٦٨١	١٩	٣٨	٥٧	٧٦	٩٥	١١٤	١٣٤	١٥٣	١٧٢
٩,٦	٩٢,١٦٠٠	٩٢,٣٥٢١	٩٢,٥٤٤٤	٩٢,٧٣٦٩	٩٢,٩٢٩٦	٩٣,١٢٢٥	٩٣,٣١٥٦	٩٣,٥٠٨٩	٩٣,٧٠٢٤	٩٣,٨٩٦١	١٩	٣٩	٥٨	٧٧	٩٦	١١٦	١٣٥	١٥٤	١٧٤
٩,٧	٩٤,٠٩٠٠	٩٤,٢٨٤١	٩٤,٤٧٨٤	٩٤,٦٧٢٩	٩٤,٨٦٧٦	٩٥,٠٦٢٥	٩٥,٢٥٧٦	٩٥,٤٥٢٩	٩٥,٦٤٨٤	٩٥,٨٤٤١	١٩	٣٩	٥٨	٧٨	٩٧	١١٧	١٣٦	١٥٦	١٧٦
٩,٨	٩٦,٠٤٠٠	٩٦,٢٣٦١	٩٦,٤٣٢٤	٩٦,٦٢٨٩	٩٦,٨٢٥٦	٩٧,٠٢٢٥	٩٧,٢١٩٦	٩٧,٤١٦٩	٩٧,٦١٤٤	٩٧,٨١٢١	٢٠	٣٩	٥٩	٧٩	٩٨	١١٨	١٣٨	١٥٧	١٧٧
٩,٩	٩٨,٠١٠٠	٩٨,٢٠٨١	٩٨,٤٠٦٤	٩٨,٦٠٤٩	٩٨,٨٠٣٦	٩٩,٠٠٢٥	٩٩,٢٠١٦	٩٩,٤٠٠٩	٩٩,٦٠٠٤	٩٩,٨٠٠١	٢٠	٤٠	٦٠	٧٩	٩٩	١١٩	١٣٩	١٥٩	١٧٩

الأجوبة

الباب الثامن

(٣) خط العرض ٥٠° شمالا وخط الطول ٥ ٣/٨° غرباً .

(٤) ٢٠ ساعة ، ٢٨ دقيقة ، ٨,١ مساءاً ٤٨ ١/٢° غرباً .

(٥) ٤٦° شمالا   (٧) ٢٣ سبتمبر

(٨) ٥,٨ صباحا ، ١١,٨ صباحا .

(١٠) نحو ٧٩٠٠   (١١) منطقة ديفون الشمالية   (١٢) نحو ٢٤ سبتمبر .

(١٨) ٥٧,٧° ، ٧,٣٣ مساء

(١٩) نحو ٦,٤٠ صباحا ، ٦,٢٠ مساءاً عند الجيزة ، ٧ صباحا ، ٥ مساءاً عند نيويورك ، ٧,٢٨ صباحا ، ٤,٣٢ مساءاً عند لندن .

الباب التاسع

(٢) (ا) $س^{٢} + ص^{٢} = ١٦$ (ب) $س^{٢} + ص^{٢} - ٤س - ٦ص = ٣$

(٨) (ا) ٤٥° ، (٧) ٦٠° .   (٩) متوازيان .   (١١) ص = ك

(١٧) $ل = ١٠٠ ن^{٢}$ (١٩) (ا) س = صفراً ، ص = ٣ أو س = ٤ ، ص = صفراً

(ب) س = ٣ ، ص = ٤ أو س = ٤ ، ص = ٣

(ح) س = ٢ ، ص = ١ أو س = ٣ ، ص = ٢ أو س = − ٣ ، ص = − ٢ ، أو س = − ٢ ، ص = − ١

(٢٦) (١) ١ أو − ١,٤   (٢) ٣/٤ أو − ١/٢   (٣) ١,٢ أو − ١

الباب العاشر

(١) (ا) ٤١١٨   (ب) ٣٠٢٨٨   (ح) ١٩٩٢   (ى) ٩٩,١٨

(٢) ٦٢٢٧ ، ٩٦٩٢ ، ٠,٠١٩٥٠ ، ٤٥,٨٢ ، ١,٠٠٩ ، ٠٠,٤١٨١

(٣) ٢ ، ٣ ، ٣/٢

(٥) (ا) ١٢٥٫٩٣٠   (ب) ٠٫٩٦٨ ،   (ح) ١٫١١١

(٦) (ا) ٢٦٥ جنيه   (ب) بين سبع وثمانى سنوات   (ح) ٨٤ جنيه .

(٧) ٠٫٠١٠ ، ٠٫٣٤٦٦ ، ٨٫٢٤٠ .

الباب الحادى عشر

(١) ملاحظة : — لو$_{هـ}$ (١ + ١/٨٠) = ٤ لو$_{هـ}$ ٣ — ٤ لو$_{هـ}$ ٢ — لو$_{هـ}$ ٥

لو$_{هـ}$ (١ — ١/٢٥) = ٣ لو$_{هـ}$ ٢ + لو$_{هـ}$ ٣ — ٢ لو$_{هـ}$ ٥ وهكذا

(٦) ١ — ١/س^{٢} (٧) ٣٫٦ س$^{٢٫٦}$ ، ٥/٢ √س ، — ٣/٢ س$^{-٥/٢}$ ، ٧/٢ س$^{٥/٢}$ ، ١/٣ س$^{-٤/٩}$

(٨) ٥ س^{٤} — ١٥ س^{٢} + ١٠ س — ٤

(١٠) س = — ١ ، ص = ٢ ، س = ١ ، ص = — ٢

(١١) ٨/ط قدماً مكعباً   (١٢) ١٠ س = ٣ ص = ١/٢ ح

(١٤) (١) س^{٤} + ك (٢) ٣ لو$_{هـ}$ س (٣) {١/٤ س$^{ن + ١}$ / (ن + ١)} + ك

(٤) ٢/٣ س$^{٣/٢}$ + ك (٥) س^{٣} + س^{٢} + س + ك

(١٥) (١) ١/٢ س^{٣} + ا س + ب   (٢) ٥/٢ س^{٢} + ا س + ب

(٣) ٤/١٥ س$^{٥/٢}$ + ا س + ب

(١٦) ص = ١١٫٤١ + ٥٠٠ ع$^{-١٫٤}$

(١٧) (١) — ا^{٢} حا ا^{٢} س (٢) ١٢ ا جتا ٣ س (٣) ن ا جتا ن س — ن ب حا ن س

(٢٠) ا = ٢ س^{٢} + ٣ س + ك   (١) ١٠٨   (٢) ٢١٦   (٣) ٢٥

(٢١) ٣٨٠   (٢٢) (١) ٢٢٣ ١/٣ (٢) ٣/٢ ا + ٢ ح (٣) ٤ ١/٢ (٤) ٥٦ ، (٥) ٢

(٢٣) (١) ٢٠٢٦٦ ٢/٣ (٢) ١٩٩٩٤ ٢/٣ (٣) ١٩٩٩٣٫٦ بالضبط .

(٢٤) ١٤ (٢٦) ١١٩٠٠ (٢٧) ١٠٠ ط بوصة مكعبة (٨) ٣٦٩ ط بوصة مكعبة

(٣٠) (١) ١ ، (٢) صفرا ، (٣) (حا س — س جتا س)$_{٠}^{ط}$ = ط

(٣١) (١) س جتا س + حا س   (٢) جتا س قا^{٢} س + حا س طا س

= جتا س   (٣) ٦ س^{٢} + ٦ س + ٤

(٣٢) (١) — ١/(س + ١)^{٢} (٢) (س جتا س — حا س)/س^{٢} ،

(٣) — حا س/جتا^{٢} س ، (٤) قا^{٢} س

(٣٣) (١) (١/٢ جتا س)/√حا س (٢) ن ا (ا س + ب)$^{ن — ١}$ (٣) ا جتا (ا س + ب)

(٤) (٢ ا س + ب)/(ا س^{٢} + ب س + ح)

(٣٥) (١) ص = ا جتا ٢ س + ب حا ٢ س   (٢) ص = ا هـ$^{٢ س}$ + ب هـ$^{-٢ س}$

الجزء الثانى : (١) ص = ٥ جتا ٢ س + ٢ حا ٢ س

(٢) ص = ١/٢ (٧ هـ$^{٢ س}$ + ٣ هـ$^{-٢ س}$)

الباب الثانى عشر

(١) ١ — (٥/٦)^{٣} = ٩١/٢١٦   (٢) (١٣! × ٣٩!)/٥٢! = ١/٦٣٥٠١٣٥٥٩٦٠٠

(٣) ٣/١٩ بفرض أن الشريك الأول ليس لديه أيهما

(٤) ٦١٨٩/٢٦٢١١٤٤ ، ٩١٠٥٩٦/١٠٤٨٠٧٦   (٥) قسمة ٩ ، ٣ ، ٣ ، ١

١٧ — الانسان والميكروب والمرض — تأليف جون درو — مراجعة الدكتور محمد رشاد الطوبى

١٨ — الفيروس والانسان — تأليف ف. م برنت — ترجمة دكتور سعدالدين عبد الغفار

١٩ — استخدام الطاقة الذرية — تأليف أوتوهان — ترجمة الدكتور عفاف صبرى

٢٠ — عالج نفسك بالغذاء — للدكتور ابراهيم فهيم

٢١ — الكشف والفتح فى الميدان العلمى — للدكتور مالكولم بيرس — ترجمة الدكتور أحمد حماد الحسينى

٢٢ — البحر المحيط بنا — تأليف راشيل كارسون — ترجمة الأستاذ أحمد محمد مختار

٢٣ — الوراثة والسلالة والمجتمع — تأليف د. دن — ترجمة الدكتور عز الدين فراج

٢٤ — إلى عالم آخر — تأليف ورنو بودلر — ترجمة الدكتور عبد الحميد محمد أمين

٢٥ — الشمس — تأليف جامو — ترجمة الدكتور أحمد حماد

٢٦ — الرياضة للمليون ج ١ — تأليف لانسلوت هوجبن — ترجمة الدكتور عطيه عاشور وزملائه

٢٧ — استخفاء الحيوان — تأليف ا. م ستيفنسون — ترجمة الدكتور ابراهيم عبد المجيد

٢٨ — الجنس البشرى — للدكتور احمد محمود البطراوى

٢٩ — التقاويم — للأستاذ محمد محمد فياض

٣٠ — فسيولوجيا الانسان — تأليف دينيس وولكر — ترجمة الدكتور فتحى الغزاوى

٣١ — مع النجوم فى تطورها — تأليف سيسيليا باين جابوشكين — ترجمة الدكتور صلاح الدين حامد

٣٢ — الطبيعة النووية — تأليف هيزلبرج — ترجمة الدكتور سيد رمضان هدارة

٣٣ — من السحر إلى الطب — ترجمة الدكتور أحمد زكى الحكيم

٣٤ — شخصية الحيوان — تأليف مونرو فوكس — ترجمة الدكتور فتحى الغزاوى

٣٥ — الكيمياء العضوية ومنافعها اليومية — تأليف ه. ريد — ترجمة الدكتور عبدالقادر فطين

٣٦ — الرياضة للمليون ج ٢ — تأليف لانسلوت هوجبن — ترجمة الدكتور عطيه عاشور وآخرين

صدر عن مكتبة الشرق فى مشروع الألف كتاب

١ — حركات الشباب الاجتماعية — للدكتور محمد فتحى

٢ — عذراء اللورين — ماكسويل أندرسون — ترجمة عبد الله البشير وثروت أباظة

٣ — بين العمل والأمل — تأليف المس جنى لى — ترجمة مصطفى محمد البلتينى

٤ — الرياضة للمليون (جزء أول) — تأليف لانسلوت هوجبين ترجمة الدكتور الدكتور عطيه عطيه عاشور وآخرين —

٥ — الرياضة للمليون — (جزء ثان) تأليف لانسلوت هوجبين — ترجمة عاشور وآخرين

٦ — الطفل الموهوب — تأليف ماريان شيفيل — ترجمة الدكتور رياض عسكر

٧ — ماهو الجنس ؟ — من مؤلفات اليونسكو — ترجمة الدكتور يوسف أبو الحجاج

٨ — الجغرافيا مغزاها ومرماها — س . و . ولدرد ج . و . جوردون إيست — ترجمة الدكتور يوسف أبو الحجاج

٩ — التاريخ دراسة مسلية — تأليف مونروليف — ترجمة عبد الغنى الشال وأحمد على فريد

١٠ — عشرة من أئمة الاقتصاد — تأليف جوزيف . ا . شومبيتر ترجمة دكتور حسين عمر

١١ — أمجاد من تراثنا — للأستاذ عزيز مرقص منصور

١٢ — مصلح البيانو الضرير — تأليف مارسيل بريفو — ترجمة الأستاذ حسن صادق

صدر عن مكتبة الشرق فى مشروع الألف كتاب